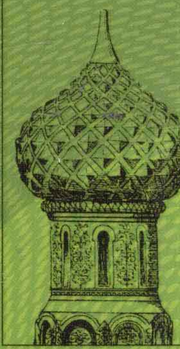


吉米多维奇数学分析习题集学习指引

(第三册)

□ 谢惠民 沐定夷 编著
□ 卫瑞霞 吴茂庆 审校

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

吉米多维奇
数学分析习题集
学习指引

(第三册)

□ 谢惠民　沐定夷　编著
□ 卫瑞霞　吴茂庆　审校

JIMIDUOWEIQI SHUXUE FENXI XITIJI XUEXI ZHIYIN

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容简介

《吉米多维奇数学分析习题集》是最为经典的微积分习题集，自20世纪50年代引进以来，对我国半个多世纪的微积分和高等数学的教与学产生了重大的影响。本书是为该习题集的俄文2010年版的中译本编写的学习指引。全书分三册出版，第一册为分析引论和一元微分学，第二册为一元积分学与级数，第三册为多元微积分。

本书通过对习题集中的部分典型习题的讲解与分析，由浅入深、分层次、分类型地介绍微积分的解题思路，讲道理、讲方法，揭示出习题集中的丰富多彩的内容和结构，特别注重一法多用、一题多解和发展几何直观的形象思维，同时通过补注、命题等多种方式补充介绍与习题有关的背景知识和联系，不回避任何难点，为读者更有效地利用该习题集掌握微积分的基本功提供适当的帮助。

本书适用于正在学习微积分的大学生和需要提高自己数学水平与能力的各类自学者，对于讲授微积分或高等数学的教师和准备考研的学生也有参考价值。

图书在版编目（CIP）数据

吉米多维奇数学分析习题集学习指引. 第3册 / 谢惠民，沐定夷编著 .—北京：高等教育出版社，2011.7

ISBN 978-7-04-032293-4

Ⅰ.①吉… Ⅱ.①谢… ②沐… Ⅲ.①数学分析-高等学校-题解 Ⅳ.① O17-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第126021号

策划编辑 赵天夫　　责任编辑 李 鹏　　封面设计 王凌波　　责任印制 朱学忠

出版发行 高等教育出版社
社　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印　刷 涿州市星河印刷有限公司
开　本 787×1092 1/16
印　张 24.25
字　数 570 000
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
http://www.landraco.com.cn
版　次 2011年7月第1版
印　次 2011年7月第1次印刷
定　价 39.00元

物 料 号 32293-00

使用说明

《学习指引》的第三册对应于《吉米多维奇数学分析习题集》(以下简称为《习题集》) 的第六章、第七章和第八章, 即从多元函数微分学、含参变量的积分到多元函数积分学.

与本书的前两册相同, 由于很多节内的习题量相当大, 含有不同的内容和层次, 因此在大多数节中, 都将习题分成若干小节. 例如 §8.17.7 就是第八章第 17 节的第 7 小节. 在引用前两册时, 请注意第一册对应于《习题集》的第一、二章, 而第二册则对应于《习题集》的第三、四、五章. 例如 §1.4.7, §2.3 在第一册中, 而 §3.6.4, §4.6 和 §5.2.1 则在第二册中.

这样的安排也会带来一些不便, 这就是在节内的各个小节之间的习题顺序与原有的题号顺序不完全一致. 为了方便读者对习题的检索, 本书的目录中在每一节和每一小节的标题后都在括号内标明它们所覆盖的习题编号.

本书在各节或各小节所覆盖的习题中只能选取部分习题作讲解或分析. 在解答时, 无论是计算题还是证明题一律用"**解**"开始. 在交叉引用前后的习题时, 如果它在本书有讲解, 则会指明所在的节或小节. 否则, 一般会简述其内容, 至于该题的完整叙述则请看《习题集》的全译本.

在某几节的最后, 本书会添加一小节, 称为补注, 其中包含对某些难题的解、对某些内容的注解和补充. 由于在多元函数的微积分学中的许多问题的进一步引申将直接导致偏微分方程、泛函分析和现代分析的许多领域, 我们在多数情况下只限于列出有关的参考文献, 因此在第三册中的补注小节的数量要比前两册少得多.

根据需要, 本书还增加了若干命题和少量例题, 其中命题按章编号, 例题不独立编号. 第三册在正文后设置一个附录, 其中列出前面所有命题的内容和页码.

