差分系统的稳定性

STABILITY ON DIFFERENCE SYSTEMS

郑光 著

中国社会出版社

责任编辑：陈汝涌等

封面设计：王海滨

ISBN 7-5087-0616-1

9 787508 706160 >

ISBN 7-5087-0616-1/I·181

定价：28.00元

差分系统的稳定性

STABILITY ON FFERENCE SYSTEMS

郑光 著

中国社会出版社

图书在版编目（CIP）数据

差分系统的稳定性/郑 光著.—北京：中国社会出版社，2005.8

ISBN 7-5087-0616-1

Ⅰ.差… Ⅱ.郑… Ⅲ.教育-高教-数学 Ⅳ.I247.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 075582 号

差分系统的稳定性

STABILITY ON DIFFERENCE SYSTEMS

著　　者：郑 光

出版发行：中国社会出版社

通联地址：北京市西城区二龙路甲 33 号新龙大厦

邮政编码：100032

经　　销：各地新华书店

开　　本：850×1168mm　大 32 开

印　　张：12

字　　数：268 千字

版　　次：2005 年 8 月第 1 版

印　　次：2005 年 8 月第 1 次印刷

书　　号：ISBN 7-5087-0616-1/I・181

定　　价：28.00 元

序 言

离散与连续是自然界中物质运动对立统一的两个方面。离散数学与连续数学是描述、刻画和表达现实世界物质运动的两种有利工具。从数学理论来说，往往有人认为，连续的结果与离散的结果是可以互相推导的。但是，离散数学的基本原则却不能完全由连续数学取代，它有自己的理论基础。特别是在电子信息技术迅速发展的今天，离散数学自然就成了计算机、信息系统、工程控制、生态环境、社会经济等科学技术的重要理论基础之一。另一方面，随着近代科学技术的突飞猛进，对于控制理论学家、经济学家以及生物学家来说，常差分系统（或时滞差分系统）已经成为一个重要且非常实用的数学模型。近几年来由于医学、生物数学、现代物理等自然科学和边缘性学科的进一步发展，亦提出了许多由离散系统描述的具体数学模型。再则，在微分方程离散化方法的研究中也出现许多差分方程，我们仅仅局限于差分方程的迭代计算是不够的，而应当对差分系统解序列的全局定性结构进行分析，然后再进行计算和数值分析，这样才能更好地解决实际问题。所以，现在越来越有必要系统地研究差分系统解序列的各种属性，才能适应当今信息时代科学技术迅速发展的要求。这就是作者编写本书的动机。

众所周知，关于常微分方程所描述的系统的稳定性，自十九世纪末由俄罗斯著名数学家 A. M. Liapunov 的著名博士论文“运动稳定性的一般问题”开始，人们经过一个多世纪的努力，特别是上世纪 50 年代以来，这门学科普遍得到了重视，近年来世界各国都出版了有关这个学科方向的专著。可是关于由差分方程描述的离散动力系统的稳定性，直到 1960 年才在 R . E. Kalman 与 J. E. Bertram 所发表的论文

中略有系统地论及，许多结果并未仔细严格论证，近 30 年来这方面的研究成果还比较分散，尚未得到较全面和系统的总结和综述。总结性的论文和专著不多。特别是在国内，仅有我国著名学者王联、王慕秋合著的《常差分方程》一书。一般计算数学工作者都致力于各种差分系统的计算方法，数值计算误差分析以及保证计算精度符合实际的要求等等，而缺乏对差分系统本身的解序列进行定性的理论分析和研究；而从事常微分方程定性分析的工作者也很少去研究差分系统解序列的定性结构。事实上对一般的非线性差分系统解序列的全局定性结构，从理论上彻底分析清楚也并不是一件容易的事，所以系统地开展对差分系统解序列的各种属性的定性研究，不仅有其重要的理论意义，而且有其实际应用价值。

作者从 1999 年开始对这个课题的学习和研究，主要是为自己的博士论文《概周期离散系统的稳定性研究》做必要的准备。关于概周期离散系统的稳定性将在另一本书中介绍。本书的内容是这样安排的：首先在前三章中介绍差分系统的一些基本理论，其次就是介绍离散系统的稳定性理论，它包括了迄今为止国内外在这一领域的研究现状，最后介绍有关时滞差分系统解序列的稳定性理论。作者主观上希望本书的编写，从内容的取舍方面、理论的完整方面、问题的阐述方面以及定理的论证思路和方法的简练方面，易于为读者所接受。但是，由于作者的学识水平所限，书中的不妥之处甚至错误在所难免，恳请读者批评指正。

