

SURREAL NUMBERS

Broadview®
www.broadview.com.cn

研究之美

[美] D. E. KNUTH 著 高博 译

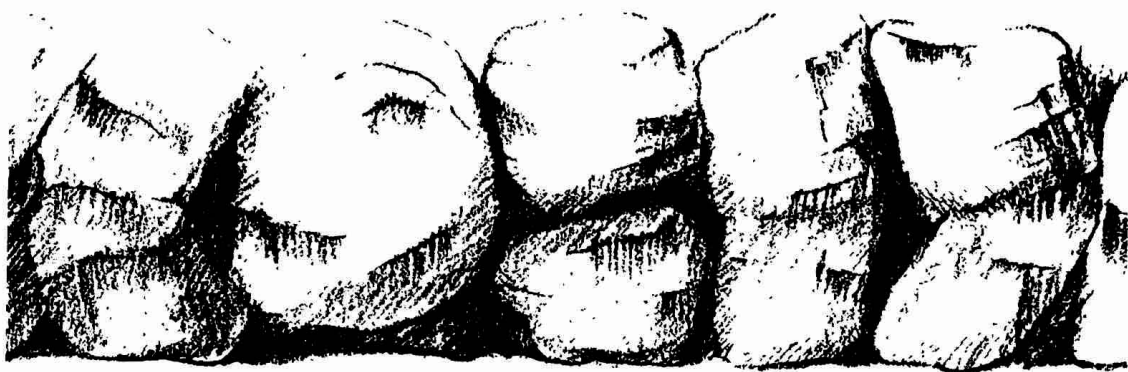


电子工业出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
<http://www.phei.com.cn>

PEARSON

传世经典书丛
Eternal Classics

一对学友如何启发了对纯数学的兴趣
并获得了终极幸福的故事



研究之美

SURR
NUMBERS

D. E. Knuth 著
高博译

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京•BEIJING

内 容 简 介

本书是计算机科学大师、“算法分析之父”高德纳 (Donald E. Knuth) 在 20 世纪 70 年代旅居挪威时撰写的适用于计算机科学的一种全新基础数学结构的情景小品。全书以一对追求自由精神生活的青年男女为主人公, 展开了一段对于该种全新结构的发现和构造的对白。在此过程中, 本书充分展示了计算机科学的从业人员进行全新领域探索时所必备的怀疑、立论、构造、证明、归纳、演绎等逻辑推理和深入反思的能力。本书可以看作是读懂高德纳的艰深著作《计算机程序设计艺术》和《具体数学》的钥匙。

Authorized Adaptation from the English language edition, entitled *SURREAL NUMBERS*, 1E, 9780201038125 by KNUTH, DONALD E., published by Pearson Education, Inc, publishing as Addison-Wesley, Copyright © 1974 by Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

All rights reserved. No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage retrieval system, without permission from Pearson Education, Inc.

ENGLISH language adaptation edition published by PEARSON EDUCATION ASIA LTD., And PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY Copyright © 2012

ENGLISH language adaptation edition is manufactured in the People's Republic of China, and is authorized for sale only in the mainland of China excluding Hong Kong and Macau.

本书中英文双语版专有出版权由培生教育出版集团亚洲有限公司授予电子工业出版社。仅限于中国大陆境内 (不包括中国香港、澳门特别行政区和中国台湾地区) 销售发行。未经许可, 不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

本书中英双语版贴有 Pearson Education 培生教育出版集团激光防伪标贴, 无标签者不得销售。版权所有, 侵权必究。

版权贸易合同登记号: 图字: 01-2011-8101

图书在版编目 (CIP) 数据

研究之美: 汉英对照 / (美) 高德纳 (Knuth, D.E.) 著; 高博译. —北京: 电子工业出版社, 2012.1
书名原文: *Surreal Numbers*
ISBN 978-7-121-15553-6