本书的编写中利用了大量的参考资料. 在参考文献中只列出第三册引用到的书籍. 对于引用的论文, 只在引用处写明其所在杂志、标题、页码和年份.

本书采取以下常用的数学记号:

(1) 用 $\mathbb{N}$ 表示全体正整数, 用 $\mathbb{Z}$ 表示全体整数, 用 $\mathbb{Q}$ 表示全体有理数, 用 $\mathbb{R}$ 表示全体实数. 用 $\mathbb{R}^n$ 表示 n 维的欧几里得空间.

(2) 设 P, Q 为命题, 用 $P \iff Q$ 表示 P 与 Q 等价; 用 $P \Longrightarrow Q$ 表示若 P 成立, 则 Q 成立.

(3) 用记号" $\square$ "表示解、分析和证明等的结束.

最后还要指出, 在第三册的编写中广泛地应用了高等代数 (即线性代数) 中的知识. 这不仅简化了许多习题的求解, 实际上在很多情况下也只有如此才能揭示有关问题的核心所在. 考虑到多数读者在学习多元微积分之前已经学过有关的矩阵向量知识, 因此若有"学而时习之"的机会是件好事.

目　录

第六章 多元函数微分学

内容简介 这一章是多元函数的微分学, 从多元函数的极限、连续概念开始, 直到多元泰勒公式和极值计算.

§6.1 函数的极限. 连续性 (习题 3136–3210)

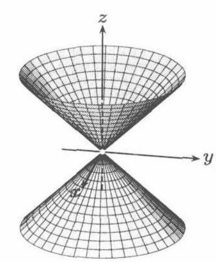
内容简介 本节的习题除了多元函数的定义域和等值线 (等值面) 计算外, 主要是学习累次极限和多重极限的计算, 以及多元函数的连续性和一致连续性.

6.1.1 多元函数的定义域、等值线和等值面 (习题 3136–3170)

习题 3136–3150 均为给定多元函数的表达式后求其自然定义域. 这是一元函数的相应概念的推广. 对于 n 元函数 $u=f(x_1,\cdots,x_n)$ 而言, 即是要求出 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的集合 $\mathscr{D}$, 使得函数 f 在此集合上取实数值. 称此集合 $\mathscr{D}$ 为函数 f 的自然定义域.

下面看一个例子.

习题 3148 确定并画出 $u=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 的定义域.



习题 3148 的附图

解 u 是三元函数. 从它的表达式可见首先要求 x,y 不能同时为 0, 然后根据反余弦函数的定义, 必须要求 $|z|\leqslant\sqrt{x^2+y^2}$, 于是其定义域为

$$\mathscr{D}=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\neq 0, z^2\leqslant x^2+y^2\}.$$

如附图所示, 即包含圆锥面 $z^2=x^2+y^2$ 及其以外的区域, 但要去掉圆锥的顶点, 即原点. □

对于二元函数 $z=f(x,y)$, 设其定义域为 $\mathscr{D}$, 值域为 $\mathscr{R}=f(\mathscr{D})$, 则对于实数 $c\in\mathscr{R}$, 集合

$$S_c=\{(x,y)\in\mathscr{D}\mid f(x,y)=c\}\ (\subset\mathbb{R}^2)$$

非空. 我们将 S_c 称为函数 f 取值为 c 的等值线 (也称为等位线等), 简记为 $f=c$. 相仿地对于自变量个数大于 2 的多元函数, 例如三元函数 $u=f(x,y,z)$, 则将集合

$$S_c=\{(x,y,z)\in\mathscr{D}\mid f(x,y,z)=c\}\ (\subset\mathbb{R}^3)$$

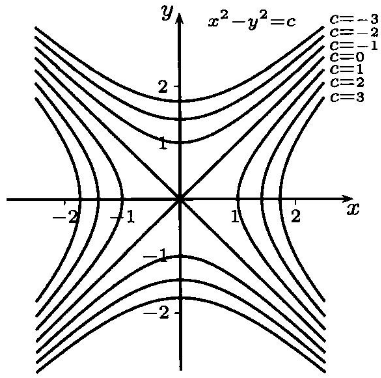
称为函数 f 取值为 c 的等值面 (也称为等位面等), 也简记为 $f=c$.

通过等值线或等值面来研究多元函数是一种常用的方法. 例如气象学中的等温线、地形图中的等高线等等, 都已经成为大众熟知的名词了.

习题 3153 作出函数 $z = x^2 - y^2$ 的等值线.