承蒙浙江财经学院的领导和科研处同志们热情支持，作者深表感谢。

郑光
2005 年 8 月于杭州
浙江财经学院

目　录

第一章　预备知识

§1.0　引　言

这一章首先介绍连续动力系统与离散动力系统的概念，接着指出离散动力系统与差分方程系统之间的对应关系，并介绍最简单的一阶线性差分方程的解法以及十分有用的比较定理，为以后各章作好必要的准备。

§1.1　动力系统

我们采用以下记号：

C－复数空间，C^m－m 维复数空间，R－实数轴，R^+－非负实数全体，R^m－m 维欧氏实数空间，N－整数集，N^+－非负整数全体，$N_{x_0}^+=\{x_0,x_0+1,\cdots,x_0+k,\cdots\}$，其中$x_0\in R$，$\|\cdot\|$－欧氏范数。

定义 1.1　R^m 上的动力系统是满足下述性质的映射

$$\pi: R\times R^m\to R^m,$$

(i)　　$\pi(0,x)=x$，　　对于$x\in R^m$；

(ii)　　$\pi(t,\pi(\tau,x))=\pi(t+\tau,x)$，　　◆于$t,\tau\in R$及$x\in R^m$；

(iii)　　π 为连续映射。

注1. 若将定义 1.1 中的 R 处处换为 R^+，则 π 称为 R^m 上的半动力系统。

注2. 定义 1.1 中的(ii)称为半群性质。

注3. 定义 1.1 中的 π 也称为连续(半)动力系统。

定义 1.2 R^m 上的离散动力系统是满足下述性质的映射

$$\pi : N \times R^m \to R^m$$

(i) $\pi(0, x) = x,$ 对于 $x \in R^m$;

(ii) $\pi(n, \pi(k, x)) = \pi(n+k, x)$, 对于 $n, k \in N$ 及 $x \in R^m$;

(iii) $\pi(n,x)$ 关于 x 为连续。

注4. 若将定义 1.2 中的 N 处处换为 N^+，则 π 称为 R^m 上的离散半动力系统。但在以下的讨论中往往将“半”字略去而称为离散动力系统，或更简短地，离散系统。

例1.1 考虑自治微分方程系统:

$$\dot{x}(t) = f(x)$$

其中 $t \in R, x \in R^m$.我们假定过任一点 $(t_0, x_0) \in R \times R^m$ 的解 $x(t; t_0, x_0)$ 在 R 上存在且唯一。定义映射 $\pi : R \times R^m \to R^m$ 如下:

$$\pi(t, x_0) = x(t, 0, x_0) \qquad 对于 t \in r 及 x_0 \in R^m$$

则易见定义 1.1 中的条件(i)满足：π (0, $x_0) = x(0; 0, x_0) = x_0$，而

因系统是自治的及解之唯一性得

$$\pi(t,\pi(\tau,x_0))=x(t;0,\pi(\tau,x_0))=x(t;0,x(\tau;0,x_0))$$

$$=x(t+\tau;0,x_0)=\pi(t+\tau,x_0)$$

又由解之唯一性可推出解对初值的连续依赖性，故(iii)也满足。因而以上定义的映射 π 为 R^m 上的(连续)动力系统。

例1.2　考虑自治差分方程系统

$$x(n+1)=f(x(n))$$

其中 $n\in N$，$x\in R^m$.显然若 f(x)对 $x\in R^m$ 有定义，则过任一点 $(n_0,x_0)\in N^+\times R^m$ 的解 $x(n;n_0,x_0)$ 在 $N^+_{n_0}$ 上存在且唯一。若定义映射 $\pi:N^+\times R^m\to R^m$ 为

