◎金星教育系列丛书　全心全意解疑解难◎

总主编/薛金星

中学教材全解

ZHONGXUE JIAOCAI QUANJIE

学案版

高中数学

必修5

配套人民教育出版社实验教科书

A版

陕西出版集团　陕西人民教育出版社

◎金星教育系列丛书　全心全意解疑解难◎

中学教材全解

学案版

高中数学必修5

配套人民教育出版社实验教科书

总 主 编　薛金星
本册主编　司前进
副 主 编　李兰玲

A版

陕西出版集团　陕西人民教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

中学教材全解：学案版：人教实验A版. 高中数学. 5：必修/薛金星主编.—西安：陕西人民教育出版社，2011.10

ISBN 978—7—5450—1197—5

Ⅰ.①中… Ⅱ.①薛… Ⅲ.①中学数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.①G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第211767号

中学教材全解(学案版)·高中数学必修5(人教实验A版)

陕西出版集团
陕西人民教育出版社 出版发行
(陕西省西安市丈八五路58号)
各地书店经销　北京市汇祥印务有限公司
880×1230毫米　16开本　11.5印张　480千字
2012年1月第1版　2012年1月第1次印刷
ISBN 978—7—5450—1197—5

零距离直击高考

模块考点及对应高考题分布概览

考点		经典高考题分布及分值		
解三角形	解三角形	大纲全国理,17,10分[第6页] 湖南理,17,12分[第24页] 浙江理,18,14分[第23页] 湖北理,16,10分[第24页] 江西理,17,12分[第24页] 辽宁文,17,12分[第24页] 重庆文,8,5分[第113页] 课标全国文,15,5分[第114页] 课标全国理,16,5分[第113页] 山东理,17,12分[第23页] 四川理,6,5分[第114页] 安徽理,14,5分[第114页] 陕西文,18,12分[第114页]	天津理,7,5分[第22页] 湖南理,6,5分[第25页] 课标全国理,16,5分[第22页] 安徽理,16,12分[第22页] 陕西理,17,12分[第22页] 课标全国文,16,5分 广东理,11,5分[第22页] 上海文,18,5分 江苏,17,14分[第23页] 浙江文,18,14分[第26页] 山东理,15,4分[第114页]	辽宁理,17,12分 安徽理,16,12分[第6页] 湖北文,16,12分 海南(宁夏)理,17,12分[第17页] 天津理,17,12分 山东文,17,12分 广东文,7,5分 浙江理,18,14分 北京理,15,13分[第114页]
数列	数列的概念及应用	江西理,5,5分	陕西理,12,5分 辽宁理,16,5分	北京理,14,5分 湖北理,15,5分[第115页]
	等差数列和等比数列	福建文,17,12分[第44页] 辽宁文,5,5分[第67页] 四川文,9,5分[第67页] 四川理,8,5分[第67页] 北京理,11,5分[第54页] 广东文,11,5分[第52页] 陕西理,14,5分[第45页] 天津理,4,5分[第67页] 江西理,18,12分[第52页] 湖北理,13,5分[第67页] 湖北文,17,12分[第69页] 四川文,20,12分[第69页] 浙江文,17,4分[第115页] 课标全国文,17,12分[第117页] 江西文,5,5分[第116页]	大纲全国Ⅰ理,4,5分[第49页] 北京理,2,5分[第53页] 江西文,7,5分[第53页] 天津文,15,4分[第69页] 广东理,4,5分 浙江文,19,14分 福建理,3,5分[第68页] 北京文,16,13分 重庆理,1,5分[第68页] 大纲全国Ⅱ理,4,5分[第68页] 安徽理,10,5分[第68页] 湖北文,7,5分[第68页] 湖南理 15,5分[第115页]	上海理,12,4分[第116页] 安徽文,5,5分[第116页] 安徽理,5,5分[第116页] 海南(宁夏)文,8,5分[第116页] 江苏,17,14分[第116页] 辽宁理,6,5分[第117页] 全国Ⅱ理,19,12分[第71页] 福建文,17,12分 陕西文,21,12分 广东理,4,5分[第117页] 全国Ⅱ文,17,10分
	数列求和	山东理,20,12分[第70页] 浙江文,19,14分[第117页] 安徽理,18,13分[第71页] 大纲全国文,17,10分[第55页] 辽宁理,17,12分[第70页] 课标全国理,17,12分[第118页]	大纲全国Ⅱ文,18,12分 四川理,21,12分[第72页] 山东理,18,12分[第72页]	辽宁文,17,10分 全国Ⅰ理,20,12分 湖北文,19,12分
	数列的综合应用	湖南文,20,13分[第58页] 大纲全国理,20,12分[第69页] 浙江理,19,14分[第70页] 福建理,16,13分[第71页] 天津文,20,14分	天津文,22,14分[第72页] 湖北文,19,12分 江苏,19,16分 安徽文,21,13分	江苏,14,5分 广东文,20,14分 山东文,20,12分
不等式	不等式及其性质	安徽理,19,12分[第119页] 江西理,15,5分[第119页] 辽宁理,9,5分[第120页]	江苏,12,5分[第119页] 安徽文,15,5分[第119页]	天津文,5,5分[第119页]
	一元二次不等式的解法及其应用	山东理,1,5分 福建文,6,5分 浙江理,16,4分 福建文,16,4分	大纲全国Ⅰ理,13,5分 浙江理,15,4分[第120页] 江苏,11,5分 天津理,16,4分 上海文,2,4分	江苏,20,16分 天津理,8,5分[第120页] 江西理,2,5分 安徽文,2,5分
	简单的线性规划问题	课标全国理,13,5分[第102页] 四川理,9,5分 北京文,14,5分 湖南文,14,5分 山东文,7,5分[第102页] 福建理,8,5分 湖北理,8,5分[第120页] 安徽理,4,5分[第121页]	福建理,8,5分[第86页] 辽宁理,14,5分[第89页] 山东理,10,5分[第101页] 四川理,7,5分[第101页] 广东理,19,12分 北京理,7,5分[第121页] 安徽理,13,5分 陕西文,14,5分	湖南理,6,5分[第121页] 浙江理,13,4分 陕西文,14,4分 山东理,12,5分 天津理,2,5分 北京文,11,5分
	基本不等式	上海理,15,5分[第103页] 北京文,7,5分[第103页] 天津文,12,5分 浙江文,16,4分[第113页] 湖南理,10,5分 湖北理,17,12分[第122页] 浙江理,16,5分[第121页] 重庆理,7,5分[第121页]	浙江文,15,4分[第102页] 四川理,12,5分[第102页] 四川文,11,5分[第96页] 重庆理,7,5分[第102页] 山东理,14,4分[第102页] 辽宁理,24,10分[第122页]	天津理,6,5分 重庆文,7,5分[第122页] 天津文,9,5分

注:表中[第×页]表示该题在本书中的页码.