解　等值线为 $x^2 - y^2 = c$. 若取 $c > 0$, 则得到焦点在 x 轴上的双曲线; 若取 $c < 0$, 则得到焦点在 y 轴上的双曲线. 当 $c = 0$ 时则得到直线 $y = \pm x$, 它们恰好是上述所有双曲线共有的渐近线. 因此只要通过坐标面 xOy 上的旋转变换即可将上述双曲线变成为 $xy = a$ 这样的直角双曲线.

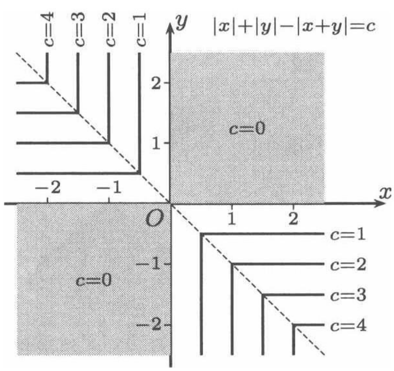
在附图中作出了 $c = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ 时的等值线. □



习题 3153 的附图

注　通过等值线容易想象函数 $z = x^2 - y^2$ 在三维空间中的几何图像. 实际上, 这就是解析几何中的双曲抛物面, 它的一个通俗名称是马鞍面, 原点 $O(0,0)$ 就是鞍点. 鞍点在地形图中是常见的. 在附图中即可看出它的特征: 在原点的左右两个方向上的高度增加, 而在上下两个方向上的高度下降 (参见 §6.7.1 的习题 3622 的附图中的马鞍面).

习题 3159(a) 作出函数 $z = |x| + |y| - |x+y|$ 的等值线.



习题 3159(a) 的附图

解　从三点不等式 $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ 可见该函数的值域为 $[0, +\infty)$, 因此只可能对于 $c \geqslant 0$ 有等值线 $z = c$.

由 $z(-x,-y) = z(x,y)$ 可见, 每一个等值线都关于原点对称, 因此可先讨论 $x + y \geqslant 0$.

在 $x + y \geqslant 0$ 的半平面中有以下情况: (1) 在第一象限中及其边界上, $z = 0$; (2) 在第二象限中 $x < 0, y > 0$, 因此有 $z = -x + y - (x + y) = -2x$, 于是等值线 $z = c$ 就是 $x = -c/2$; (3) 同理在第四象限中, 等值线 $z = c$ 就是 $y = -c/2$.

将以上结果关于直线 $x + y = 0$ 作反射, 就得到附图所示的等值线图. □

习题 3161 作出函数 $z = x^y$ $(x > 0)$ 的等值线.

解 (概要)　由条件可见该函数的值域为 $(0, +\infty)$. 对于 $c > 0$, 对 $x^y = c$ 取对数就得到 $y \ln x = \ln c$. 由于 $\ln c = C$ 可取到任意实数, 于是等值线的方程可记为

$$y = \frac{C}{\ln x}.$$

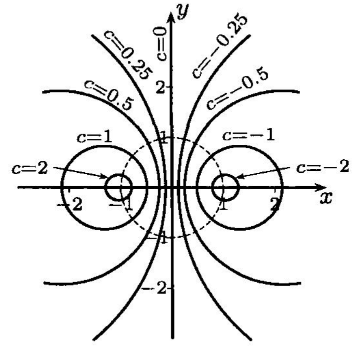
参考第一册附录一的习题 354 的函数 $y = \dfrac{1}{\ln x}$ 的图像就不难作出本题的等值线图. □

习题 3163 作出函数 $z=\ln\sqrt{\dfrac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}}$ $(a>0)$ 的等值线.

解 函数在去掉点 $(\pm a,0)$ 之外的全平面上的其他点处都有定义. 对于 $z=c$, 记 $k=\mathrm{e}^c>0$, 则等值线方程为 $\dfrac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}=k^2$. 当 $c=0$ 时, $k=1$, 等值线为直线 $x=0$. 对于 $k\neq1$, 则可将上述方程整理成为

$$\left[x-\frac{a(1+k^2)}{1-k^2}\right]^2+y^2=\frac{(2ak)^2}{(1-k^2)^2},$$

可见是圆心在 $\left(\dfrac{a(1+k^2)}{1-k^2},0\right)$ 而半径为 $\dfrac{2ak}{|1-k^2|}$ 的圆. 当 $0<k<1$ (即 $c<0$) 时圆在右半平面内, 而当 $k>1$ (即 $c>0$) 时圆在左半平面内.



