高等学校教材

简明弹塑性力学

Concise Elasticity And Plasticity

徐秉业　编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

简明弹塑性力学

Jianming Tansuxing Lixue

徐秉业　编著

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书系统阐述了弹塑性力学的基本方程，特别注重介绍各类问题的求解方法及在工程实践中的应用。全书共 9 章，内容包括绪论，应力与应变分析，弹塑性力学中的物理关系，弹性平面问题，简单弹塑性问题，结构的塑性极限分析，圆板和环板的塑性极限分析，金属块体成形的塑性分析，金属板料成形分析的力学方法。各章附有丰富的习题，书后给出习题选解和答案。

本书可作为力学、机械、土木、水利、航空、核能、冶金、材料等工程专业研究生教材，也可供有关工程专业高年级学生和工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

简明弹塑性力学/徐秉业编著 .—北京：高等教育出版社，2011.1

ISBN 978－7－04－030725－2

Ⅰ.①简… Ⅱ.①徐… Ⅲ.①弹性力学－高等学校－教材②塑性力学－高等学校－教材 Ⅳ.①O343②O344

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 242618 号

策划编辑 水 渊　**责任编辑** 水 渊　**封面设计** 张 楠
版式设计 范晓红　**责任校对** 陈旭颖　**责任印制** 张福涛

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**咨询电话**	400-810-0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
			http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京印刷一厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2011 年 1 月第 1 版
印　　张	13.75	**印　　次**	2011 年 1 月第 1 次印刷
字　　数	250 000	**定　　价**	26.10 元

物料号　30725－00

前　言

弹塑性力学已被许多工程专业选为必修课程或选修课程。目前这门课程的教材已出版了多种版本，但还缺少一本内容简明、适合一般工程专业使用的教材。本书是供一般工程专业使用的专业基础教材，着重介绍弹性力学和塑性力学的基础和这一学科领域中成熟的内容。

弹性力学中的平面问题发展得比较成熟，因此应重点介绍一下弹性力学平面问题中分析问题的思路以及各种解题的方法。在平面问题中，在引进应力函数概念后，由于不仅应力可以用应力函数表示，而且应变和位移都可以用应力函数表示，所以问题变为只有应力函数一个未知量了。如果将应力函数代入到应力表示的协调方程，则可以发现，平面问题的应力函数应该满足双调和方程，但是满足双调和方程的应力函数有很多，而只有满足问题所有应力边界条件的应力函数才是该问题的解。在讲清楚应力函数概念后，采用半逆解法求解问题是十分有利的。这一方法是根据材料力学已知解或弹性体的边界形状和受力情况，先假设部分应力为某种形式的应力函数，从而推断出应力函数的一种形式，然后利用平衡方程和边界条件确定尚未求出的应力分量，如果所得到的解能满足全部条件，则这个解就是正确解答。由于半逆解法对应力分量作了一定的假定，当然这些假定应根据材料力学的解得来或根据经验得来，从而使问题的求解得以大大简化，往往是将弹性力学中求解偏微分方程问题转化为求解常微分方程问题，使得问题得以求解。

在塑性力学方面首先要讲清楚塑性变形的不可恢复性，然后重点介绍屈服条件的概念，以及它的使用条件，特别是简单弹塑性问题，因为在这类问题中，只用平衡方程和屈服条件便可求解梁的弹塑性弯曲、柱的弹塑性扭转、轴对称旋转圆盘以及轴对称厚壁圆筒等问题。在求解这类问题的过程中，要介绍结构由弹性应力状态向塑性应力状态过渡的过程。这部分内容对于理解弹塑性力学是十分重要的，因为这些简单结构不仅容易找到弹性解，也容易找到弹塑性解和塑性解，对学生建立弹塑性力学的概念是十分有利的。结构的极限分析（其中包括梁、连续梁、钢架、圆板等），是塑性力学中发展得比较成功的内容，无论从理论上还是解决具体问题上，都已经比较成熟，学员掌握这部分内容后，对提高他们分析问题和解决问题的能力都是非常有利的。如涉及金属成形问题，则可以采用