目录

CONTENTS

目录

CONTENTS

目录

CONTENTS

目录

CONTENTS

第一章　解三角形

本章激趣导学

左图展示的是我军海军正在海上执行巡逻任务.我们不禁要问他们怎样在航行途中测量出海上两个岛屿之间的距离？怎样测量出海上航行的轮船的航向与速度？

在实际工作中我们会遇到许多其他的测量问题,如怎样在水平飞行的飞机上测量飞机下方山顶的海拔？怎样测量底部不可到达的建筑物的高度？这些问题的解决需要我们进一步学习任意三角形中边与角之间关系的有关知识.在本章中我们要学习正弦定理和余弦定理,并学习应用这两个定理解三角形以及解决实际测量中的一些问题.通过本章的学习要达到如下要求：

掌握正弦定理、余弦定理,并能解决一些简单的三角形度量问题;能够运用正弦定理、余弦定理等知识和方法解决一些与测量和几何计算有关的实际问题.

1.1　正弦定理和余弦定理

1.1.1　正弦定理

学前要点预览

XUEQIANYAODIANYULAN

知识要点图解

正弦定理
- $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$　常见变式
- 应用
  - 已知两角和任一边,求其他边和角
  - 已知两边和其中一边的对角,求其他边和角
  - 判断三角形的形状

相关知识链接

1.三角形内角和定理

在一个三角形中,各内角和是180°.

2.三角形的边角关系

在三角形中有大边对大角、大角对大边的边角关系.

3.直角三角形中的边角关系

在Rt△ABC中,∠C为直角,∠A所对的边为a,∠B所对的边为b,∠C所对的边为c,则$\sin A=\frac{a}{c}$,$\sin B=\frac{b}{c}$,$a^2+b^2=c^2$.

4.三角形的面积公式

如图1-1-1,在△ABC中,∠A,∠B,∠C的对边分别为a,b,c,h_a,h_b,h_c分别为三边a,b,c上的高,则△ABC的面积$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}a\cdot h_a=\frac{1}{2}b\cdot h_b=\frac{1}{2}c\cdot h_c$.

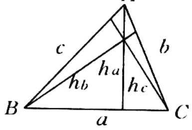


图1-1-1

知识要点精解

ZHISHIYAODIANJINGJIE

重点难点解读

一、三角形面积公式

任意三角形的面积公式为：

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$,

转下页左栏

经典例题诠释

例1　在△ABC中,若$a=2$,$C=\frac{\pi}{4}$,$\cos\frac{B}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,求△$ABC$的面积$S$.

转下页右栏

即任意三角形的面积等于任意两边与它们夹角的正弦的乘积的一半.

示例1　在$\triangle ABC$中,$a=6$,$b=4$,$C=30°$,则$\triangle ABC$的面积是(　　)

A. 12　　B. 6　　C. $12\sqrt{3}$　　D. $8\sqrt{3}$

解析:$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C$,

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times6\times4\times\sin 30°=6$.

答案:B

二、正弦定理

在一个三角形中,各边和它所对角的正弦的比相等,即$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

注意:(1)正弦定理的理解

①适用范围:正弦定理对任意三角形都成立.

②结构形式:是分子为边长、分母为该边所对角的正弦的比的连等式.

③三角形中边角的不等关系:

若$A>B>C$,可得$a>b>c$,则$\sin A>\sin B>\sin C$;

若$\sin A>\sin B>\sin C$,可得$a>b>c$,则$A>B>C$.

(2)正弦定理的推论

①$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$($R$为三角形外接圆的半径).

②$a=2R\sin A$,$b=2R\sin B$,$c=2R\sin C$.

③$\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}$,$\frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}$,$\frac{a}{c}=\frac{\sin A}{\sin C}$.

④$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$.

⑤$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}$.

示例2　有关正弦定理的叙述:

①正弦定理只适用于锐角三角形;

②正弦定理不适用于直角三角形;

③在某一确定的三角形中,各边与它所对角的正弦的比是一定值;

④在$\triangle ABC$中,$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$.

其中正确的个数是(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

解析:因为正弦定理适用于任意三角形,故①②不正确;由正弦定理的推论知$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$,若三角形确定,则其外接圆半径$R$为定值,故③④正确,因此选B.

答案:B

三、正弦定理的应用

1. 解三角形的概念

一般地,我们把三角形的各内角及它们所对的边叫做三角形的元素.任何一个三角形都有六个元素:三条边(a,b,c)和三个内角(A,B,C).在三角形中,已知三角形的几个元素求其他元素的过程叫做解三角形.

转下页左栏

解题提示:根据$\cos\frac{B}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$可以利用二倍角公式求出$\cos B$的值,从而得出$\sin B$.由角$B$、$C$的正、余弦可求$\sin A$.由$\sin A$、$\sin C$及边长$a$用正弦定理可求$c$,从而面积$S$易求.

解:$\because \cos\frac{B}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,$\therefore \cos B=2\cos^2\frac{B}{2}-1=\frac{3}{5}$.

$\therefore \sin B=\frac{4}{5}$.

$\because C=\frac{\pi}{4}$,

$\therefore \sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C=\frac{7\sqrt{2}}{10}$.

$\because \frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$,$\therefore c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{2}{\frac{7\sqrt{2}}{10}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{10}{7}$.

$\therefore S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times2\times\frac{10}{7}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{7}$.

点评:解决本题的关键是合理利用正弦定理,并注意三角恒等变换知识的运用.

例2　在$\triangle ABC$中,已知$c=10$,$A=45°$,$C=30°$,解这个三角形.

解:$\because A=45°$,$C=30°$,$\therefore B=180°-A-C=105°$.

由$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$,得$a=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{10\times\sin 45°}{\sin 30°}=10\sqrt{2}$.

由$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$,得

$b=\frac{c\sin B}{\sin C}=\frac{10\times\sin 105°}{\sin 30°}=20\sin 75°$.

$\because \sin 75°=\sin(30°+45°)=\sin 30°\cos 45°+\cos 30°\cdot\sin 45°=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$,$\therefore b=20\times\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}=5\sqrt{2}+5\sqrt{6}$.

例3　在$\triangle ABC$中,已知$a=\sqrt{2}$,$b=2$,$A=30°$,解这个三角形.

解题提示:本题考查正弦定理,已知两边和其中一边的对角,求另外的边和角,可利用正弦定理结合三角形内角和定理解决.

解:由$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,得$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{2\sin 30°}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\because a<b$,$\therefore B>A=30°$.$\therefore B$为锐角或钝角.

$\therefore B=45°$或$B=135°$.

(1)当$B=45°$时,

$C=180°-(A+B)=180°-(30°+45°)=105°$.