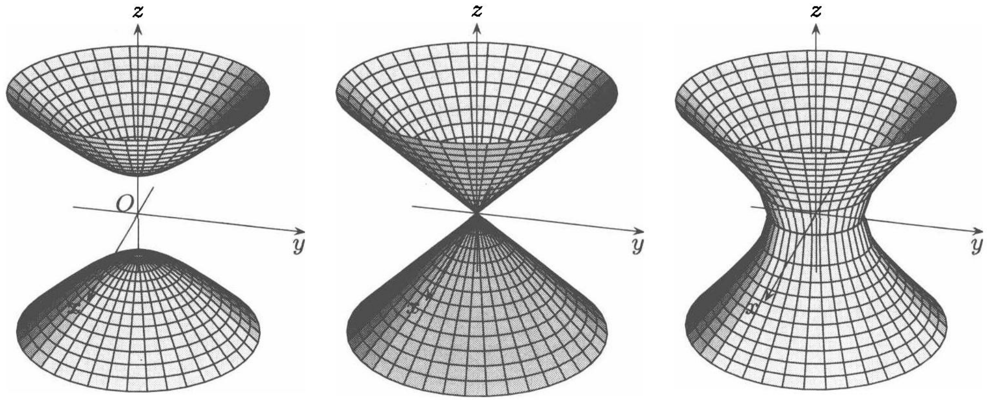
习题 3163 的附图 (取 $a=1$)

可以看出, 当 c 换为 $-c$ 时, k 换为 $1/k$, 而对应的等值线关于 y 轴对称. 在附图中取 $a=1$, 作出了 $c=-2,-1,-0.5,-0.25,0,0.25,0.5,1,2$ 的等值线 (或其一部分). □

注 本题的所有等值线都与 (附图中的虚线) 圆 $x^2+y^2=a^2$ 正交. 为此先在等值线方程 $\dfrac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}=k^2$ 中用 $x^2+y^2=a^2$ 代入, 得到 $x=\dfrac{a(1-k^2)}{(1+k^2)}$. 这就是它们的交点的横坐标 x. 利用这个关系式就容易证明在该交点处两个圆的切线正交.

习题 3168 求函数 $u=x^2+y^2-z^2$ 的等值面.

解 当 $u=c<0$ 时等值面族为双叶双曲面族, 当 $u=0$ 时等值面为锥面, 当 $u=c>0$ 时等值面族为单叶双曲面族 (在附图中对于 $u>0$ 和 $u<0$ 都只作出了曲面族中的一个曲面). □



双叶双曲面　　锥面　　单叶双曲面

习题 3168 的附图

6.1.2 杂题 (习题 3171–3180)

习题 3171–3174 要求确定由几类方程给定的曲面的特征. 由于这是几类常见的方程, 因此将这几题以及答案列表如下.

3171	$z = f(y - ax)$ 是柱面, 其母线平行于坐标面 xOy 上的直线 $y = ax$, 准线为 $x = 0, z = f(y)$;
3172	$z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ 是旋转面, 由坐标面 xOz 上的曲线 $z = f(x)$ 绕 Oz 轴旋转得到;
3173	$z = xf\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 是锥面, 以坐标原点为顶点, 准线为 $x = 1, z = f(y)$ (不含顶点);
3174	$z = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 是直纹面, 其中的直线均平行于坐标面 xOy, 准线为 $x = 1, z = f(y)$.

下面给出上述几题中的最后一题的解答.

习题 3174 根据曲面的方程 $z = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 研究其性质.

解 从方程可见曲面与平面 $x = 0$ (即坐标面 yOz) 不交.

设点 $M(x_0, y_0, z_0)$ (其中 $x_0 \neq 0$) 在曲面上, 则可见直线 $x = tx_0, y = ty_0, z = z_0$ 除去 $t = 0$ 对应的点 $(0, 0, z_0)$ 之外都在曲面上. 因此该曲面为直纹面.

取平面 $x = 1$ 上的 $z = f(y)$ 为准线, 则如上所述, 通过准线上的任何点作平行于坐标面 xOy 且经过 Oz 轴的直线, 就得到属于曲面的直线, 只是要去掉它与 Oz 轴的交点. 还可以注意到, 上述直线就是函数 z 的等值线.