界限法、能量法或主应力法去分析问题和解决问题。

在介绍弹塑性力学的基本问题时，要注意使学生掌握基本概念并学会推导公式，同时还应该注意掌握分析问题的方法，因此应该学习书中例题解题的思路。应该强调的是，讲解问题时，一定要概念准确，只有概念准确才能正确理解问题的实质，而且这些力学概念应表达得明确且通俗易懂。所给出的基本原理，叙述表达要清晰、简练，而且这些原理要反复证明并从各个角度来说明，同时要注重实用。因为学习力学的目的就是为了在实际问题中应用。这里还应注意说明的是，应该将用弹塑性力学方法所得到的结果和用材料力学方法所得到结果的差别加以比较，使学生看到弹塑性力学所起的作用。在给出解题方法的基础上，适当介绍一些工程上常遇到的实际问题，从而使学生将课程内容与实际问题相联系，为培养解决工程问题的能力打下基础。力学来源于工程实践，因此力学一般都是有工程背景的，力学应根据工程需求选用相应的力学分析方法去解决问题。通过将理论结果和工程实践进行验证，证明理论分析的正确性和实验方法的合理性。在讲授弹塑性力学的过程中，要让学生感受到今天所学的知识今后都是很有用的。

本书就是根据以上考虑编写的一本弹塑性力学教材，全书共有 9 章，前 6 章是课程的基本内容，对于只设弹性力学的专业，可只选用前 4 章以及第 5 章中的部分内容，而且不介绍第 3 章中的屈服条件和塑性本构关系的内容，如果设置弹塑性力学的专业则除选用前 4 章外，还应选用第 5 章、第 6 章和第 7 章的部分的内容，对于有特殊需求的专业可选用第 8 章和第 9 章的内容。

本书介绍弹塑性力学的基本问题时，对这些基本问题进行深入浅出的叙述，删去了许多繁琐的推导，并采用例题说明基本原理和处理问题的方法，主要特色是简明、易懂，概念清晰，公式简单，有利于培养初学的学生分析问题和解决问题的能力。本书第 2 章到第 8 章都附有习题，便于学生自学。

杨桂通教授对本书的全部初稿进行了认真、仔细的审阅，并提出了十分宝贵的意见和建议，对提高本书的质量起到了重要作用，作者在此表示诚挚的谢意。

衷心地期待这本教材能在有关工程专业的教学中发挥良好的作用。

徐秉业

于清华大学 2010 年 4 月

目　　录

第 1 章　绪　　论

第 1 节　弹塑性力学的发展、任务和基本假设

1.1.1　弹塑性力学的发展简况

弹性力学和塑性力学都是固体力学的重要分支，它们是研究弹塑性固体在外力的作用下产生变形和内力规律的学科。它推理严谨，计算结果准确，是分析和解决许多工程技术问题的基础和依据。这里所谓弹性是指物体的应力与应变之间有单值的函数关系，即应力与应变有一一对应的关系。当除去外力后，物体完全恢复到初始的形状，而塑性力学则研究作用在物体上的外力取消后，物体的变形不完全恢复，而产生一部分永久变形即塑性变形时，作用力和变形之间的关系，以及塑性变形后物体内部应力分布规律。塑性力学与弹性力学有着密切的关系。弹性力学中的大部分基本概念和处理问题的方法（如平衡方程、协调方程）都可以在塑性力学中得到应用。

一般说来，当外力较小时，物体是处于弹性状态的。而当外力逐渐增大到某一值时，物体中某一点的应力状态达到了某一极限值，物体中即开始产生塑性变形。塑性力学和弹性力学之间的根本差别在于弹性力学是以应力与应变成线性关系的广义胡克(R. Hooke)定律为基础的。在塑性力学的范围中，应力与应变之间的关系已经是非线性的了，而这种非线性的特征又是与所研究的具体材料有关。因此塑性力学就没有像广义胡克定律那样统一的规律。对于不同的材料，在不同的条件下，都具有不同的规律。

弹性力学的研究开展得比较早，英国的胡克早在 1660 年便在实验中发现了螺旋弹簧伸长量和所受的拉力成正比的规律，后被称为胡克定律。到 19 世纪 20 年代，法国的纳维(C. L. M. H. Navier)和柯西(A. L. Cauchy)在当时数学飞跃发展的基础上建立了弹性力学的数学理论。纳维于 1827 年首次导出了弹性固体的平衡运动方程。柯西在一系列论文中也明确地提出了应变、应变分量、应力和应力分量的概念，建立了弹性力学的几何方程，各向同性以及各向异性材料的广义胡克定律。在此以后，法国的圣维南(A. J. C. B. de, Saint - Venant)发