I. ①研… II. ①高… ②高… III. ①计算机科学普及读物 IV. ①TP3-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 264437 号

策划编辑: 郭 立 符隆美

责任编辑: 徐津平

印刷: 北京市顺义兴华印刷厂

装订: 三河市双峰印刷装订有限公司

出版发行: 电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱邮编 100036

开本: 787×980 1/16 印张: 12.75 字数: 132 千字

印次: 2012 年 1 月第 1 次印刷

印数: 4000 册 定价: 49.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题, 请向购买书店调换。若书店售缺, 请与本社发行部联系, 联系及邮购电话: (010) 88254888。

质量投诉请发邮件至 zltz@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线: (010) 88258888。

推荐序

最近几年科学技术和全球市场的变迁,已经越来越清楚地让我们看清了一个事实,那就是持续创新不仅已经成为企业发展的重要基石,甚至已经成为了企业生存的必要前提。这对微软和其他意图在激烈竞争中立于不败之地的企业来说,意味着要拥有马拉松式的创新耐力。

创新的基础是研究,主体是人才。研究机构的建设和创新人才培养,也是我们一直以来的专注和思考。没有研究人才多年如一日地甘于对未知世界的孤独探索,那些能够极大地提高生产力的科技,将不会诞生。

高德纳先生是世界公认的算法大师,他在计算机基础科学方面的很多研究成果,对现在乃至未来的信息产业,已经产生和必然发生深刻影响。他洋洋四卷的《计算机程序设计艺术》,更是被全世界的数学家和工程师奉为圭臬。

我很高兴地看到,他在 38 年前写成的一本讨论数学研究的书,能在今天被传译给中国读者。读完后,意料之中的是,本书果然反映了大师的智慧和思路;意料之外的是,原来数学也能以小说的形式来写!高德纳通过引人入胜的对白和推理来展开情节,为我们展现了数学、方程式、逻辑和算法之美。

研究是一种揭示客观规律的行为,但研究行为自身,也有其独特规律。高德纳先生的这本书,是他几十年智力和思维活动和工业实践的总结,从更高的层次上为我们揭示了研究行为自身的客观规律。从这个意义上说,本书的中文译名《研究之美》,是恰如其分的。

近些年,中国每年毕业的理工科毕业生有七八十万。这些有望成为具备研究能力、掌握研究规律的专门人才,是中国未来竞争力的关键。但遗憾的是,我也看到不少年轻人耐不住枯燥与寂寞,而中途放弃。

为此,衷心祝愿本书能为有志于投身研究事业的读者们,打开一扇趣味之门!

张亚勤

微软全球副总裁

微软亚太研发集团主席

2011 年 12 月 1 日于北京

PREFACE

Mathematics is the science of patterns, and I especially like the fact that we can use mathematical reasoning to deduce amazing consequences from only two or three simple rules.

One of the most beautiful topics in all of mathematics is the theory of surreal numbers, discovered by John Horton Conway about 1970. A few months after he told me about it, I decided that it would be fun to base a short story around his exciting ideas. Just as an opera consists of wonderful music together with a bit of a plot, I wanted to describe this wonderful mathematics together with a bit of a plot.

I was living in Norway at the time. In January of 1973 I rented a hotel room in downtown Oslo, near where Hendrik Ibsen once lived, in hopes that I might thereby capture some of Ibsen's spirit, and I spent six days writing this little book. On the seventh day I rested. It was the happiest week of my life!

Now, almost forty years later, I'm glad to see that people all over the world have enjoyed this story so much that they have translated it into many different languages. I have been reading many accounts these days about "Doctors Without Borders" and "Engineers Without Borders"; I like to think of myself as a Mathematician Without Borders. For thousands of years mathematics has been a worldwide enterprise, appreciated by people everywhere, and much of this development has occurred in China. Therefore I'm especially happy that this book now appears also in the Chinese language. (Also I'm pleased to note that the translator's name matches my Chinese name 'Gao De Na', which Frances Yao gave to me in 1977 when I was first invited to visit China.)

I sincerely hope that Chinese readers, young and old, will enjoy discovering the beautiful mathematical patterns that Conway has bequeathed to us.

