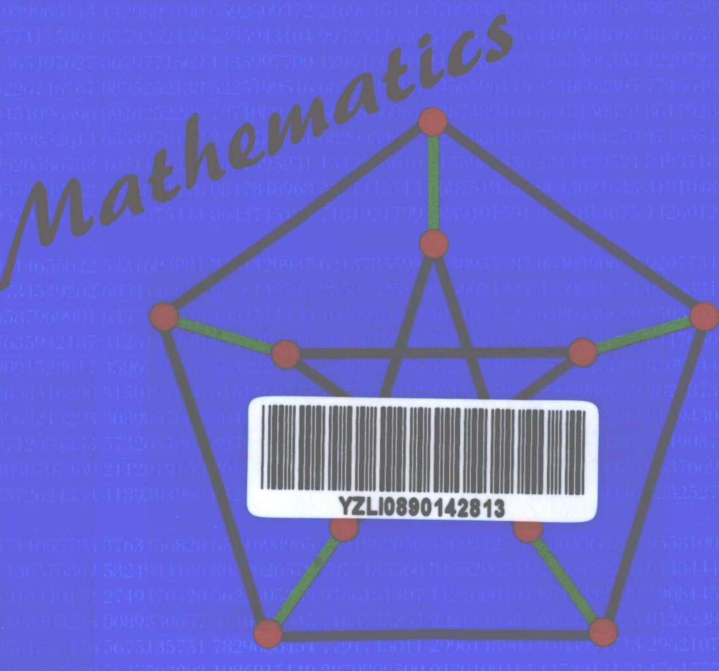
2012 高中数学联赛备考手册

（预赛试题集锦）

中国数学会普及工作委员会　组编
各省市数学会　联合编写



YZLI0890142813

上海市著名商标
ECNUP
华东师范大学出版社
全国百佳图书出版单位

2012

高中数学联赛备考手册

（预赛试题集锦）

中国数学会普及工作委员会　组编

安徽省数学会　福建省数学会
甘肃省数学会　贵州省数学会
河北省数学会　河南省数学会
黑龙江省数学会　湖北省数学会
湖南省数学会　吉林省数学会
江苏省数学会　江西省数学会
辽宁省数学会　山东省数学会
山西省数学会　陕西省数学会
四川省数学会
浙江省数学会　会

联合编写

宁波市鄞州区图书馆
藏书
YZLI

YZLI0890142813

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学联赛备考手册. 2012:预赛试题集锦/中国数学会普及工作委员会组编. —上海:华东师范大学出版社,2011.12
ISBN 978-7-5617-9151-6

Ⅰ.①高… Ⅱ.①中… Ⅲ.①数学课—高中—试题 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第251975号

高中数学联赛备考手册(2012)
(预赛试题集锦)

组 编 者 中国数学会普及工作委员会
策划编辑 倪 明(数学工作室)
组稿编辑 孔令志
审读编辑 徐惟简
装帧设计 黄惠敏

出版发行 华东师范大学出版社
社 址 上海市中山北路3663号 邮编 200062
网 址 www.ecnupress.com.cn
电 话 021-60821666 行政传真 021-62572105
客服电话 021-62865537 门市(邮购)电话 021-62869887
地 址 上海市中山北路3663号华东师范大学校内先锋路口
网 店 http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者 上海崇明裕安印刷有限公司
开 本 890×1240 32开
印 张 7.25
字 数 190千字
版 次 2012年1月第一版
印 次 2012年1月第一次
书 号 ISBN 978-7-5617-9151-6/G·5459
定 价 18.00元

出 版 人 朱杰人

(如发现本版图书有印订质量问题,请寄回本社客服中心调换或电话021-62865537联系)

前　言

《高中数学联赛备考手册(2012)(预赛试题集锦)》即将出版,感谢参与这项工作并付出辛苦的各位同仁.

教育部要调整联赛保送、加分政策已经说了好多年.

2010 年 11 月 19 日,教育部发布了《关于调整部分高考加分项目和进一步加强管理工作的通知》,明确了新的政策:从 2011 年秋季进入高中阶段一年级的学生开始适用,2010 年(含)以前已进入高中阶段学习的学生,仍适用调整前的相关政策. 也就是说 2011 年和 2012 年的联赛一等奖还是可以保送的,成了“保送末班车”,这也就加大了联赛组织工作的难度.