$\because \frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}$,

$\therefore c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{\sqrt{2}\sin 105°}{\sin 30°}=\frac{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}+1$.

(2)当$B=135°$时,

$C=180°-(A+B)=180°-(30°+135°)=15°$.

$\therefore c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{\sqrt{2}\sin 15°}{\sin 30°}=\frac{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}-1$.

转下页右栏

2. 正弦定理在解三角形中的应用

公式$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$反映了三角形的边角关系.

由正弦定理的推导过程知，该公式实际表示：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，上述的每个公式都表示三角形的两内角和它们的对边的关系，对于每一个等式，可知三求一，于是正弦定理可解决两类解三角形问题：

(1)已知两角和任一边，求另两边和另一角；

(2)已知两边和其中一边的对角，求其他边和角.

示例 3　在△ABC中，已知$c=\sqrt{6}$，$A=45°$，$a=2$，解这个三角形.

解：∵ $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，∴ $\sin C=\frac{c\sin A}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

由$\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$及三角函数的定义得$C=60°$或$C=120°$.

∴ 当$C=60°$时，$B=75°$，$b=\frac{c\sin B}{\sin C}=\frac{\sqrt{6}\sin 75°}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{3}+1$；

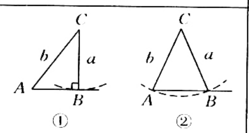
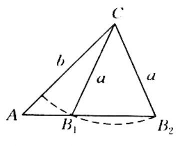
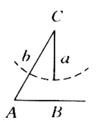
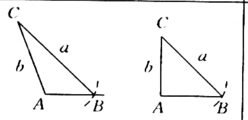
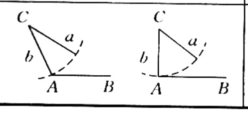
当$C=120°$时，$B=15°$，$b=\frac{c\sin B}{\sin C}=\frac{\sqrt{6}\sin 15°}{\sin 60°}=\sqrt{3}-1$.

∴ $b=\sqrt{3}+1$，$B=75°$，$C=60°$或$b=\sqrt{3}-1$，$B=15°$，$C=120°$.

四、利用正弦定理确定三角形解的情况

已知三角形两边和其中一边的对角，利用正弦定理求其他边和角时，要注意对解的情况进行判断，这类问题往往有一解、两解、无解三种情况.

在△ABC中，已知a、b和A，以C为圆心，以边长a为半径画弧，此弧与射线AB的公共点(除去顶点A)的个数即为三角形的个数. 解的个数见下表：

	图形	关系式	解的个数
A为锐角		①$a=b\sin A$ ②$a\geqslant b$	一解
		$b\sin A<a<b$	两解
		$a<b\sin A$	无解
A为钝角或直角		$a>b$	一解
		$a\leqslant b$	无解

转下页左栏

综上可得，$B=45°$，$C=105°$，$c=\sqrt{3}+1$或$B=135°$，$C=15°$，$c=\sqrt{3}-1$.

点评：已知三角形的两边和其中一边的对角解三角形时，要注意根据两边和其中一边的对角之间的关系对三角形解的个数进行判断，否则可能导致错误.

例 4　在△ABC中，$A=75°$，$B=45°$，$c=3\sqrt{2}$，求a，b.

解题提示：由$A+B+C=180°$可求出C，再由$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$和$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$求出$a$，$b$.

解：∵ $A=75°$，$B=45°$，∴ $C=180°-(A+B)=60°$.

∵ $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，

∴ $a=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{3\sqrt{2}\sin 75°}{\sin 60°}=2\sqrt{6}\sin 75°$.

∵ $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，∴ $b=\frac{c\sin B}{\sin C}=\frac{3\sqrt{2}\times\sin 45°}{\sin 60°}=2\sqrt{3}$.

∵ $\sin 75°=\sin(45°+30°)=\sin 45°\cos 30°+\cos 45°\cdot\sin 30°=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$，∴ $a=3+\sqrt{3}$.

点评：本题对应的知识点是正弦定理在解三角形中的应用，在解题时应注意三角形内角和公式的应用.

例 5　在△ABC中，角A，B，C的对边分别为a，b，c，$a=4$，$A=30°$，$b=x(x>0)$，判断此三角形解的个数.

解题提示：由于b是不确定的边长，无法知道a与b的大小关系，即无法判断B是锐角还是钝角，这就需要对x的取值分类讨论.

解：当$x\leqslant 4$时，由大边对大角知B为锐角，$\sin B=\frac{x\sin A}{a}\leqslant\frac{1}{2}$，此时三角形有唯一解.

当$4<x<8$时，$\sin B=\frac{x\sin A}{a}$，

∴ $\frac{1}{2}<\sin B<1$，B不一定为锐角，∴ B有两种结果，此时△ABC有两解.

当$x=8$时，$\sin B=1$，则$B=90°$，此时△ABC有一解.

当$x>8$时，$\sin B=\frac{x\sin A}{a}>1$，$B$无解，此时△$ABC$无解.

综上可知：当$x\leqslant 4$或$x=8$时，△ABC有一解；当$4<x<8$时，△ABC有两解；当$x>8$时，△ABC无解.

点评：对已知两边和其中一边的对角的三角形解的情况要熟练掌握，当其中一边不确定时需要分类讨论.

例 6　在△ABC中，$c=3\sqrt{2}+\sqrt{6}$，$C=60°$，求$a+b$的取值范围.

解题提示：本题综合考查三角函数、正弦定理等知识. 利用正弦定理及三角形内角和公式将$a+b$表示为某一个角的三角函数问题解决.

解：∵ $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，

∴ $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sin 60°}=2(\sqrt{2}+\sqrt{6})$.

转下页右栏

注意:也可利用正弦定理 $\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}$ 进行讨论:

①若 $\sin B>1$,则三角形无解;

②若 $\sin B=1$,则三角形有一解;

③若 $\sin B<1$,则可得 B 的两个值,但要通过"三角形内角和定理"或"大边对大角"等三角形的有关性质进行判断.

示例4　下列关于△ABC 的说法正确的是(　　)

A. 若 $a=7,b=14,A=30°$,则 B 有两解

B. 若 $a=30,b=25,A=150°$,则 B 只有一解

C. 若 $a=6,b=9,A=45°$,则 B 有两解

D. 若 $b=9,c=10,B=60°$,则 C 无解

解析:A 项中,由正弦定理得 $\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}=\dfrac{14\times\frac{1}{2}}{7}=1$,所以 $B=90°$,即只有一解,A 项错误;B 项中,由正弦定理得 $\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}=\dfrac{25\times\frac{1}{2}}{30}<1$,又 A 为钝角,故 B 只有一解,B 项正确;C 项中,由正弦定理得 $\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}=\dfrac{9\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{6}>1$,所以 B 不存在,即无解,C 项错误;D 项中,由正弦定理得 $\sin C=\dfrac{c\sin B}{b}=\dfrac{10\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{9}<1$,因为 $b<c,B=60°$,且 $0°<C<180°$,所以 C 有两解,D 项错误.