一般来说, 这样的曲面既不是柱面, 也不是锥面. □

注 称由直线组成的曲面为直纹面, 它是包含柱面与锥面在内的一大类曲面. 例如在解析几何中列举的九种二次曲面中就有六种是直纹面, 其中包括双曲抛物面 (又称马鞍面, 见 §6.7.1 的习题 3622 的附图) 和单叶双曲面 (见前面习题 3168 的附图). 实际上, 在本题中取方程 $z = \dfrac{y}{x}$ 就得到一个马鞍面 $y = xz$, 只不过它以 Oy 轴为对称轴. (有兴趣的读者可参考名著 [19] 的第一章.)

习题 3175–3180 是多元函数的一些简单的代数计算题, 下面举其中的一个例子.

习题 3179 设

$$z = x + y + f(x - y).$$

若当 $y = 0$ 时 $z = x^2$, 求函数 f 和 z.

解 由条件得到

$$x^2 = x + f(x),$$

可见已经得到 $f(x)=x^2-x$, 于是即可求出

$$z=x+y+(x-y)^2-(x-y)=2y+(x-y)^2. \quad \square$$

6.1.3 多元函数的极限 (习题 3181–3193)

将一元函数的极限概念推广到多元函数是容易的. 例如, 为了给出二元函数的极限

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=A$$

的定义, 只要 (参见 §1.5.2 中对于一元函数极限分类中的基本类型) 写出

$$\lim_{x\to a} f(x)=A$$

的 ε–δ 定义, 然后将其中的 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 改写为 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$, 又将 $0<|x-a|<\delta$ 改写为 $0<\|(x,y)-(a,b)\|<\delta$ 即可. 这里的 $\|\cdot\|$ 是平面上两个点 (x,y) 和 (a,b) 之间的距离, 即是

$$\|(x,y)-(a,b)\|=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2},$$

也称为欧几里得距离. 利用

$$\max\{|x-a|,|y-b|\}\leqslant\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\leqslant|x-a|+|y-b|,$$

可见若将 $0<\|(x,y)-(a,b)\|<\delta$ 换为 $|x-a|<\delta, |y-b|<\delta$, 则所得的极限定义是等价的. 因此上述二元函数的极限也经常等价地记为

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)=A.$$

然而多元函数除了称为多重极限的上述概念之外, 还有其他类型的函数极限, 即累次极限. 对于二元函数 $f(x,y)$ 来说, 在点 (a,b) 处有两种累次极限 (也称为二次极限), 即

$$\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y) \ \text{及}\ \lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,y).$$

为区别起见, 可将它们分别称为先 x 后 y 和先 y 后 x 的二次极限. 以前者为例, 将 $\lim\limits_{x\to a} f(x,y)$ 称为内层极限 (或里层极限), 它是在 b 的去心邻域内固定 y, 取 $x\to a$ 的极限, 因此得到的是 y 的函数. 然后再取 $y\to b$ 的极限, 即外层极限.

为了在点 (a,b) 处存在累次极限, $f(x,y)$ 只需要在点 (a,b) 的一个邻域内所有满足 $x\neq a$, $y\neq b$ 的点 (x,y) 处有定义就足够了. 这样的点集称为去十字邻域.

在多重极限与累次极限的关系上, 最基本的是一般教科书中均收入的以下命题.

命题 6.1 设存在二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)=A$, 则有以下结论:

(1) 若当 $y\neq b$ 且 $|y-b|$ 充分小时存在极限 $\varphi(y)=\lim\limits_{x\to a} f(x,y)$, 则存在先 x 后 y 的二次极限, 且有

$$\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y)=\lim_{y\to b}\varphi(y)=\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)=A;$$

(2) 若当 $x\neq a$ 且 $|x-a|$ 充分小时存在极限 $\psi(x)=\lim\limits_{y\to b} f(x,y)$, 则存在先 y 后 x 的二次极限, 且有

$$\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,y)=\lim_{x\to a}\psi(x)=\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)=A.$$

注 上述命题表明, 二元函数在某个点处存在二重极限, 且存在某个内层极限, 则就存在相应的二次极限且其值等于二重极限. 特别地, 若两个不同的内层极限均存在, 则两个二次极限相等且等于二重极限. 由此也可推断, 若两个二次极限存在而不相等, 则必定不存在二重极限.

然而, 命题 6.1 之逆不成立. $f(x,y)$ 在某个点 (a,b) 处存在两个二次极限并不能保证函数在该点存在二重极限. 这就是下面的习题 3181 的意义.

习题 3181 证明: 对于函数

$$f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$$

有

$$\lim_{x\to 0}\{\lim_{y\to 0}f(x,y)\}=1,\quad \lim_{y\to 0}\{\lim_{x\to 0}f(x,y)\}=-1,$$

从而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ 不存在.