2010 年 12 月 7 日,中国科协召开了五项学科竞赛组织管理工作会议,就过渡期的竞赛工作进行了部署,要求各个学会制定相应的实施办法,确保安全平稳过渡. 根据会议精神,我们在今年年初制定了“全国高中数学联赛组织工作暂行办法(2011 年、2012 年实施)”,其中最重要的部分就是调整试卷的传送方式,各赛区有两种选择:

选择一:邮寄试卷方式. 联赛(一试)和加试(二试)试卷由全国高中数学联赛组委会统一命制、印刷,考前寄到有关赛区,各单位不得翻印试卷. 选择此方案的赛区,进入冬令营的名额只有三名.

选择二:网络传送方式. 联赛(一试)和加试(二试)的答题卷(不含试题)由全国高中数学联赛组委会统一提供模板,各赛区提前印制备用. 赛前组委会入围命制试题(包括联赛和加试),考试当天从网上传送试题、解密、速印后送入考场进行考试.

由于是第一次采用这种方式传送试卷,今年全国高中数学联赛的承办单位——湖北省数学会为此做了大量的准备工作,考前进行了两次模拟. 在组委会和各赛区的共同努力下,10 月 16 日考试日的

各项工作一切顺利. 我谨代表中国数学会普及工作委员会感谢湖北省数学会的各位同志，感谢各个赛区负责组织活动的每一位同志.

复评工作于 11 月 10 日至 13 日在武汉进行，中国数学会和湖北省数学会的相关负责人参加. 经过复评，确定了“2011 年全国高中数学联赛赛区一等奖名单”，31 个赛区共有 1276 名同学获得赛区一等奖. 确定“2012 年冬令营营员名单”，有 222 名同学取得了参加 2012 年西安冬令营的资格.

祝贺各位联赛获奖同学及其老师；预祝参加冬令营的同学取得更好的成绩.

吴建平

2011 年 11 月 14 日

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目 录

01

2011年全国高中数学联赛天津市预赛

2011年高中数学联赛天津市预赛于2011年9月18日举行，共有六千多名中学生参加此次预赛，并从中选拔出九百多名学生参加于10月16日举行的全国高中数学联赛.

天津市预赛所涉及的知识范围基本参照现行《全日制普通高级中学数学教学大纲》中所规定的教学内容和要求，但在方法的要求上有所提高. 主要考查学生对基本知识和基本技能的掌握情况，以及综合、灵活运用知识的能力. 试卷包括6道选择题、6道填空题和3道解答题，全卷满分150分，考试时间为两小时.

天津市预赛的命题工作由数学会负责，组织工作由科协五学科竞赛管理委员会办公室负责，阅卷及报送参加全国高中数学联赛的名单由各区县教研室具体实施.

试　题

一、选择题(每小题 6 分,共 36 分)

1 如果 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时总有 $\sin x > kx$ 成立,则实数 k 的取值范围是(　　).

(A) $\left(-\infty, \frac{\pi}{2}\right]$　　(B) $\left(-\infty, \frac{\pi}{2}\right]$

(C) $\left(-\infty, \frac{2}{\pi}\right]$　　(D) $\left(-\infty, \frac{2}{\pi}\right]$

2 已知函数 $y = f(x)$ 有反函数 $y = f^{-1}(x)$,将 $y = f(x)$ 的图象绕$(1, -1)$逆时针旋转 $90°$,所得曲线的方程是(　　).

(A) $y = f^{-1}(-x) - 2$

(B) $y = -f^{-1}(-x) - 2$

(C) $y = f^{-1}(-x+1) - 1$

(D) $y = f^{-1}(-x-1) + 1$

3 设 n 为正整数,$x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$,$y = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$,则(　　).

(A) $x^y > y^x$　　(B) $x^y = y^x$

(C) $x^y < y^x$　　(D) 以上都有可能

4 若直线 $y = x - 3$ 与曲线 $y = e^{x+a}$ 相切,则实数 a 的值是(　　).

(A) -4　　(B) -2　　(C) 2　　(D) 4

5 在半径为 1 的$\odot O$上,取一个定点 A 和一个动点 B.设点 P 满足 $AP \parallel OB$ 且$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = 1$,则 P 点的轨迹是(　　).

(A) 椭圆　　(B) 抛物线

(C) 双曲线　　(D) 以上都有可能

6 将$(a+b+c+d)^9$ 展开之后再合并同类项,所得的多项式的项数是(　　).

(A) C_9^4　　(B) C_9^3　　(C) C_{12}^4　　(D) C_{12}^3

二、填空题(每小题 9 分,共 54 分)

7 九个正实数 $a_1, a_2, \cdots, a_9$ 构成等比数列,且 $a_1+a_2=\frac{3}{4}$, $a_3+a_4+a_5+a_6=15$. 则 $a_7+a_8+a_9=$ ________.