Donald E. Knuth [Gao De Na]

序

数学是模式的科学。而我则尤其喜爱这样的事实,就是我们能够运用数学推理,由两三条平凡的规则出发,最终得出令人惊喜的结果。

在所有的数学领域中堪称是最美妙的主题之一,就是超现实数理论。它是由 John Horton Conway 在 1970 年左右发现的。在他告诉我这个理论数月之后,我产生了一个想法:如果能以他的绝妙想法为基础写个短篇故事,那该多么有趣呀。正如歌剧就是美妙的音乐加上那么一点儿情节,我也想在讲述这样美妙的数学时加上那么一点儿情节。

写作此书时我正旅居挪威。1973 年 1 月,我在奥斯陆市区租了一间宾馆的客房,离易卜生¹的故居很近,所以我指望能通过这种方式沾上点儿易卜生的灵气。然后,我花了六个工作日完成了这本小册子。而到了第七日,我就停下来休息。²这是我这辈子最快乐的一星期!

如今,事情已经过去了近四十年。我十分高兴地看到,全世界读者如此地喜爱这个故事,所以他们将它翻译成了很多不同的语言。最近一段时间,我读了不少有关“无国界医生”和“无国界工程师”³的故事,我也倾向于认为自己是一名无国界数学家。经历了千百年以后,数学已经成为了一项全球性的事业,吸引着身处所有地域的人为之奋斗,而其中相当一部分的进展都发生在中国。因此,这本书现在出版了简体中文版,是尤其令我欣喜的事。(同时我也愉快地发现译者的名字和我的中文名“高德纳”同姓,而我的中文名字乃是储枫⁴在我 1977 年首次访华时为我起的。)

我衷心希望中国的读者,无论是否仍然年轻,都能够从 Conway 留给我们的美妙数学模式中得到乐趣。

Donald E. Knuth (高德纳)

¹ 亨德利克·易卜生 (Hendrik Ibsen, 1828-1906), 挪威戏剧大师, 现代现实主义戏剧的创始人, 为国人耳熟能详的代表作有《玩偶之家》、《人民公敌》等。——译者注, 全书同

² 根据《圣经·创世纪》, 上帝以六日创生万物, 而第七日为安息日。

³ 无国界组织, 指一些专业人士号召摆脱种族、宗教和政治立场, 为全人类谋福祉而自发的组织。无国界医生 (Médecins Sans Frontières) 曾获 1999 年诺贝尔和平奖。

⁴ 储枫 (Frances Yao), 著名学者, 1973 年从麻省理工学院取得博士学位。曾在美国多所名校任教, 2004 年起在香港城市大学计算机科学系担任系主任。名字中的“Yao”为夫姓姚, 其夫为 2000 年图灵奖获奖者姚期智 (Andrew Yao)。

译者序

摆在诸位读者面前的,是一本可能会给您的一生带来重大转折契机的书。

这并非故弄玄虚,因为它的作者——计算机算法大师高德纳(Donald E. Knuth),以三卷本的《计算机程序设计艺术》(The Art of Computer Programming) 一举获得 IEEE 先驱奖和 ACM 图灵奖这两个计算科学界最高奖项。以出版物的成就拿到这两个奖项的,在历史上可谓空前绝后。《计算机程序设计艺术》是无可争辩的神作,毫不夸张地说,全世界和算法分析相关的一切著作,都直接或间接地与这套书有关。但是,能够真正读懂这套书的读者,真是凤毛麟角。且不说里面的数学分析,就算是为讲解算法所使用的程序语言也全是作者自行发明的一种理想机器所使用的,这对于读者的数学功底和抽象思维都提出了非常严苛的要求。所以,有一种说法是,拥有全套《计算机程序设计艺术》的人很多,但是读过十页以上的人则屈指可数。

可是,高德纳本人却一直都认为,再深入的研究也是从最简单的情況入手的。并且一旦掌握了几种做研究的固定套路,即使是普通人也不仅可以着手做研究,甚至还可能做出一流的成果来。这里所说的研究,并非一定是数学研究,而是指从一系列基本的事实或定义出发,通过若干明确的规则,推导出满足这些前提条件的有价值的结论。研究,是最能够体现人类心智的活动,也是创新乃至人类进步的根本源动力。每个人在每天的日常工作和生活中,都在进行着不同程度的研究活动。但是高德纳所主张的研究,既是自觉的、有目的的研究,更是一种工作和生活的基本态度。不仅仅是把研究看作是一种高级的智力活动,更是给心灵带来深层次乐趣的生活方式。唯有如此,才能使研究活动走出象牙塔,打破原本就不存在的条条框框,让每一个人都能领略研究带来的美学享受,提升生活的品质和境界。