表了许多理论结果和实验结果。这一时期弹性力学广泛应用于工程实际，在理论上也建立了许多重要定理和原理，同时也发展了许多有效的计算方法。

塑性力学的研究则开展得较晚，1773 年库伦(C. A. Coulumb)曾提出了一个塑性固体(主要是土壤)的屈服条件。关于金属塑性力学的研究，最早始于法国工程师特雷斯卡(H. Tresca)，他于 1864 年公布了关于冲压和挤压的一些初步实验报告。根据这些实验，他认为金属在最大剪应力达到某一临界值时就发生塑性屈服。随后圣维南认为在塑性变形的过程中，最大剪应力和最大剪应变增量的方向应当是一致的，按这一思路，莱维(M. Levy)于 1871 年将应力与应变关系推广到三维问题中去。圣维南还应用特雷斯卡屈服条件计算了圆柱体受扭转或弯曲而处于部分塑性状态时的应力以及圆管受内压而处于全塑性状态时的应力，这时他便认识到在应力和塑性应变之间没有一一对应的关系。此后又进行了许多类似的实验，提出许多种屈服条件，其中最有意义的是胡勃(M. Huber)和米泽斯(R. Mises)所提出的条件，后来被解释为最大形变能的屈服条件，这期间米泽斯还独立地得出了莱维曾提出过的塑性应力-应变关系。由于他们都只考虑了塑性应变，因而属于刚塑性模型的理论。

在 20 世纪 20 年代罗德(W. Lode)用钢、铜和镍的薄壁管试件进行了在不同的轴向拉伸和内压联合作用下的实验，泰勒(G. I. Taylor)和奎宁(H. Quinney)用薄壁管，但却是在轴向拉伸和扭转的联合作用下进行实验。这些实验证明了莱维-米泽斯本构关系是在真实情况下很好的近似。鲁伊斯(A. Ruess)在普朗特(L. Prandtl)的启示下，提出了一个包括弹性应变部分的三维弹塑性应力应变关系式。以上是塑性力学中的增量理论。至此，经典塑性理论已初步形成。

在此同时，亨奇(H. Hencky)和纳戴(A. Nadai)提出了一个在实践中使用比较方便的全量理论，即应变是用全量而不是用增量表示的理论。此后，前苏联的伊柳辛(A. A. Iliushin)很好地发展了这个理论，提出了简单加载定理和卸载定理，并大量地应用这一理论求解具体边值问题。虽然全量理论在理论上不适用于复杂加载的应力变化，但是某些问题计算的结果却和实验结果符合得很好。1951 年美国的德鲁克(D. C. Drucker)从稳定材料的定义出发，讨论了塑性势函数，证明了塑性应变率与屈服面的正交性，并提出相关联的流动法则的概念，为塑性极限分析理论带来了很大的方便。60 年代前后，对结构承载能力的研究有很大的发展，特别是德鲁克和普拉格(W. Prager)等对三维应力状态下的问题提出了极值定理，从而引出上、下限定理，把塑性力学的发展向前推进了一大步，使许多工程实际问题获得了很好的结果。

1.1.2 弹塑性力学的任务

在近代工业的发展过程中，对于各种结构与机械零件在外力作用下的变形

要进行分析，而多数材料在小变形的情况下都可以近似地看作是线弹性体，所以弹性力学的发展与工程发展的需要有着密切的联系。各种工程的需要使弹性力学得到了不断的发展，结构和构件尺寸的选择和确定是与保证该承重构件的安全及持久性密不可分的，确定结构的内力和选择结构尺寸是弹塑性力学的任务。这门学科涉及以下几方面的问题：