8 设 $O-ABCD$ 是正四棱锥,其中 $OA=\sqrt{3}$, $BC=2$. 以 O 为球心,以 1 为半径作一个球,则这个球与正四棱锥相交部分的体积是 ________.

9 若实数 x, α, β 满足 $x=\log_3\tan\alpha=-\log_3\tan\beta$,且 $\alpha-\beta=\frac{\pi}{6}$,则 x 的值是________.

10 设 A, B 是双曲线的两个焦点, C 在双曲线上. 已知$\triangle ABC$ 的三边长成等差数列,且 $\angle ACB=120°$,则该双曲线的离心率为 ________.

11 函数 $f(x)$的定义域为$(0, \infty)$,且满足 $f(x)-2xf\left(\frac{1}{x}\right)+3x^2=0$,则 $f(x)$的最小值是________.

12 复数 z 满足 $|z|(3z+2\mathrm{i})=2(\mathrm{i}z-6)$,则 $|z|=$ ________.

三、解答题(每小题 20 分,共 60 分)

13 在四面体 $ABCD$ 中,$AD\perp$平面 BCD, $\angle ABD=\angle BDC=\theta<45°$. 已知 E 是 BD 上一点,满足 $CE\perp BD$ 且 $BE=AD=1$.

(1) 证明:$\angle BAC=\theta$;

(2) 若点 D 到平面 ABC 的距离为$\frac{4}{13}$,求 $\cos\theta$ 的值.

14 设 a, b, c, d, e, f 为实数,且 $ax^2+bx+c\geqslant|dx^2+ex+f|$ 对任意实数 x 成立,证明:$4ac-b^2\geqslant|4df-e^2|$.

15 设数列$\{a_n\}$定义为 $a_1=1$, $a_{n+1}=2a_n+\sqrt{3a_n^2+1}$, $n\geqslant1$.

(1) 证明:当 $n>1$ 时,$a_{n+1}+a_{n-1}=4a_n$;

(2) 证明:$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

天津

解 答

1 C 提示：作出 $y=\sin x$ 和 $y=kx$ 的图象，易知选 C.

2 A 提示：点 $(t, f(t))$ 绕 $(1, -1)$ 旋转 $90°$，得到 $(-f(t), t-2)$. 令 $x=-f(t)$，则 $t=f^{-1}(-x)$，因此

$$y=t-2=f^{-1}(-x)-2.$$

3 B 提示：由于 $x=\frac{(n+1)^n}{n^n}$，$y=\frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}}$，取对数易得 $x^y=y^x$.

4 A 提示：设切点的横坐标为 x_0. 在 $x=x_0$ 处，曲线 $y=\mathrm{e}^{x+a}$ 的斜率为 e^{x_0+a}. 而直线 $y=x-3$ 的斜率为 1. 因此 $\mathrm{e}^{x_0+a}=1$，得 $x_0=-a$. 因此，切点的纵坐标 $\mathrm{e}^{x_0+a}=1=x_0-3$，即 $1=-a-3$，所以 $a=-4$.

5 B 提示：不妨设 $O(0, 0)$，$A(1, 0)$，$P(x, y)$，由于 $AP \parallel OB$，可设 $B(k(x-1), ky)$. 将这些坐标代入 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=1$. 可得 $k=\frac{x}{(x-1)^2+y^2}$. 最后，利用 B 在 $\odot O$ 上，即可得到 (x, y) 满足的方程为 $x^2=(x-1)^2+y^2$，即 $y^2=2x-1$，所以 P 的轨迹是抛物线.

6 D 提示：所得多项式中每一项都形如 $ka^{x_1}b^{x_2}c^{x_3}d^{x_4}$，其中 $k>0$，

$$x_1+x_2+x_3+x_4=9,\ x_i\geqslant 0.$$

易知上式共有 $\mathrm{C}_{9+4-1}^{4-1}=\mathrm{C}_{12}^{3}$ 组整数解，因此选 D.

7 112 提示：设公比为 q，则由已知条件可得

$$a_1(1+q)=\frac{3}{4},$$

$$a_1q^2(1+q+q^2+q^3)=15,$$

这两式相比，得 $q^2(1+q^2)=20$，从而 $q=2$，$a_1=\frac{1}{4}$. 这样

$$a_7+a_8+a_9=a_1q^6(1+q+q^2)=112.$$

8 $\frac{2\pi}{9}$ 提示：考虑棱长为 2 的正方体，将 O 置于正方体的中心，则 $ABCD$ 恰好可以与正方体的一个面重合. 于是，由对称性可知，所求体积是球体体积的$\frac{1}{6}$，即$\frac{2\pi}{9}$.