答案:B

方法技巧归纳

一、利用正弦定理解三角形

利用正弦定理可以解以下两类问题:

(1)已知三角形两角和任意一边,求其他边和角.

已知三角形两角和任意一边,求其他边和角,其基本解法是:若所给边是已知角的对边,可由正弦定理求另一边,再由三角形内角和定理求第三个角,最后由正弦定理求第三边;若所给边不是已知角的对边,先由三角形内角和定理求第三个角,再由正弦定理求另外两边.

(2)已知三角形两边和其中一边的对角,求其他边和角.

已知三角形两边和其中一边的对角,求其他边和角,其基本解法是:先由正弦定理求出另外一条边所对的角,再由三角形内角和定理求出第三个角,最后再由正弦定理求出第三边.

示例5　在△ABC 中,$a=5,B=45°,C=105°$,求边 c.

解:由三角形内角和定理,知

$A=180°-(B+C)=180°-(45°+105°)=30°$.

由正弦定理,有 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$,

$\therefore c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}=5\times\dfrac{\sin 105°}{\sin 30°}$

$=5\times\dfrac{\sin 60°\cos 45°+\cos 60°\sin 45°}{\sin 30°}$

转下页左栏

$\therefore a=2(\sqrt{2}+\sqrt{6})\sin A,b=2(\sqrt{2}+\sqrt{6})\sin B$.

$\therefore a+b=2(\sqrt{2}+\sqrt{6})(\sin A+\sin B)$

$=2(\sqrt{2}+\sqrt{6})[\sin A+\sin(120°-A)]$

$=2(\sqrt{2}+\sqrt{6})\left(\sin A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\dfrac{1}{2}\sin A\right)$

$=2(\sqrt{2}+\sqrt{6})\left(\dfrac{3}{2}\sin A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A\right)$

$=2(\sqrt{6}+3\sqrt{2})\sin(A+30°)$.

$\because 0°<A+B\leqslant 120°$,$\therefore 0°<A<120°$.

$\therefore 30°<A+30°<150°$.$\therefore \dfrac{1}{2}<\sin(A+30°)\leqslant 1$.

$\therefore \sqrt{6}+3\sqrt{2}<a+b\leqslant 2(\sqrt{6}+3\sqrt{2})$.

点评:本题在考查正弦定理的同时考查了三角恒等变换,利用函数的单调性求值域的方法及等价转化思想.

例7　已知在等边△ABC 中,$AB=a$,O 为等边△ABC 的中心,过点 O 的直线交 AB 边于点 M,交 AC 边于点 N,求 $\dfrac{1}{OM^2}+\dfrac{1}{ON^2}$ 的最大值和最小值.

解题提示:本题考查正弦定理及有关函数知识,应把 $\dfrac{1}{OM^2}+\dfrac{1}{ON^2}$ 表示成某一变量的函数,转化为求函数值域问题,引入变量 $\angle AOM=\theta$ 是解题的关键.

解:如图1-1-2,由题意得 $AO=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$,

取 BC 的中点 D,连接 AD,

则 $\angle MAO=\angle NAO=30°$.

设 $\angle MOA=\theta$,则 $60°\leqslant\theta\leqslant 120°$.

在△AON 中,由正弦定理得

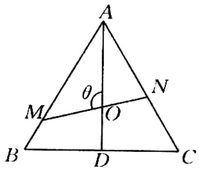


图1-1-2

$\dfrac{ON}{\sin 30°}=\dfrac{AO}{\sin(\theta-30°)}$,$\therefore ON=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{6}a}{\sin(\theta-30°)}$.

在△AOM 中,由正弦定理得 $\dfrac{OM}{\sin 30°}=\dfrac{AO}{\sin(180°-30°-\theta)}$.

$\therefore OM=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{6}a}{\sin(\theta+30°)}$.

$\therefore \dfrac{1}{OM^2}+\dfrac{1}{ON^2}=\dfrac{12}{a^2}[\sin^2(\theta+30°)+\sin^2(\theta-30°)]$

$=\dfrac{12}{a^2}\left[\dfrac{1-\cos(2\theta+60°)}{2}+\dfrac{1-\cos(2\theta-60°)}{2}\right]$

$=\dfrac{12}{a^2}\left(1-\dfrac{1}{2}\cos 2\theta\right)$.

$\because 60°\leqslant\theta\leqslant 120°$,$\therefore 120°\leqslant 2\theta\leqslant 240°$,$\therefore -1\leqslant\cos 2\theta\leqslant-\dfrac{1}{2}$.

故当 $\cos 2\theta=-1$,即 $\theta=90°$ 时,$\dfrac{1}{OM^2}+\dfrac{1}{ON^2}$ 取得最大值 $\dfrac{18}{a^2}$;

当 $\cos 2\theta=-\dfrac{1}{2}$,即 $\theta=60°$ 或 $\theta=120°$ 时,$\dfrac{1}{OM^2}+\dfrac{1}{ON^2}$ 取得最小值 $\dfrac{15}{a^2}$.

点评:函数知识是我们研究取值范围问题和最值问题的有力工具.

例8　在△ABC 中,若 $\sin A=2\sin B\cos C$,且 $\sin^2A=\sin^2B+\sin^2C$,试判断三角形的形状.

解题提示:本题主要考查利用正弦定理判断三角形的形状,可利用正弦定理实行边角互化.

解法一:$\because A$、B、C 为三角形的内角,

转下页右栏

$=\frac{5}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$.

二、利用正弦定理判断三角形的形状

利用三角形中的边角关系，推导出满足题设条件的三角形的形状，其常用方法是：将已知式子都化为角的式子或边的式子再判断，若转化为边的关系式，需要进行因式分解、化简，判断三角形的形状，看是否有两边相等，有三边相等，或是否符合勾股定理；若转化为角的关系式，需用三角函数知识进行三角恒等变换，同时考虑角的范围，看是否有两角相等，三角相等，或是否有一角为直角，从而确定三角形的形状.

示例 6　在$\triangle ABC$中，$\frac{a}{\sin B}=\frac{b}{\sin C}=\frac{c}{\sin A}$，试判断$\triangle ABC$的形状.

解：由正弦定理的推论知$\frac{a}{\frac{b}{2R}}=\frac{b}{\frac{c}{2R}}=\frac{c}{\frac{a}{2R}}$.

$\therefore\ \frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}$，$\therefore\ a=b=c$，

$\therefore\ \triangle ABC$为等边三角形.