(1) 保证结构和构件具有相应的强度；

(2) 保证结构和构件满足相应变形的要求；

(3) 保证结构和构件的设计既安全可靠，经济上又是合理优化的。这里要求找出一个既满足规范安全的有关规定，同时也满足经济设计的原则；

(4) 保证结构和构件满足美学的要求，使得所设计的结构和构件美观和谐。

材料强度科学近年来发展很快，特别是在理论方面不断取得了许多新成果。实验力学的发展也促进了这一学科的发展，因为许多结果都验证了理论分析的正确性。当设计新型结构或设备时，弹塑性力学和强度科学更具有明显的意义。有些问题由于材料复杂的形状和性质，往往难于找到理论解，这时便需要借助模型实验来找到有关信息和数据。模型实验还可以验证理论结果的正确性。材料力学主要研究杆或梁在外力作用下的拉、压、弯、扭问题。研究材料力学中进一步复杂的问题需要略去许多简化假设，这时便要用到弹塑性力学。例如在研究梁的弯曲问题时，在材料力学中采用了平截面假设，这时截面上的正应力沿梁的高度线性变化，而在弹性力学中则不需要这样的假设。通过弹性力学的研究，可以确定在什么情况下平面假设能给出合理的结果。研究证明，当截面尺寸与梁的长度相比足够小时，平面假设才是正确的。如果截面的尺寸与梁的长度具有相同的量级，则平面假设将导致错误的结果。此外，还有许多问题用材料力学的知识无法求解，在此情况下，只能用弹性力学去求解。例如：

(1) 具有圆孔的受拉平板，因为此时在孔的周围有应力集中；

(2) 受外力作用的楔体和半空间问题；

(3) 受外力作用的弹性薄板；

(4) 受水压力作用的水坝。

塑性力学在工程实践中也有着重要的用途。因为物体达到塑性阶段并没有破坏，它还有能力继续工作，所以可以把构件设计到部分达到塑性状态、部分保持弹性状态，从而可以节省材料，因此应用塑性理论能更合理地定出工程结构和机械零件的安全系数。以塑性力学为基础的极限设计理论，在结构设计中有很大用途。另一方面，在塑性加工中，如金属的压延、锻造等都是塑性过程，把这些工艺现象提高到理论阶段，从而又进一步地指导实践，对生产技术的发展也是有意义的。关于金属塑性加工的工艺过程已有不少专门文献。

在实际问题中，允许塑性变形的大小，视不同工程领域而有不同的量级。在

工程结构及机械零件的设计中是不允许大变形的，因为如果变形太大，结构便不能正常地工作，因此在这类问题中，塑性变形要限制在弹性变形的量级，也就是弹塑性力学所应研究的问题；而在金属塑性加工的工艺过程中，塑性变形却可以是很大的，因而在这类问题中，弹性变形是完全可以忽略的。

1.1.3 弹塑性力学的基本假设

在弹塑性力学中，为了能通过已知量（如物体的几何形状和尺寸、物体所受的外力或几何约束）求出应力、应变和位移等未知量，首先要从问题的静力学、几何学和物理学三方面出发，建立这些未知量所满足的弹性力学基本方程和相应的边界条件。因此，通常必须按照所研究物体的性质，以及求解问题的范围，略去一些影响较小的次要因素，使方程的求解成为可能。本书中对物体的材料性质采用以下基本假设：

（1）连续性假设

假设物体是连续的，即假定组成物体的质点之间不存在任何空隙。这样，物体内的一些物理量，如应力、应变和位移才可能是连续的，因此才可能用坐标的连续函数来表示它们。

（2）均匀性假设

假设物体是均匀的，即整个物体所有各部分的物理性质（如弹性或塑性）都是相同的，并不随着坐标位置的改变而发生变化。根据这个假设，在处理问题时可取出物体内任一部分进行分析，然后将分析结果用于整个物体。

（3）各向同性假设

假设物体是各向同性的，即物体在不同方向上具有相同的物理性质，因而物体的弹性常数不随坐标方向的改变而改变。显然，用木材和竹材做成的构件都不能当作各向同性体；至于用钢材做成的构件，虽然由无数个各向异性的晶体组成，但由于晶体很微小，而且是随机排列的，所以可以认为钢材从宏观意义上说是各向同性的。

（4）在弹性区完全线弹性假设

物体在任一瞬时的变形完全取决于它在这一瞬时所受的外力，与过去的受力情况无关。在一般的弹性力学中，完全弹性这一假设，还包含变形与载荷成正比的含义，亦即两者之间是呈线性关系的，在这种线性的完全弹性体中，应力应变关系服从胡克定律，其弹性常数不随应力或应变的大小而变。