解 在二次极限计算中要注意的是: 在求内层极限时还必须考虑到下一步的外层极限是什么. 以本题中的第一个二次极限来说, 此时内层极限是

$$\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y}=\psi(x).$$

由于下一步是要计算 $\lim\limits_{x\to 0}\psi(x)$, 根据一元函数的极限定义, 我们不需要考虑 $x=0$ 时函数 ψ 是否有定义. 因此在求内层极限时就可以设 $x\neq 0$. 而在这个前提下, 就容易得到

$$\psi(x)=\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y}=\frac{x}{x}=1.$$

然后, 在 $x\neq 0$ 时恒等于 1 的函数在 $x=0$ 处的极限显然等于 1, 这样就证明了

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y}=\lim_{x\to 0}\psi(x)=1.$$

同理可证明另一个二次极限等于 -1, 从略.

由于两个二次极限不相等, 因此从命题 6.1 就知道二重极限不存在. □

注 也许有读者会问, 由题中的函数 $f(x,y)$ 所确定的曲面在点 $(0,0)$ 附近是否发生了什么"意外", 才会出现如此的结论? 这可以参考上面 §6.1.2 的习题 3174, 因为本题就属于这个类型. 读者可以利用该习题中的讲解, 想像这个直纹面上的等值线的几何形状, 从而理解为什么在点 $(0,0)$ 处的二重极限不存在了.

进一步, 即使 $f(x,y)$ 在某个点 (a,b) 处存在两个相等的二次极限, 仍然不能保证函数在该点存在二重极限. 这就是下面的习题 3182 的意义.

习题 3182 证明: 对于函数 $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ 有

$$\lim_{x\to 0}\{\lim_{y\to 0}f(x,y)\}=\lim_{y\to 0}\{\lim_{x\to 0}f(x,y)\}=0,$$

然而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ 不存在.

解 两个二次极限都等于 0 的计算与习题 3181 中的计算类似, 从略.

对于后半题用反证法.

假设 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处存在二重极限, 则根据命题 6.1 可见, 只能有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0.$$

根据定义, 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ 时, 成立不等式

$$\left|\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right| < \varepsilon.$$

然而只要在满足 $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ 的前提下用 $x = y \neq 0$ 代入, 就看出左边为 1, 从而与 ε 可取为任意小的正数相矛盾. □

习题 3183.2 是否存在极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$?

解 考虑点 (x,y) 沿着斜率为 k 的直线趋于点 $(0,0)$, 为此只要令 $y = kx$ 代入 $f(x,y)$, 就可得到

$$f(x,kx) = \frac{2x(kx)}{x^2+(kx)^2} = \frac{2k}{1+k^2}.$$

这里要注意: 由于函数极限定义中当 $(x,y) \to (a,b)$ 时, 不允许 $(x,y) = (a,b)$, 因此在上述计算中始终有 $x \neq 0$, 从而可以将分子分母中的公因子 x^2 约去.

由此可见, 当点 (x,y) 沿着不同斜率的直线趋于点 $(0,0)$ 时, 函数 $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ 存在与 k 有关的极限, 因此该函数在点 $(0,0)$ 处不存在二重极限.

还可以看出, 由 $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ 确定的曲面也属于 §6.1.2 的习题 3174 中的直纹面, 直线 $y = kx$ 就是 f 的等值线. 上述讨论就是利用了这些等值线. □

注 以上两个题中所用的方法的根据在于: 若 $f(x,y)$ 在点 (a,b) 处有极限 A, 则在点 (a,b) 的去心邻域内, 当点 (x,y) 沿着任意方向的直线趋于点 (a,b) 时, 其极限也应当等于 A. 具体来说, 可考虑直线 $x = a$ 与 $y = b + k(x-a)$, 其中 $-\infty < k < +\infty$. 这时只要考虑一元函数的极限即可.

对于习题 3182 来说, 由于二重极限若存在只能等于 0, 因此只利用 $k = 1$ 就解决了问题. 对于习题 3183.2, 则也可以取两个不同的 k 来解决问题.

还要指出, 即使点 (x,y) 沿着所有直线趋于点 (a,b) 时, 函数 $f(x,y)$ 都存在极限且相等, 仍然不能保证 f 在点 (a,b) 的二重极限存在 (参见后面 §6.1.4 的习题 3202(b) 和 §6.7.1 末的习题 3682 及其附图).