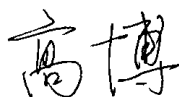
高德纳的博士学位是数学专业,他最得心应手的技术和工具自然也是数学。在本书中,他为了展示研究活动所涉及的方法和思维,也使用了数学作为演示工具。但是,为了尽可能地不让读者陷入具体的技术细节,大师采用了不仅在学术作品中绝无仅有,并且在科普作品中也

绝不多见的情景小品形式。这么一来,从研究问题的提出,到研究体系的构建,再到研究思路的形式,直到研究结论的得出,都通过男女主人公的对白完成。我想,大师这样另辟蹊径的意图,是想让我们把关注的焦点,始终放在研究过程而非具体的数学讨论上。从主人公发现问题的兴奋、遭遇困境的彷徨、探索出路的苦闷、得到结论的欣喜中,我们能够从观众视角充分地体会到研究那点事儿的方方面面,既明确了研究的要素,又了解了研究的方法。更重要的是,从这些对白中我们能够逐渐地明白,对同一问题的研究能够拉近人与人心灵的距离,使得人类之间的欣赏摆脱了低层次的物质追求和利益计算,乃至给生命本身带来升华,真正地使“终极幸福”成为可能。

纯粹从数学知识的角度来看,本书的内容是建立在集合论的基础之上的。数通过集合加以定义,数的顺序映射为集合的关系,而数的运算则映射为集合的运算。定义和规则只有简单的几条,并且非常直观易懂。但是由于数的定义已经从基础上被完全颠覆了,一切有关数的顺序和运算都必须重起炉灶。本书中,男女主人公不断地从基础定义出发,研究出了一系列的中间定理,并总结出若干反复运用的研究套路。最终发现,采用新方法定义的数所组成的集合,竟然是比实数系统更加稠密的数系。并且在这种新的数系中,无穷大量和无穷小量可以像普通的数那样参与运算,而且像“无穷大的一半是多少”这样在传统的实数连续统中没有定义的量,在新的数系中有着很明确的数学意义(实际上,该集合大致相当于现在称为 Grothendieck 宇集的集合,但是不了解这个背景完全不影响阅读)。更妙的是,可以发明一些不符合数的定义,却可以作为中间结果使得一些运算成立或简化的“伪数”,其地位相当于 $\sqrt{-1}$ 这个在人类的认识尚局限于实数的时代曾经一度被排斥的“异端”,可是最终人类却由此出发得出了给数学的进步带来了巨大推动力的复数……总之,内容精彩纷呈,欲知详情,请仔细阅读。大师的手笔,绝不会让你失望!

作为本书的译者,我感觉翻译的过程本身是充满愉悦的享受,可以说是一次与高德纳大师进行心灵对话的宝贵体验。以我个人的体会来说,本书只要仔细阅读,是连高中生都应该可以完全看懂的。即使一时静不下心来去读懂具体的推导过程,看看大师在主人公的对白中有意

插入和强调的那些研究所带来的普世价值,也是大有裨益的。本书成稿的过程中,得到了博文视点符隆美编辑的大力支持,没有她的关照和鼓励,我不可能这么快地完成全书的翻译。承美国南密西西比大学数学系丁玖教授抽出宝贵时间阅读了全书译稿,并提出了数十条专业意见。北京师范大学数学系的赵钊研究员也费心费力,对译稿的可读性和技术问题作了上百处修订。在此,向他们两位表示衷心的感谢。本书成稿过程中,上海交通大学计算科学与技术系的张尧弼教授和窦延平教授、上海交通大学软件学院的陈平教授、SAP 中国的范德成工程师、盛大创新院的刘海平研究员、微软亚洲工程院的王楠工程师、谷歌中国的龚理工程师、美光半导体的赵海源技术顾问、上海申通地铁集团的蒋振伟项目经理等都提出过若干稿件修正意见,在此一并致谢。当然,由于本人能力所限,本书的缺点和不足仍在所难免,这些理应由我一人负责。为向高德纳大师致敬,本书简体中文版采用大师本人发明的 \TeX 排版系统排版。我的老朋友、SAP 美国的技术咨询顾问劳佳同志在承担了排版工作的同时,亦费心费力在封面设计上帮了大忙,还对文稿内容有颇多指正之功,这里要特别致谢。我也想借此机会向在工作 and 生活上给了我莫大支持的父母和家人表达我内心最深处的敬意,希望本书的出版能给你们带来快乐。