（5）小变形假设

假设物体受力以后，整个物体所有各点的变形都远小于物体原来的尺寸。这样可以使问题大为简化，例如，在研究物体的平衡时，可不考虑由于变形引起的物体尺寸和位置的变化；在建立几何方程和物理方程时，可以略去应变、转角

的二次幂或二次乘积以上的项，使所得到的关系式都是线性的。

（6）平均正应力（静水压力）不影响屈服条件和加载条件。

（7）无初始应力假设，物体处于自然状态。

1.1.4 弹塑性力学的求解

弹塑性力学基本方程需要从几何学、静力学和物理学三个方面来进行研究，在几何学方面要求物体在变形前是连续的，变形后仍是连续的，在变形过程中不仅要考虑刚体位移而且要研究因变形而产生的位移并建立起位移和应变之间的关系。由于物体是连续的，所以在变形时各小单元都是相互联系的。通过研究位移和应变之间的关系，可以得到变形协调条件。反映变形连续规律的数学表达式有几何方程和位移的边界条件。在静力学方面主要是建立物体的平衡条件，不仅物体整体要保持平衡，而且物体内的任何局部都要处于平衡状态，而且其中任一部分都遵守力学中的运动或平衡规律。反映这个规律的数学方程有运动或平衡微分方程和载荷的边界条件。在物理学方面则要建立应力与应变或应变增量之间的关系，这种关系又称为本构关系，它描述材料在不同环境下的力学性态。在弹塑性力学中，对本构关系的研究是一个非常重要的课题。由于在自然界中物体的性质是各种各样的，而且它们所处的工作条件又各不相同，因此研究本构关系是一个非常复杂但却具有根本性意义的工作。在线弹性体中，一点的应力状态和应变状态之间存在着一定的联系，即应力与应变存在着一一对应的关系，其中应力与应变呈线性关系，这就是大家熟知的广义胡克定律。弹性体本构关系的研究已比较成熟和完备，但是在弹塑性体中本构关系的研究却要复杂得多。首先弹塑性体的本构关系中，应力和应变之间已经没有一一对应的关系，应变的大小，不仅与载荷有关，而且与变形历史有关。例如许多金属材料在产生塑性变形后，都有强化效应，从原来的各向同性材料变为各向异性材料，屈服面不仅大小和位置有变化，而且形状也有变化。对于这一现象的描述是近年来研究得比较多的领域。

在线弹性力学中，有 3 个平衡方程，6 个物理方程和 6 个几何方程，即加起来有 15 个方程式，而 6 个应力，6 个应变和 3 个位移是 15 个未知量，在理论上是可解的。但求解具体问题时，却会遇到很大困难。在弹性力学的平面问题中，情况稍微简单一些；在此情况下，有 3 个应力分量，3 个应变分量和 2 个位移分量，一共有 8 个未知函数。而已有的是 8 个条件，它们是 2 个平衡方程，3 个几何方程和 3 个物理方程，因而问题是有解的。但是，这里所遇到的问题是要联立求解 5 个微分方程和 3 个代数方程，在数学上仍会遇到许多困难。因此发展了一个用应力函数求解弹性力学平面问题的方法。所谓应力函数方法就是要找到一个函数，这个函数满足平衡条件又满足变形协调条件以及物理条件，所以只要这个函数能满足问题边界条件，则用这个函数表示的应力，便是所要找的应力。有了

应力便可以通过应力应变关系找出应变，最后再通过应变与位移的关系找出满足位移边界条件的位移。这样找出的解不仅满足平衡条件、几何条件和物理条件，而且满足力和几何的边界条件。

在弹塑性问题中，由于塑性力学中的物理关系是非线性的，在具体求解边值问题时往往遇到许多数学上的困难。为此，塑性力学发展了许多行之有效的方法。现选几种常用的方法简介如下：