9 $\frac{1}{2}$ 提示：记 $\tan\alpha=y$，则由第一个条件得 $\tan\beta=\frac{1}{y}$. 又由第二个条件，可知

$$\tan\beta=\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{y-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{y}{\sqrt{3}}},$$

从而得方程

$$\frac{1}{y}=\frac{y-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{y}{\sqrt{3}}},$$

取其正根，得 $y=\sqrt{3}$. 因此 $x=\log_3 y=\frac{1}{2}$.

10 $\frac{7}{2}$ 提示：依题意，可设 $|AC|+|AB|=2|BC|$，且

$$|AC|^2+|BC|^2-|AB|^2=2|AC|\cdot|BC|\cdot\cos 120°,$$

由此可知

$$|AC|:|AB|:|BC|=3:7:5.$$

这样，双曲线的离心率为 $\frac{7}{5-3}=\frac{7}{2}$

11 3 提示：由 $f(x)-2xf\left(\frac{1}{x}\right)+3x^2=0$ 可得

$$f\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{2}{x}f(x)+\frac{3}{x^2}=0.$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

联立这两式解得 $f(x)=x^2+\frac{2}{x}$. 由平均值不等式

$$\begin{aligned}x^2+\frac{2}{x}&=x^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\\&\geqslant 3\left(x^2\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}\\&=3.\end{aligned}$$

且当 $x=1$ 时等号成立. 因此，$f(x)$的最小值为 3.

12 2 提示:直接计算可知

$$|3z+2\mathrm{i}|^2-|\mathrm{i}z-6|^2=8(|z|^2-4).$$

由此可见，若 $|z|>2$，则 $|3z+2\mathrm{i}|>|\mathrm{i}z-6|$，进而

$$||z|(3z+2\mathrm{i})|>|z(\mathrm{i}z-6)|,$$

这与已知条件矛盾;同理，若 $|z|<2$，则

$$||z|(3z+2\mathrm{i})|<|2(z+6\mathrm{i})|,$$

也矛盾. 因此 $|z|=2$.

另解 设 $|z|=r$，代入条件，得 $z=-\frac{12+2r\mathrm{i}}{3r-2\mathrm{i}}$. 因此

$$r^2=|z|^2=\frac{12^2+(2r)^2}{(3r)^2+(-2)^2}.$$

化简得 $r^4=16$，因此 $r=2$，即 $|z|=2$.

13 (1) 由于 $AD=BE=1$，有 $AB=\frac{1}{\sin\theta}$, $BD=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$, $DE=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-1$，以及

$$CD=\frac{DE}{\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta}-\frac{1}{\cos\theta}.$$

进而得到

$$AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=\sqrt{1+\left(\frac{1}{\sin\theta}-\frac{1}{\cos\theta}\right)^2}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}-1.$$

现在，设 $\angle BAC=\alpha$，分别在$\triangle ABC$和$\triangle DBC$中用余弦定理，有

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\alpha,$$
$$BC^2=BD^2+CD^2-2BD\cdot CD\cdot\cos\theta.$$

以上两式相减，并注意

$$AB^2=BD^2+AD^2,$$
$$AC^2=CD^2+AD^2,$$

则可得到

$$2AD^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\alpha+2BD\cdot CD\cdot\cos\theta=0,$$

从而

$$\begin{aligned}\cos\alpha&=\frac{AD^2+BD\cdot CD\cdot\cos\theta}{AB\cdot AC}\\&=\frac{1+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\left(\frac{1}{\sin\theta}-\frac{1}{\cos\theta}\right)\cdot\cos\theta}{\frac{1}{\sin\theta}\cdot\left(\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}-1\right)}\\&=\cos\theta.\end{aligned}$$

这就证明了 $\angle BAC=\theta$.

（2）注意四面体 $ABCD$ 的体积为

$$V=\frac{1}{3}AD\cdot S_{BCD}=\frac{1}{6}AD\cdot BD\cdot CD\cdot\sin\theta,$$

而$\triangle ABC$的面积为

$$S=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\theta,$$

因此，点 D 到平面 ABC 的距离为

$$\frac{3V}{S}=\frac{AD\cdot BD\cdot CD}{AB\cdot AC}=\frac{\cos^2\theta-\cos\theta\sin\theta}{1-\sin\theta\cos\theta}.$$

令上式等于$\frac{4}{13}$，解得 $\cos\theta=\frac{4}{5}$.