习题 3184–3193 是关于二重极限和二次极限的计算题, 其中还包括了基本类型 (这是指 $(x,y) \to (a,b)$ 时的函数极限) 之外的各种函数极限. 下面举几个例子.

习题 3185 求二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$.

解　由平均值不等式有 $|xy|\leqslant\dfrac{x^2+y^2}{2}$, 从而即可如下估计得到

$$0\leqslant\left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right|\leqslant\frac{|x|+|y|}{x^2+y^2-|xy|}\leqslant\frac{|x|+|y|}{|xy|}=\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|y|},$$

可见所求的极限为 0. □

习题 3190 求二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

解 1　这是 0^0 型的不定式. 取对数后求极限

$$\lim_{\substack{x\to0\\ y\to0}}x^2y^2\ln(x^2+y^2),$$

则从

$$x^2y^2\ln(x^2+y^2)\leqslant\frac{(x^2+y^2)^2}{4}\ln(x^2+y^2)$$

和 $\lim\limits_{u\to+0}u^2\ln u=0$ 可知本题的极限为 $\mathrm{e}^0=1$. □

解 2　利用 $\lim\limits_{u\to+0}u^u=1$ 和 $\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}\leqslant\dfrac{x^2+y^2}{4}$, 即可计算极限如下:

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to0\\ y\to0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2}&=\lim_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\left[(x^2+y^2)^{x^2+y^2}\right]^{\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}}\\&=\left(\lim_{u\to+0}u^u\right)^{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}}=1^0=1.\quad\square\end{aligned}$$

6.1.4　多元函数的连续性 (习题 3194–3210)

习题 3196 求函数 $u=\dfrac{x+y}{x^3+y^3}$ 的间断点.

解　函数 u 的定义域为 $x+y\neq0$ 之外的点全体.

对于定义域中的点, 有 $x+y\neq0$, 因此可约去分子分母共有的因子 $x+y$ 而得到

$$u=\frac{1}{x^2-xy+y^2}.$$

由于上式的分母 $x^2-xy+y^2\geqslant\dfrac12(x^2+y^2)$, 即在 x,y 不同时为 0 时只取正值, 因此函数 u 在定义域 $x+y\neq0$ 内处处连续.

在直线 $x+y=0$ 上的点可写为 $(x_0,-x_0)$. 若其中的 $x_0\neq0$, 则由于对函数 $u(x,y)$ 取 $(x,y)\to(x_0,-x_0)$ 的极限时, u 只能在 $x+y\neq0$ 上取值, 因此就得到

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to -x_0}}\frac{x+y}{x^3+y^3}=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to -x_0}}\frac{1}{x^2-xy+y^2}=\frac{1}{3x_0^2}.$$

这表明所有满足 $x_0\neq0$ 的点 $(x_0,-x_0)$ 为函数 $u(x,y)$ 的可去不连续点.

最后求函数 u 在点 $(0,0)$ 处的极限. 这时同样可以约去分子分母的共有因子 $x+y$, 然后估计如下:

$$\left|\frac{x+y}{x^3+y^3}\right| = \frac{1}{x^2-xy+y^2} \geqslant \frac{1}{\frac{3}{2}(x^2+y^2)} = \frac{2}{3(x^2+y^2)} \to +\infty \ (x\to 0, y\to 0),$$

因此点 $(0,0)$ 是函数 u 的无穷型不连续点. □

注 对此题补充几点: (1) 函数 u 在直线 $x+y=0$ 上没有定义, 但仿照一元函数的情况, 仍然可以讨论这些点是何种类型的不连续点; (2) 对于该直线上的每一个点 $(x_0,-x_0)$, 在它的去心邻域中 u 也不是处处有定义, 这与一元函数中允许在函数的定义域的极限点处讨论函数的连续性是相同的; (3) 在本题的函数 u 的所有可去不连续点处用其极限补充定义后, 就得到了函数 $\dfrac{1}{x^2-xy+y^2}$.

习题 3202(a) 证明: 函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{若 } x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{若 } x^2+y^2=0\end{cases}$$

分别对于每一个变量 x 或 y (当另一变量的值固定时) 是连续的, 但对这些变量的总体不是连续的.