三、正弦定理与其他知识的综合应用

在三角形中考查三角变换是近年来高考的热点，它是在新的载体上进行三角变换，因此作为三角形问题，必然要用到三角形内角和定理、正弦定理及三角形的有关性质进行边角转化，有利于发现解决问题的思路. 另外，进行三角变换，常见的变换方法和公式都要熟练掌握.

示例 7　在$\triangle ABC$中，若$C=3B$，求$\frac{c}{b}$的取值范围.

解：由正弦定理可得

$\frac{c}{b}=\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{\sin 3B}{\sin B}=\frac{\sin(B+2B)}{\sin B}=$

$\frac{\sin B\cos 2B+\cos B\sin 2B}{\sin B}=\cos 2B+2\cos^2 B$

$=4\cos^2 B-1$.

$\because\ A+B+C=180^\circ$，$C=3B$，

$\therefore\ 0^\circ<B<45^\circ$. $\therefore\ \frac{\sqrt{2}}{2}<\cos B<1$.

$\therefore\ 1<4\cos^2 B-1<3$. $\therefore\ 1<\frac{c}{b}<3$.

示例 8　在$\triangle ABC$中，求证：$\frac{a^2-b^2}{\cos A+\cos B}+\frac{b^2-c^2}{\cos B+\cos C}+\frac{c^2-a^2}{\cos C+\cos A}=0$.

解题提示：等式的左边既含有边，又含有角，可考虑利用正弦定理进行边角互化.

证明：由正弦定理，得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

$\therefore\ \frac{a^2-b^2}{\cos A+\cos B}=\frac{4R^2\sin^2 A-4R^2\sin^2 B}{\cos A+\cos B}$

$=\frac{4R^2[(1-\cos^2 A)-(1-\cos^2 B)]}{\cos A+\cos B}$

$=\frac{4R^2(\cos^2 B-\cos^2 A)}{\cos A+\cos B}=4R^2(\cos B-\cos A)$.

转下页左栏

$\therefore\ A=\pi-(B+C)$.

$\therefore\ \sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$.

$\because\ \sin A=2\sin B\cos C$，

$\therefore\ \sin B\cos C-\cos B\sin C=0$，即$\sin(B-C)=0$.

$\because\ -\pi<B-C<\pi$，

$\therefore\ B-C=0$. $\therefore\ B=C$. $\therefore\ A=\pi-2B$.

$\therefore\ \sin^2 A=\sin^2 2B$.

$\because\ \sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C=2\sin^2 B$，

$\therefore\ \sin^2 2B=2\sin^2 B$. $\therefore\ 2\sin B\cos B=\sqrt{2}\sin B$.

$\therefore\ \cos B=\frac{\sqrt{2}}{2}$. $\therefore\ B=\frac{\pi}{4}$. $\therefore\ C=\frac{\pi}{4}$，$A=\frac{\pi}{2}$.

$\therefore\ \triangle ABC$为等腰直角三角形.

解法二：由正弦定理，得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

$\because\ \sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C$，$\therefore\ a^2=b^2+c^2$.

$\therefore\ A=\frac{\pi}{2}$，$B+C=\frac{\pi}{2}$. $\because\ \sin A=2\sin B\cos C$，

$\therefore\ 1=2\sin^2 B$. $\therefore\ \sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore\ B=\frac{\pi}{4}$，

$\therefore\ \triangle ABC$为等腰直角三角形.

点评：正弦定理可以帮助进行三角形中边角关系的转化，具体到某一问题究竟如何转化应根据已知条件的特点去分析、确定.

例 9　在$\triangle ABC$中，已知$a^2\tan B=b^2\tan A$，试判断三角形的形状.

解题提示：此题主要考查正弦定理，在判断$\triangle ABC$的形状时，首先将$\tan B$，$\tan A$化弦为$\frac{\sin B}{\cos B}$，$\frac{\sin A}{\cos A}$，再将正弦定理变形式$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$代入即可.

解：由已知得$\frac{a^2\sin B}{\cos B}=\frac{b^2\sin A}{\cos A}$，

$\therefore\ \frac{4R^2\sin^2 A\sin B}{\cos B}=\frac{4R^2\sin A\sin^2 B}{\cos A}$.

$\therefore\ \sin A\cos A=\sin B\cos B$. $\therefore\ \sin 2A=\sin 2B$.

$\therefore\ 2A=2B$或$2A+2B=180^\circ$.

$\therefore\ A=B$或$A+B=90^\circ$.

$\therefore\ \triangle ABC$为等腰三角形或直角三角形.

点评：(1)正弦定理既可以化边为角，又可以化角为边，在判断$\triangle ABC$的形状时，还经常与三角函数知识结合起来应用.

(2)注意此题得到$\sin 2A=\sin 2B$后的讨论，它是基于三角形各角在$(0,\pi)$内得到的.

例 10　在$\triangle ABC$中，A，B，C所对的边分别为a，b，c，向量$\boldsymbol{m}=(\cos A,1)$，$\boldsymbol{n}=(1,1-\sqrt{3}\sin A)$，且$\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$.

(1)求A的大小；

(2)若$b+c=\sqrt{3}a$，求B，C的大小.

解题提示：(1)由$\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$求得角$A$的相关三角函数值，再求得角$A$的值；(2)由正弦定理，将已知条件$b+c=\sqrt{3}a$中边的关系转化为角的关系，再利用三角形内角和定理求解.

解：(1)因为$\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$，

所以$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=\cos A+1-\sqrt{3}\sin A=2\cos\left(A+\frac{\pi}{3}\right)+1=0$，

所以$\cos\left(A+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$.

因为$A\in(0,\pi)$，所以$A+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)$，

所以$A+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$，所以$A=\frac{\pi}{3}$.

(2)由$b+c=\sqrt{3}a$及正弦定理，得$\sin B+\sin C=\sqrt{3}\sin A$.

又$A=\frac{\pi}{3}$，$C=\pi-A-B=\frac{2\pi}{3}-B$，

所以$\sin B+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)=\frac{3}{2}$，

转下页右栏

同理$\frac{b^2-c^2}{\cos B+\cos C}=4R^2(\cos C-\cos B)$，

$\frac{c^2-a^2}{\cos C+\cos A}=4R^2(\cos A-\cos C)$.

∴ $\frac{a^2-b^2}{\cos A+\cos B}+\frac{b^2-c^2}{\cos B+\cos C}+\frac{c^2-a^2}{\cos C+\cos A}=4R^2(\cos B-\cos A+\cos C-\cos B+\cos A-\cos C)=0$.

∴ 等式成立.

点评：在三角形中，解决有关含有边角关系的问题时常运用正弦定理化边为角，然后利用三角函数知识解决.