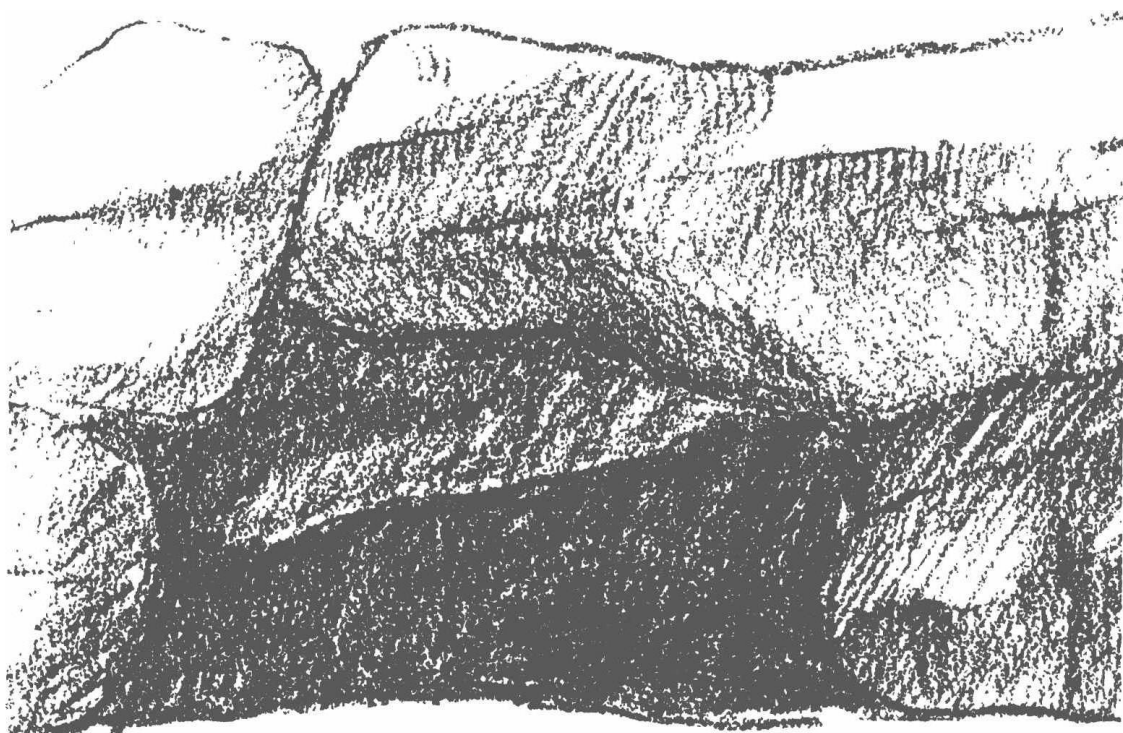
2011 年 12 月
于盛大集团上海总部

目 录

1	岩 石	1
2	符 号	11
3	证 明	21
4	坏 数	29
5	进 展	41
6	第三日	51
7	发 现	63
8	加 法	73
9	答 案	85
10	定 理	97
11	缘 定	109
12	灾 难	115
13	平 复	125
14	宇 宙	137
15	玄 极	149
16	乘 法	163
	跋	175

CONTENTS

1	The Rock	0
2	Symbols	10
3	Proofs	19
4	Bad Numbers	28
5	Progress	40
6	The Third Day	50
7	Discovery	62
8	Addition	72
9	The Answer	84
10	Theorems	96
11	The Proposal	108
12	Disaster	114
13	Recovery	124
14	The Universe	136
15	Infinity	148
16	Multiplication	162
	Postscript	174



A: Bill,你觉得你已经找到自我了吗?