14 若 $a=0$,则 $b=0$, $d=0$, $e=0$, 结论显然成立.

当 $a\neq 0$ 时,由于 $ax^2+bx+c\geqslant 0$,因此 $a>0$, $b^2-4ac\leqslant 0$. 进一步,不妨设 $d>0$, 则由

$$ax^2+bx+c\geqslant dx^2+ex+f$$

可知 $a\geqslant d>0$.

记 $g(x)=dx^2+ex+f$. 我们分两种情况讨论:

(i) 若 $e^2-4df>0$, 则由

$$ax^2+bx+c\geqslant |g(x)|$$

可得

$$ax^2+bx+c\pm(dx^2+ex+f)\geqslant 0,$$

因此

$$(b+e)^2-4(a+d)(c+f)\leqslant 0,$$
$$(b-e)^2-4(a-d)(c-f)\leqslant 0,$$

这两式相加得

$$(b^2-4ac)+(e^2-4df)\leqslant 0,$$

因此这时有 $4ac-b^2\geqslant|4df-e^2|$.

(ii) 若 $e^2-4df\leqslant 0$,则 $g(x)\geqslant 0$, 且 $g(x)$的最小值为$\dfrac{4df-e^2}{4d}$.

在已知条件中取 $x=-\dfrac{b}{2a}$, 则得到

$$\frac{4ac-b^2}{4a}\geqslant g\left(-\frac{b}{2a}\right)\geqslant\frac{4df-e^2}{4d}.$$

因此 $4ac-b^2\geqslant 4df-e^2$, 即

$$4ac-b^2\geqslant|4df-e^2|.$$

15 (1) 由条件可知,$\{a_n\}$是递增数列, $a_2=4$. 将递推公式移项并平方, 得

$$(a_{n+1}-2a_n)^2=3a_n^2+1,$$

即

$$a_{n+1}^2-4a_{n+1}a_n+a_n^2=1.$$

进而有

$$a_n^2-4a_na_{n-1}+a_{n-1}^2=1.$$

以上两式相减，并分解因式，得

$$(a_{n+1}-a_{n-1})(a_{n+1}+a_{n-1}-4a_n)=0.$$

因此，$a_{n+1}+a_{n-1}=4a_n$.

(2) 结合 $a_1=1$，$a_2=4$ 和 $a_{n+1}=4a_n-a_{n-1}$ 即可得到

$$a_n=\frac{1}{2\sqrt{3}}(\alpha^n-\beta^n).$$

其中 $\alpha=2+\sqrt{3}$，$\beta=2-\sqrt{3}$.

下面估计 $S_n=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$. 由于 $\alpha>1>\beta>0$,且 $\alpha\beta=1$，所以,由

$$\alpha^k-\beta^k>\alpha(\alpha^{k-1}-\beta^{k-1})=\frac{1}{\beta}(\alpha^{k-1}-\beta^{k-1}),\ k\geqslant 2.$$

可得

$$\frac{1}{a_k}<\frac{\beta}{a_{k-1}},\ k\geqslant 2.$$

这样,当 $n>1$ 时,我们有

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{a_1}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{a_k}\\&<\frac{1}{a_1}+\sum_{k=2}^{n}\frac{\beta}{a_k-1}\\&=\frac{1}{a_1}+\beta\cdot\left(S_n-\frac{1}{a_n}\right)\\&<\frac{1}{a_1}+\beta S_n,\end{aligned}$$

所以

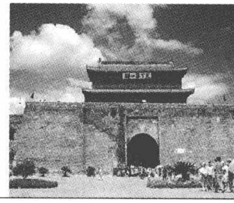
$$S_n < \frac{1}{(1-\beta)a_1} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

注:第 1 问也可直接用数学归纳法证明 $a_n = \frac{1}{2\sqrt{3}}(\alpha^n - \beta^n)$.

天津

02

2011年全国高中数学联赛河北省预赛



受河北省数学会委托，河北省数学会普及工作委员会会同河北师范大学数学与信息科学学院共同组织承办了2011年河北省高中数学竞赛.

河北省高中数学竞赛所涉及的知识范围不超出现行《全日制普通高级中学数学教学大纲》中所规定的教学内容和要求，在方法的要求上略有提高.主要考查学生对基础知识和基本技能的掌握情况，以及综合、灵活运用知识的能力.试卷包括8道填空题和6道解答题.全卷满分150分.竞赛活动时间在2011年5月15日(星期日)上午.

参加比赛的学生来自河北省11个地市的高中生约37 000人.通过比赛，将根据成绩按赛区选拔1800名同学参加2011年全国高中数学联赛.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com