即$\frac{3}{2}\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B=\frac{3}{2}$，所以$\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为$B\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$，所以$B+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$，

所以$B+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$或$\frac{2}{3}\pi$，

所以$B=\frac{\pi}{6}$或$\frac{\pi}{2}$，

所以$C=\pi-A-B=\frac{\pi}{2}$或$\frac{\pi}{6}$.

点评：平面向量与解三角形的结合、解三角形与三角函数的结合等体现了知识的交汇，这类问题的求解既是对知识掌握情况的检验，也是能力的体现. 向量相关性质的应用往往是解三角形问题的关键.

本节提升训练

BENJIETISHENGXUNLIAN

[答案见第157页]

1. 在$\triangle ABC$中，一定成立的等式是(　　)　←要点二

A. $a\sin A=b\sin B$　　B. $a\cos A=b\cos B$

C. $a\sin B=b\sin A$　　D. $a\cos B=b\cos A$

2. 以下关于正弦定理的叙述和变形错误的是(　　)　←要点二

A. 在$\triangle ABC$中，$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

B. 在$\triangle ABC$中，$\sin 2A=\sin 2B$，则$a=b$

C. 在$\triangle ABC$中，$\sin A>\sin B\Leftrightarrow A>B$

D. 在$\triangle ABC$中，$\frac{a}{\sin A}=\frac{b+c}{\sin B+\sin C}$

3. 在$\triangle ABC$中，$a=6$，$B=30°$，$C=120°$，则$\triangle ABC$的面积是(　　)　←要点一

A. 9　　B. 8　　C. $9\sqrt{3}$　　D. $18\sqrt{3}$

4. 在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=120°$，AD为角A的平分线，$AC=3$，$AB=6$，则AD的长是(　　)　←要点三

A. 2　　B. 2或4

C. 1或2　　D. 5

5. 设$\triangle ABC$的内角A,B,C所对的边分别为a,b,c，若$a\cos A=b\cos B$，那么$\triangle ABC$一定是(　　)　←方法技巧二

A. 等腰三角形

B. 直角三角形

C. 等腰直角三角形

D. 等腰三角形或直角三角形

6. 在$\triangle ABC$中，$A=60°$，$BC=3$，则$\triangle ABC$的两边$AC+AB$的取值范围是(　　)　←要点三

A. $[3\sqrt{3},6]$　　B. $(2,4\sqrt{3})$

C. $(3\sqrt{3},4\sqrt{3}]$　　D. $(3,6]$

7. 在$\triangle ABC$中，内角A,B,C的对边分别为a,b,c，向量$\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},-1)$，$\boldsymbol{n}=(\cos A,\sin A)$，若$\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$，且$a\cos B+b\cos A=c\sin C$，则角$A,B$的大小分别为(　　)　←方法技巧三

A. $\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{6}$

C. $\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}$　　D. $\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}$

要点三→ 8. 已知在$\triangle ABC$中，$A:B:C=1:2:3$，$a=1$，则$\frac{a-2b+c}{\sin A-2\sin B+\sin C}=$________.

方法技巧一→ 9. 在$\triangle ABC$中，$A=60°$，$B=45°$，$c=1$，则此三角形的最小边长为________.

要点四→ 10. 在$\triangle ABC$中，$a=x$，$b=2$，$B=45°$，若$\triangle ABC$只有一解，则x的取值为________.

要点一→ 11. 在$\triangle ABC$中，$AB=\sqrt{3}$，$AC=1$，$B=30°$，则$\triangle ABC$的面积$S_{\triangle ABC}=$________.

方法技巧二→ 12. 在$\triangle ABC$中，已知$3b=2\sqrt{3}a\sin B$，且$\cos B=\cos C$，角A是锐角，则$\triangle ABC$的形状是________.

方法技巧三→ 13. 在$\triangle ABC$中，若向量$\boldsymbol{m}=(2\sin B,2-\cos 2B)$，$\boldsymbol{n}=\left(2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{B}{2}\right),-1\right)$，$\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$.

(1)求角B的大小；

(2)若$a=\sqrt{3}$，$b=1$，求c的值.

方法技巧二→ 14. 在$\triangle ABC$中，已知$\frac{a+b}{a}=\frac{\sin B}{\sin B-\sin A}$，且$\cos(A-B)+\cos C=1-\cos 2C$.

(1)试确定$\triangle ABC$的形状；

(2)求$\frac{a+c}{b}$的取值范围.

要点三→ 15. **(2011·大纲全国高考)**$\triangle ABC$的内角A、B、C的对边分别为a、b、c. 已知$A-C=90°$，$a+c=\sqrt{2}b$，求C.

方法技巧三→ 16. **(2009·安徽高考)**在$\triangle ABC$中，$\sin(C-A)=1$，$\sin B=\frac{1}{3}$.

(1)求$\sin A$的值；

(2)设$AC=\sqrt{6}$，求$\triangle ABC$的面积.

1.1.2　余弦定理

学前要点预览

XUEQIANYAODIANYULAN

知识要点图解

- 余弦定理
  - 定理
    - $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$
    - $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$　推论
    - $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$
  - 应用
    - 已知三角形的三边,求三角形的三个内角
    - 已知三角形的两边和其中一边的对角,求其他边和角

相关知识链接

1. 勾股定理

在 $Rt\triangle ABC$ 中,$\angle C$ 为直角,$\angle A$ 所对的边 BC 长为 a,$\angle B$ 所对的边 AC 长为 b,$\angle C$ 所对的边 AB 长为 c,则 $a^2+b^2=c^2$.

2. 正弦定理

在一个三角形中,各边和它所对角的正弦的比相等,即 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

3. 正弦定理的变形公式

(1)$a=2R\sin A,b=2R\sin B,c=2R\sin C$;

(2)$\sin A=\frac{a}{2R},\sin B=\frac{b}{2R},\sin C=\frac{c}{2R}$.

知识要点精解

ZHISHIYAODIANJINGJIE

重点难点解读

一、余弦定理

三角形中任何一边的平方等于其他两边的平方的和减去这两边与它们的夹角的余弦的积的两倍,即

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$,

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

推论:$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$,

$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$,

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

注意:(1)对余弦定理的探究

①余弦定理指明了任意三角形的三边与其中一角的具体关系,因此也是解三角形的重要工具.

②在余弦定理中,每一个等式中都包含四个量,因此,已知其中三个量,利用方程思想可以求得未知量.

(2)勾股定理与余弦定理的联系

①勾股定理指出了直角三角形中三边之间的平方关系,余弦定理则指出了一般三角形中三边平方之间的关系.

②由余弦定理和余弦函数的性质可以看出:

a. 如果一个三角形两边的平方和等于第三边的平方,那么第三边所对的角是直角;

b. 如果一个三角形两边的平方和小于第三边的平方,那么第三边所对的角是钝角;

c. 如果一个三角形两边的平方和大于第三边的平方,那么第三边所对的角是锐角.