解 (概要) 只有点 $(0,0)$ 需要讨论. 利用习题 3183.2 就知道 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可能连续. □

习题 3202(b) 证明: 函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{若 } x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{若 } x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点 $O(0,0)$ 处沿过此点的每一射线

$$x=t\cos\alpha,\quad y=t\sin\alpha\ \ (0\leqslant t<+\infty)$$

连续, 即存在

$$\lim_{t\to 0} f(t\cos\alpha, t\sin\alpha)=f(0,0),$$

但此函数在点 $(0,0)$ 并非连续的.

解 将直线的参数方程代入函数 f 的表达式中, 就有

$$f(t\cos\alpha, t\sin\alpha)=\frac{t^3\cos^2\alpha\sin\alpha}{t^4\cos^4\alpha+t^2\sin^2\alpha}\ \ (t\neq 0),$$

可见当 $\sin\alpha=0$, 即 $\alpha=0,\pi$ 时上式恒等于 0, 而当 $\sin\alpha\neq 0$ 时 $f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)\to 0\ (t\to 0)$. 又根据 $f(0,0)=0$, 因此 $f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)\Big|_{t=0}=0$, 可见 $f(x,y)$ 在点 $O(0,0)$ 处沿着过此点的每一条直线连续①.

① 将原题中的射线换为直线后结论仍成立.

然后观察函数 $f(x,y)$ 在经过原点 $O(0,0)$ 的抛物线族 $y=kx^2$ (k 取所有实数) 上的取值, 就有

$$f(x,kx^2)=\frac{kx^4}{x^4+k^2x^4}=\frac{k}{1+k^2}\ \ (x\neq 0).$$

这表明每一条抛物线 $y=kx^2$ (除去原点 $(0,0)$) 都是函数 $f(x,y)$ 的等值线. 当 k 取所有实数时, $\frac{k}{1+k^2}$ 取到 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ 内的所有值. 由于这些等值线都以原点 $(0,0)$ 为聚点, 因此函数 $f(x,y)$ 在原点不连续 (参见 §6.7.1 的习题 3682 及其附图). □

习题 3203.2 研究函数 $u=\sqrt{x^2+y^2}$ 在平面 $E^2=\{|x|<+\infty,|y|<+\infty\}$ 上的一致连续性.

解 研究函数在两个相异点 (x,y), (x',y') 处的函数值之差:

$$\begin{aligned}\left|\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x'^2+y'^2}\right|&=\frac{|x^2+y^2-x'^2-y'^2|}{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x'^2+y'^2}}\\&\leqslant\frac{|x-x'|\cdot|x+x'|+|y-y'|\cdot|y+y'|}{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x'^2+y'^2}}\\&\leqslant|x-x'|+|y-y'|,\end{aligned}$$

可见对任意给定的 $\varepsilon>0$, 只要取 $\delta=\varepsilon/2$, 则当 $|x-x'|<\delta$, $|y-y'|<\delta$ 时, 就有 $|u(x,y)-u(x',y')|<\varepsilon$, 因此函数 $u(x,y)$ 在全平面上一致连续. □

习题 3203.3 函数

$$f(x,y)=\sin\frac{\pi}{1-x^2-y^2}$$

在区域 $x^2+y^2<1$ 内是否一致连续?

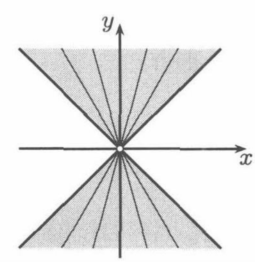
分析 当点 (x,y) 在区域 $x^2+y^2<1$ 内趋于其边界 $x^2+y^2=1$ 时, 正弦函数的自变量 $\frac{\pi}{1-x^2-y^2}$ 趋于正无穷大, 因此函数值 $f(x,y)$ 将在 -1 到 1 之间作无限次振动, 从而不可能一致连续. □

习题 3203.4 给定函数

$$u=\arcsin\frac{x}{y}.$$

此函数在其定义域 E 内是否连续? 是否一致连续?

分析 这时的定义域 E 为满足 $|x|\leqslant|y|$ 和 $y\neq 0$ 的所有点 (x,y), 即如附图所示的阴影区域, 但不包含原点. 函数 u 作为初等函数, 在定义域内处处连续是没有问题的.



习题 3203.4 的附图

由于在该定义域内经过原点 (但不包含原点) 的直线为函数 u 的等值线, 且当直线为 $x=ky$ $(-1\leqslant k\leqslant 1)$ 时, 等值线上的函数值为 $\arcsin k$, 因此在原点的任何去心邻域内, 函数 u 将取到闭区间 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 中的所有值, 从而不可能一致连续 (注意本题的方程属于习题 3174 中的类型). □