B: 你说什么?

A: 我是说——我们现在身处印度洋的边缘,远离尘嚣。为了不被世俗的体系拖垮,我们逃离尘世来“寻找自我”,到现在算起来已有好几个月。我就是想了解一下,你觉得我们已经成功地做到这一点了吗?

- B. Actually, Alice, I've been thinking about the same thing. These past months together have been really great — we're completely free, we know each other, and we feel like real people again instead of like machines. But lately I'm afraid I've been missing some of the things we've "escaped" from. You know, I've got this fantastic craving for a book to read — *any* book, even a textbook, even a math textbook. It sounds crazy, but I've been lying here wishing I had a crossword puzzle to work on.
- A. Oh, c'mon, not a crossword puzzle; that's what your *parents* like to do. But I know what you mean, we need some mental stimulation. It's kinda like the end of summer vacations when we were kids. In May every year we couldn't wait to get out of school, and the days simply dragged on until vacation started, but by September we were real glad to be back in the classroom.
- B. Of course, with a loaf of bread, a jug of wine, and thou beside me, these days aren't exactly "dragging on." But I think maybe the most important thing I've learned on this trip is that the simple, romantic life isn't enough for me. I need something complicated to think about.
- A. Well, I'm sorry I'm not complicated enough for you. Why don't we get up and explore some more of the beach? Maybe we'll find some pebbles or something that we can use to make up some kind of a game.
- B. (sitting up) Yeah, that's a good idea. But first I think I'll take a little swim.
- A. (running toward the water) Me, too — bet you can't catch me!
-
- B. Hey, what's that big black rock half-buried in the sand over there?

B: 其实吧, Alice, 我也一直想着这事儿呢。这几个月过得真是开心——我们彻底解放了一把, 我们也了解了彼此, 并且我们总算又感觉到自己活得像个人样, 而不是像机器那种活法儿了。不过, 最近我老是在想那些我们以前总在竭力逃避的一些东西。你也看到了, 我着了魔似地想弄本书来翻翻——什么书都成, 即使是教科书, 甚至是数学教科书也无妨。听上去是不是我脑子有毛病了啊, 但我躺在这里的时候, 真希望哪怕有个纵横字谜让我填填也好啊。

A: 我说, 纵横字谜就算了吧, 那是老一辈的人才玩的东西了。不过我知道你是什么意思, 我们得来点儿脑力刺激才行。就像我们还是小孩子的时候, 放暑假的感觉。一到五月, 所有的小朋友们都迫不及待地想离开学校, 盼着暑假的那段日子可真是难熬, 可是到了九月开学, 我们还是兴高采烈地回到教室的。

B: 当然, 如果啃着香喷喷的面包, 又可以喝点儿小酒, 还有佳人如你在侧, 那段时间也不能说是“熬”过去的嘛。但是我觉得, 这次出游给我带来的最重要的感受是简单浪漫的生活并不能满足我。我需要一些更复杂的东西来思考才行。

A: 好吧, 看来我对你来说原来还不够复杂啊。那你何不一起来到海滩上多探探宝呢? 说不定还能找到一些鹅卵石什么的, 我们可以用它们想出什么新的游戏花样来。

B: (坐起身来) 好啊, 这个主意不赖。不过我想先游一小会儿泳再说。

A: (奔向海水) 我也要——你肯定追不上我!

.....

B: 看, 那边半埋在沙中的黑色大块岩石样的是什么?