由上可知,余弦定理是用准确的量化关系去解决问题,即用边长去判断三角形的形状,因此,勾股定理是余弦定理的特例,余弦定理是勾股定理的推广.

转下页左栏

经典例题诠释

例 1　已知⊙O 的半径为 R,在它的内接$\triangle ABC$ 中有 $2R(\sin^2A-\sin^2C)=(\sqrt{2}a-b)\sin B$ 成立,求角 C 的大小.

解题提示:利用正、余弦定理化简已知条件中的式子,确定角 C.

解:由正弦定理的推论,得 $a=2R\sin A,b=2R\sin B,c=2R\sin C$.

$\because$ $2R(\sin^2A-\sin^2C)=(\sqrt{2}a-b)\sin B$,

$\therefore$ $(2R)^2(\sin^2A-\sin^2C)=2R(\sqrt{2}a-b)\sin B$.

$\therefore$ $a^2-c^2=(\sqrt{2}a-b)b$,即 $a^2+b^2-c^2=\sqrt{2}ab$.

$\because$ $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$,$\therefore$ $\cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\because$ $0°<C<180°$,$\therefore$ $C=45°$.

点评:已知一个有边、有三角函数的关系式时,一般可考虑利用正弦定理或余弦定理实行边角互化.

例 2　已知在$\triangle ABC$ 中,$a=7,b=3,c=5$,求最大角和 $\sin C$.

解题提示:本题考查余弦定理的简单应用.在$\triangle ABC$ 中,由大边对大角知 A 为最大角.求 $\sin C$ 可利用正弦定理解决.

解:$\because$ $a>c>b$,$\therefore$ A 为最大角.

$\because$ $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,

$\therefore$ $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{3^2+5^2-7^2}{2\times3\times5}=-\frac{1}{2}$.

$\because$ $0°<A<180°$,$\therefore$ $A=120°$.

$\because$ $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$,

$\therefore$ $\sin C=\frac{c\sin A}{a}=\frac{5\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{7}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$.

转下页右栏

示例1　在$\triangle ABC$中,设角A,B,C的对边分别为a,b,c,且$\cos A=\frac{1}{4}$.若$a=4$,$b+c=6$且$b<c$,求b,c的值.

解:由余弦定理,得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,即$a^2=(b+c)^2-2bc-2bc\cos A$.∴ $16=36-\frac{5}{2}bc$,∴ $bc=8$.

由$\begin{cases}b+c=6,\\bc=8,\\b<c,\end{cases}$　得$\begin{cases}b=2,\\c=4.\end{cases}$

二、余弦定理在解三角形中的应用

1.已知三角形的三边解三角形

已知三角形的三边解三角形的方法如下:先利用余弦定理求出一个角的余弦,从而求出第一个角;再利用余弦定理,或由求得的第一个角,利用正弦定理求出第二个角;最后利用三角形内角和定理求出第三个角.

2.已知三角形的两边及其夹角解三角形

已知三角形的两边及其夹角解三角形的方法如下:先利用余弦定理求出第三边,其余角的求解有两种思路:一是利用余弦定理的推论求出其余角;二是利用正弦定理(已知两边和一边的对角)求解.

若用正弦定理求解问题时,需对角的取值进行取舍,而余弦定理就不存在这些问题(因为在$(0,\pi)$上,余弦值所对的角是唯一的),故用余弦定理求解较好.

3.已知三角形的两边及其中一边的对角解三角形

已知三角形的两边及其中一边的对角解三角形的方法如下:可根据余弦定理列一元二次方程求出第三边(注意边的取舍),再利用正弦定理求其他两个角;也可以由正弦定理求出第二个角(注意角的取舍),再利用三角形内角和定理求出第三个角,最后再应用正弦定理求出第三边.

4.利用余弦定理解三角形时应注意的问题

(1)由于余弦函数在区间$(0,\pi)$内是单调的,因此由余弦定理的推论可知,已知三角形三边长,或已知三角形三边长的比,就能唯一确定这个三角形三个内角的大小.

(2)余弦定理中边长是平方的关系,因此,利用余弦定理求边长,实质是解一元二次方程.如已知a,b,A,由余弦定理有$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,即$c^2-(2b\cos A)c+(b^2-a^2)=0$,则边长$c$的值即是方程的根,但个数不确定.解题时,应根据已知条件对方程的根进行取舍.

示例2　在$\triangle ABC$中,$a=2$,$b=2\sqrt{2}$,$C=15°$,求A.

解:由余弦定理,得$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$,

∴ $c^2=2^2+(2\sqrt{2})^2-2\times2\times2\sqrt{2}\times\cos 15°=4+8-8\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=8-4\sqrt{3}$.∴ $c=\sqrt{6}-\sqrt{2}$.

∴ $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2-2^2}{2\times2\sqrt{2}\times(\sqrt{6}-\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

∴ $A=30°$.

示例3　在$\triangle ABC$中,已知角A,B,C所对的边分别为a,b,c,若$a=2\sqrt{3}$,$b=\sqrt{6}$,$A=45°$,求边长c.

解法一:在$\triangle ABC$中,根据余弦定理可得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,即$c^2-2\sqrt{3}c-6=0$,所以$c=\sqrt{3}\pm3$.

因为$c>0$,所以$c=\sqrt{3}+3$.

转下页左栏

∴ 最大角$A=120°$,$\sin C=\frac{5\sqrt{3}}{14}$.

点评:求$\sin C$时也可利用余弦定理先求$\cos C$,再根据平方关系求$\sin C$.由此可见在解三角形时,既可使用正弦定理,又可使用余弦定理,有时正、余弦定理还可结合使用.

例3　在$\triangle ABC$中,角A,B,C所对的边分别为a,b,c.已知$a=2.730$,$b=3.696$,$C=82°28'$,解这个三角形.(边长保留四个有效数字,角度精确到$1'$)

解题提示:先根据条件用余弦定理求出边c,再用余弦定理的推论及三角形内角和定理求角A,B.

解:由余弦定理,得$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=2.730^2+3.696^2-2\times2.730\times3.696\times\cos 82°28'$,

∴ $c\approx4.297$.

∵ $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\approx\frac{3.696^2+4.297^2-2.730^2}{2\times3.696\times4.297}\approx0.7767$,

∴ $A\approx39°2'$.

∴ $B\approx180°-(A+C)=180°-(39°2'+82°28')=58°30'$.

点评:本题用余弦定理求出边c后,也可利用正弦定理求$\sin A$,但要根据已知条件中的边角关系,对A的值作出判断,避免产生增根.

例4　已知在$\triangle ABC$中,$b=3$,$c=3\sqrt{3}$,$B=30°$,解这个三角形.