静定问题，这类问题又称简单问题。其特点是平衡方程、屈服条件的数目与所求未知量的数目相等，因而不用使用塑性力学中的非线性的本构方程便能找出所求的未知量。塑性力学中的一维问题大都属于这类问题。例如旋转圆盘、厚壁圆筒、厚壁圆球、实心和空心受扭圆轴、各种截面梁的弹塑性弯曲等都属于这类问题。在求解这类问题时，一般都采用理想弹塑性力学模型进行计算。这类问题虽然求解简便，但在工程实际中却经常遇到，因此很有应用价值。

界限法又称上、下限法，是一种很有应用价值的分析方法。由于塑性力学的物理关系是非线性的因而要找到能满足全部塑性力学方程的解是非常困难的，因此若能找到满足一部分方程的解，而又能对这些解的性质作出估计，这项工作是很有意义的。在界限法中将塑性力学的方程分为两类：第一类方程包括平衡方程、屈服条件和力的边界条件，这些条件称为静力条件，在这些条件中完全不包括几何方面的要求。若某一个解能满足上述的静力条件，则称该解为静力解。用静力解求得的极限载荷一定比完全解所求得的极限载荷小，最多等于完全解的极限载荷。这里所谓的完全解就是满足塑性力学全部条件的解。另一类方程则包括外力所作的功等于内部所耗散功的条件以及结构的几何边界条件，这里没有考虑静力方面的要求，用这种方法求解，称为机动法，用机动法所求得的极限载荷一般都比完全解所求得的极限载荷大，其中最小的载荷可能与完全解所求得的极限载荷相等。机动法又称上限法。上限法在金属塑性成形问题中和板壳塑性极限分析中获得了非常广泛的应用。这是因为在上限法中，总可以按照某一种破坏机构根据力学中的虚功原理找出极限载荷的上限值，而破坏机构又可以通过实验方法找到。最合理的破坏模式也就是和实验结果一致的模式。

主应力法是金属塑性成形中所经常使用的一种简化方法，这种方法在分析问题时，认为剪应力对材料的屈服影响很小，因而在屈服条件中略去剪应力，这时平面应变问题中的屈服条件便可简化。在分析中，还假设应力在一个方向的分布是均匀的。因此在计算中，数学形式比较简单。这种方法不仅能求出各种工艺过程中的总力而且还能找出应力分布的规律以及某些参数对成形的影响。

能量法是和上限法相类似的一种分析方法，也是利用能量守恒原理对塑性变形进行分析的一种方法。外力功是指在塑性变形时外力所作的功，而内力功则为由系统内部塑性变形能与摩擦产生能量所组成的耗散能。能量法与上限法

的主要区别在于能量法可以分析具有强化性质材料的极限载荷问题。

这里应该强调指出，在塑性力学求解问题中，对屈服函数进行简化具有重要意义。从计算角度来看，当主应力大小次序为已知时，应尽量采用特雷斯卡屈服条件，因为特雷斯卡屈服条件是一组线性代数方程式，求解问题时比较方便。若采用最大正应力屈服条件时，有时使计算过程更为简化，而计算结果与用其他屈服条件所获得的结果相差并不大。利用这种线性化了的屈服条件计算各种边界条件的环板和轴对称结构都获得了很有参考价值的结果。当然在计算中采用合理简化模型和体积不变的假设也将给计算带来方便。

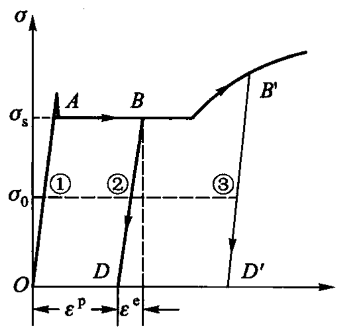
第 2 节　弹塑性力学的基础实验

在弹塑性力学中，有两个基本实验：一个是单向拉伸的实验；另一个是材料在静水压力作用下，物体体积变形规律的实验。这两个实验的结果是建立各种弹塑性理论的基础，现分别说明如下：

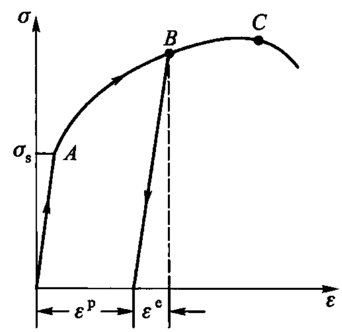
1.2.1　应力应变曲线

从单向拉伸（或压缩）、薄壁管扭转实验所得到的应力应变曲线，说明了材料的强度和塑性性能，它是塑性理论最基本的实验资料。由于纯扭实验所得的曲线几乎与拉伸曲线很相似，因此这里只介绍单向拉伸（或压缩）的某些实验结果。