- A. Search me, I've never seen anything like it before. Look, it's got some kind of graffiti on the back.
- B. Let's see. Can you help me dig it out? It looks like a museum piece. Unnh! Heavy, too. The carving might be some old Arabian script ... no, wait, I think it's maybe Hebrew; let's turn it around this way.
- A. Hebrew! Are you sure?
- B. Well, I learned a lot of Hebrew when I was younger, and I can almost read this. ...
- A. I heard there hasn't been much archaeological digging around these parts. Maybe we've found another Rosetta Stone or something. What does it say, can you make anything out?
- B. Wait a minute, gimme a chance. ... Up here at the top right is where it starts, something like "In the beginning everything was void, and ..."
- A. Far out! That sounds like the first book of Moses, in the Bible. Wasn't he wandering around Arabia for forty years with his followers before going up to Israel? You don't suppose ...
- B. No, no, it goes on much different from the traditional account. Let's lug this thing back to our camp, I think I can work out a translation.
- A. Bill, this is wild, just what you needed!
- B. Yeah, I did say I was dying for something to read, didn't I. Although this wasn't exactly what I had in mind! I can hardly wait to get a good look at it — some of the things are kinda strange, and I can't figure out whether it's a story or what. There's something about numbers, and ...
- A. It seems to be broken off at the bottom; the stone was originally longer.

A: 我真的不知道呀,以前还从来没有见过这样的家伙呢。你看,在它背后有一些像是涂鸦的东西呢!

B: 我来看看。能帮我把它挖出来吗? 这像是个老古董了。哟! 还挺沉的。这些雕文像是一些阿拉伯文字……不,等等,我觉得好像是希伯来文。我们把它翻过来这样看看。

A: 希伯来文! 你确定吗?

B: 那个,我小时候学过不少希伯来文,这上面的文字应该差不多都能看懂……

A: 我并没有听说这一带有过很多考古发掘。也许我们又发现了一块罗塞塔石碑 (Rosetta Stone)¹什么的。它上面写了什么,你能看出门道来吗?

B: 等一下,让我试试……那个上面,右上角是文字开始的地方,好像是“初,万物混沌苍茫,尔后……”

A: 好棒! 这听起来像是《圣经》里摩西写的第一卷经书哦。那个不是摩西和他的追随者们在动身去往以色列之前在阿拉伯彷徨了四十年的事儿吗? 难道……

B: 不,不,这上面写的和古典经文可是大相径庭。咱们先把这个搬到帐篷里去,我想我可以把它翻译出来。

A: Bill,真不可思议啊,这正是你想要的!

B: 对,我是说过我想找点儿什么看看都快想疯了,对吧。尽管这玩意儿和我脑子里想到的东西并不太一样! 可我已经等不及想仔细对这东西研究研究——它看起来有点儿不寻常,我还不能断定它上面写的是个故事还是什么别的东西。好像有一些和数有关的内容,还有……

A: 这石头好像从底部断开来了,它原本更长一些的。

¹ 一块制作于公元前 196 年的大理石石碑,刻有埃及国王托勒密五世 (Ptolemy V) 的诏书。由于这块石碑刻有同一段文字的三种不同语言版本,近代的考古学家得以有机会对照内容,解读出已经失传千余年的埃及象形文的意义与结构。

- B. A good thing, or we'd never be able to carry it. Of course it'll be just our luck to find out the message is getting interesting, right when we come to the broken place.
- A. Here we are. I'll go pick some dates and fruit for supper while you work out the translation. Too bad languages aren't my thing, or I'd try to help you.
-
- B. Okay, Alice, I've *got* it. There are a few doubtful places, a couple signs I don't recognize; you know, maybe some obsolete word forms. Overall I think I know what it says, though I don't know what it means. Here's a fairly literal translation:

In the beginning, everything was void, and J. H. W. H. Conway began to create numbers. Conway said, "Let there be two rules which bring forth all numbers large and small. This shall be the first rule: Every number corresponds to two sets of previously created numbers, such that no member of the left set is greater than or equal to any member of the right set. And the second rule shall be this: One number is less than or equal to another number if and only if no member of the first number's left set is greater than or equal to the second number, and no member of the second number's right set is less than or equal to the first number." And Conway examined these two rules he had made, and behold! They were very good.

And the first number was created from the void left set and the void right set. Conway called this number "zero," and said that it shall be a sign to separate positive numbers from negative numbers. Conway proved that zero was less than or equal to zero, and he saw that it was good. And the evening and the morning were the day of zero. On the next day, two more numbers were created, one