解题提示:题目已知两边和一边的对角,要求另一边和其他角,可首先由正弦定理求出C,然后再求其他的边和角.也可由余弦定理列出关于边a的方程,首先求出边a,再由正弦定理求A、C.

解法一:由$b<c$,$B=30°$,$b>c\sin 30°=\frac{3\sqrt{3}}{2}$,知本题有两解.

∵ $\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}$,∴ $\sin C=\frac{c\sin B}{b}=\frac{3\sqrt{3}\times\frac{1}{2}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

∴ $C=60°$或$C=120°$.

(1)当$C=60°$时,$A=90°$,由勾股定理,得$a=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{3^2+(3\sqrt{3})^2}=6$.

(2)当$C=120°$时,$A=30°$,$\triangle ABC$为等腰三角形,

∴ $a=3$.

解法二:由余弦定理,得$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$.

∴ $3^2=a^2+(3\sqrt{3})^2-2\times3\sqrt{3}a\cos 30°$,

即$a^2-9a+18=0$,∴ $a=6$或$a=3$.

(1)当$a=6$时,由正弦定理,得$\sin A=\frac{a\sin B}{b}=\frac{6}{3}\times\frac{1}{2}=1$,

∴ $A=90°$,$C=60°$.

(2)当$a=3$时,$A=30°$,$C=120°$.

点评:解法一是由正弦定理先求角再求边,解法二是由余弦定理先求边再求角.从以上两种解法可以看出正弦定理与余弦定理的相通性.

转下页右栏

解法二:在$\triangle ABC$中,由正弦定理,得

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}.$$

因为$b<a$,所以$B<A$,

所以$B=30^\circ$,$C=180^\circ-A-B=105^\circ$,

所以$\sin C=\sin 105^\circ=\sin(45^\circ+60^\circ)=\sin 45^\circ\cos 60^\circ+\cos 45^\circ\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$,故$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{3}+3$.

三、正弦定理、余弦定理在解三角形中的应用

正弦定理和余弦定理都反映了三角形中边与角的关系,用它们解三角形时有以下几类:

(1)已知三角形的两边和其中一边的对角,解三角形.基本解法是先由正弦定理求出另一条边所对的角,再用三角形内角和定理求出第三个角,最后用正弦定理求出第三边,注意判断解的个数.

(2)已知三角形的两角和任一边,解三角形.基本解法是若所给边是已知角的对边时,可由正弦定理求另一边,再由三角形内角和定理求出第三个角,最后由正弦定理求出第三边.若所给边不是已知角的对边时,先由三角形内角和定理求出第三个角,再由正弦定理求出另外两边.

(3)已知两边和它们的夹角,解三角形.基本解法是先用余弦定理求第三边,再用正弦定理或余弦定理求另一角,最后用三角形内角和定理求第三个角.

(4)已知三角形的三边,解三角形.基本解法是先用余弦定理求出一个角,再用正弦定理或余弦定理求出另一个角,最后用三角形内角和定理求出第三个角.

从以上分析可以看出,在解三角形过程中,有时求某一个角时既可用正弦定理,又可用余弦定理,各有长处.应用余弦定理运算可能较复杂,但在$(0,\pi)$上角与其余弦值是一一对应的,所以不需要分类讨论;而应用正弦定理时运算量小,但由于在$(0,\pi)$上正弦值与角并非一一对应,所以往往需要分类讨论.而已知三角形的两边及一边的对角时,可以用正弦定理求解,也可以用余弦定理并结合正弦定理求解.

方法技巧归纳

一、正、余弦定理的综合应用

在解三角形时,常常将正、余弦定理结合在一起使用,要注意恰当选取定理,简化运算过程,提高解题速度.同时,要注意与平面几何中的有关性质、定理结合起来,挖掘题目中的隐含条件.解题时要综合、灵活地运用这两个定理,认真分析已知条件,结合三角形的有关性质(如大角对大边,大边对大角,三角形内角和定理等),并注意数形结合,防止出现漏解或增解的情况.

示例4　在$\triangle ABC$中,$C=2A$,$a+c=10$,$\cos A=\frac{3}{4}$,求b.

解:由正弦定理,得$\frac{c}{a}=\frac{\sin C}{\sin A}=\frac{\sin 2A}{\sin A}=2\cos A$.

$\because \cos A=\frac{3}{4}$,$\therefore \frac{c}{a}=\frac{3}{2}$.

转下页左栏

例5　如图1-1-3,$\angle MON=60^\circ$,Q是$\angle MON$内一点,它到两边的距离分别是2和11,求QO的长.

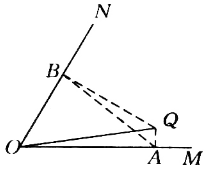


图1-1-3

解题提示:由已知可知O、A、Q、B四点在以OQ为直径的圆上,所以OQ即为$\triangle AQB$外接圆的直径,可考虑利用正弦定理的推论:$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$求解.

解:如图1-1-3,作$QA\perp OM$于点A,$QB\perp ON$于点B,则$QA=2$,$QB=11$,并且O、A、Q、B四点在以OQ为直径的圆上.

$\because \angle AOB=60^\circ$,

$\therefore \angle AQB=120^\circ$,连接$AB$.

在$\triangle AQB$中,由余弦定理,得

$AB^2=AQ^2+BQ^2-2AQ\cdot BQ\cos\angle AQB=2^2+11^2-2\times2\times11\times\left(-\frac{1}{2}\right)=147$.

$\therefore AB=\sqrt{147}=7\sqrt{3}$.

在$\triangle AQB$中,由正弦定理,得

$$OQ=2R=\frac{AB}{\sin\angle AQB}=\frac{7\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=14.$$

$\therefore OQ$的长为14.

点评:解决本题的关键是由$AQ\perp OA$、$BQ\perp OB$得出O、A、Q、B四点共圆,从而将OQ的长转化为$\triangle ABQ$外接圆的直径.

例6　在$\triangle ABC$中,角A,B,C的对边分别为a,b,c,求证:$\frac{a^2-b^2}{c^2}=\frac{\sin(A-B)}{\sin C}$.

解题提示:要证的等式中既有三角形的边,又有角,应考虑利用正、余弦定理进行边角互化,但是利用正弦定理还是利用余弦定理是解题的关键.

证明:在$\triangle ABC$中,由正弦定理的推论:$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$,得$a=2R\sin A$,$b=2R\sin B$,$c=2R\sin C$.

由余弦定理,得

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac},$$

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},$$

$$\therefore 右边=\frac{\sin(A-B)}{\sin C}=\frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)}$$

$$=\frac{\sin A\cos B-\cos A\sin B}{\sin A\cos B+\cos A\sin B}$$

$$=\frac{a\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}-b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{a\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}$$

转下页右栏