（1）一般金属材料根据其塑性变形性能的不同可分为两类：一是有明显的屈服流动的阶段；有的材料流动阶段是很长的，往往应变可以达到 1%，例如低碳钢，铸钢，某些合金钢（图 1－1a）通常把初始屈服时的应力作为屈服极限，用 σ_s 表示，另一类是没有明显的屈服流动阶段，例如中碳钢，某些高强度合金钢及某些有色金属等，则规定具有 0.2%的残余应变时的应力作为条件屈服极限，或者把割线模量 $E'=0.7E$ 时的应力作为条件屈服极限（E 为弹性模量）。



(a) 有明显屈服极限



(b) 无明显屈服极限

图 1－1　应力-应变曲线

从拉伸实验结果可以知道，如应力小于弹性极限，则在加载和卸载时都服从弹性的胡克定律。材料进入塑性阶段以后，加载和卸载将遵循不同的规律。例如图 1－1a 中的 B 点，从那里卸载，应力与应变不沿原曲线 BAO 退回到 O 点，而将沿 BD 线变化，当应力全部消失时，将保留永久应变 OD。实验表明，材料在塑性变形后再卸载时，可取 BD 平行于 OA，以 ε^p 表示塑性应变 OD，则 B 点的应变为：$\varepsilon=\varepsilon^e+\varepsilon^p=\dfrac{\sigma}{E}+\varepsilon^p$。

如果从 D 点重新加载，开始时仍按 DB 线变化，在回到 B 点后才恢复按原有曲线继续变化，产生新的塑性变形。B 点成为这时的屈服极限，也可认为它是第二次加载时新的屈服应力。在第二次加载过程中，弹性系数仍保持不变，但弹性极限及屈服极限有升高的现象，其升高程度与塑性变形的历史有关，决定于前面塑性变形的程度。这种现象称为应变强化或加工硬化。$\sigma-\varepsilon$ 曲线的切线斜率越大，则硬化效应越显著。B 点的应力称为加载应力。对于均匀应力状态的情形，全部卸除外载之后，宏观应力等于零，而保留了宏观的残余应变。

从图 1－1a 中可以看出：应力与应变之间不是单值对应的关系，它与加载历史有关。例如对应于 σ_0 的应力，根据加载历史的不同，可对应于①、②、③处的应变。因此，塑性力学的问题应该是从某一已知的初始状态（可以是弹性状态）开始，跟随加载过程，用应力增量与应变增量的关系，逐步将每个时刻的各个增量，累加起来得到物体内的应力和应变分布。

(2) 对一般金属材料，拉伸和压缩实验曲线在小弹塑性变形阶段基本重合，但在大塑性变形阶段，将有显著的差别，一般应变量不超过 10％时，可认为两者一致（图 1－2），但精确的实验发现，某些高强度合金钢的 σ_s 和 E 在拉伸和压缩的情况下有区别。因此，对于一般金属材料，在变形不大的情况下，用简单拉伸实验代替简单压缩实验进行塑性分析是偏于安全的，但对于拉伸与压缩曲线有明显区别的材料如铸铁、混凝土则需要另作专门研究。

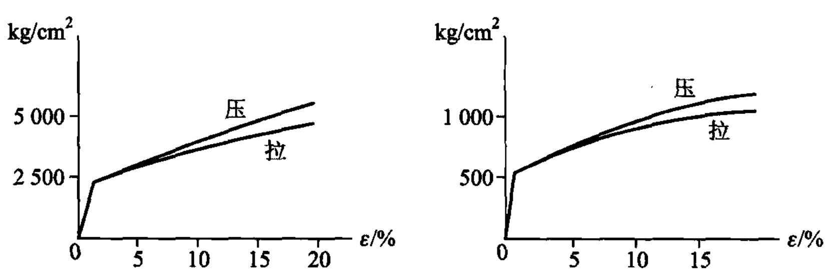


图 1－2　两种不同材料的拉、压实验