$$\pi(n,x_0)=x(n;0,x_0)\qquad 对于 n\in N^+ 及 x_0\in R^m$$

则同样容易验证 π 为 R^m 上的离散(半)动力系统。

易知：初值问题

$$x(n+1)=f(x(n)),$$

$$x(0)=x_0$$

的解为 $\quad x(n)=f^n(x_0)$

其中 f^n 为 f 的 n 次迭合：$f^n=f(f^{n-1})$,而 $f^0=I$,I 为恒等映射。

于是，每一个差分方程系统(1.1)定义了一个离散(半)动力系统 π：

$$\pi(n,x_0)=f^n(x_0)$$

反之，对应于每一个离散(半)动力系统π我们有一个差分方程系统

$$x(n+1)=f(x(n))$$

其中 f(x)= π(1,x).为此，我们将关注于差分系统(1)的研究。

§ 1.2　差分方程与差分系统

首先，我们引入差分算子Δ及位移算子 E 的定义如下：

定义 2.1　设 $x: N^+ \to C^m$，则差分算子 $\Delta: C^m \to C^m$ 定义为

$$\Delta x(n)=x(n+1)-x(n)$$

而位移算子 E：$C^m \to C^m$ 则定义为

$$Ex(n)=x(n+1)$$

并且定义

$$\Delta^n=\Delta(\Delta^{n-1}), E^n=E(E^{n-1}), 及\Delta^0=E^0=I.$$

不难验证：算子Δ与 E 均为线性的，且可交换，即ΔE=EΔ；又Δ=E−I 或 E=Δ+I。

定义 2.2　一般形式的 k 阶差分系统由下式所给出：

$$F(n,x(n),\Delta x(n),\cdots,\Delta^k x(n))=0 \tag{2.1}$$

或者

$$G(n,x(n),Ex(n),\cdots,E^k x(n))=0 \tag{2.2}$$

其中 $x: N_{n_0}^+ \to C^m$,而$F,G: N_{n_0}^+ \times \widetilde{D} \to C^m$ 对于 $C^m \times C^m \times \cdots \times C^m$

的某个子集$\widetilde{\mathrm{D}}$。

定义 2.3 若(2.1)（或(2.2)）中的 F（或 G）关于$x(n),\Delta x(n)$，$\cdots,\Delta^k x(n)$ (或相应地$\mathrm{x(n),Ex(n),\cdots,E^k x(n)}$)为线性，则系统称为是线性的，否则称为非线性的。

定义 2.4 k 阶差分系统的正规形式定义为

$$\mathrm{E^k x(n) = f(n, x(n), \cdots, E^{k-1} x(n))}$$

亦即

$$\mathrm{x(n+k) = f(n, x(n), x(n+1), \cdots, x(n+k-1))} \qquad (2.3)$$

其中 f: $\mathrm{N_{n_0}^{+} \times D \to C^m}$对于$\overbrace{\mathrm{C^m, C^m, \cdots, C^m}}^{\text{k个}}$中的某子集 D.

定义 2.5 若系统(2.3)中的 f 不显含 n，则它称为自治的，否则，称为非自治的。

定义 2.6 对任意取定的$(\mathrm{a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}}) \in \mathrm{D}$,所谓初值问题

$$\begin{cases} x(n+k) = f(n, x(n), x(n+1), \cdots, x(n+k-1)) & (2.3) \\ x(n_0) = a_0, x(n_0+1) = a_1, \cdots, x(n_0+k-1) = a_{k-1} & (2.4) \end{cases}$$'

的解是指序列$\{\mathrm{x(n)}\}$它对于$\mathrm{n \ge n_0}$满足系统(2.3);而对于$\mathrm{n = n_0}$，$n_0+1, \cdots, n_0+k-1$ 满足初始条件(2.4).为明确起见，此解记为$x(n; n_0, \varphi)$,其中$\varphi = (a_0, a_1, \cdots, a_{k-1})$，但有时也简记为 x(n)。

对于初值问题(2.3)－(2.4)，我们有如下的存在唯一性定理。

定理 2.1 初值问题(2.3)－(2.4)具有唯一解 $x(n;n_0,\varphi)$，它对所有 $n \geq n_0$ 有定义，只要 f 的诸变元不越出其定义域。

证明：易见，当 $n = n_0 + k$ 时 x(n)唯一地由下式所确定

$$x(n_0 + k) = f(n_0, a_0, a_1, \cdots, a_{k-1})$$

由迭代法，我们依次可得：

$$x(n_0 + k + 1) = f(n_0 + 1, a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}, x(n_0 + k))$$
$$x(n_0 + k + 2) = f(n_0 + 2, a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}, x(n_0 + k), x(n_0 + k + 1))$$ 从

…………

而可确定出对于 $n \geq n_0$ 有定义的唯一解 x(n). 证毕。

注1. 由定理 2.1 所表明的差分系统的解的值可以循环递次地得出。这一性质是十分重要的。这是其他的别的系统所不具有的。由于电子计算技术的发展，我们可在一瞬间完成大量的计算，从而我们可在短时间内得出差分系统解的大量值。正是鉴于这一原因，我们将连续问题化为近似的离散问题。然而，得出解的这种方法纵然对于某些目的非常有效，对于另外一些目的则是不够的。例如，它并不给出关于解的渐近性态的信息，除非我们愿意接受付出非常高的费用。因而，求得解的闭的解析形式，或者由某种其他方法得出关于解的定性性质的信息就具有很重要的意义。

注2. 差分系统初值问题(2.3)－(2.4)解的存在唯一性仅对 $n \geq n_0$ 而言。一般说来，对于 $n < n_0$，满足(2.3)的 x(n)是否存在，并没有保证。因而解的存在性只是正向而不是双向的。

注3.　　最后我们指出，若特别地 m=1，则相应的差分系统称为差分方程。但有时也用差分方程泛指差分系统或差分方程。

§ 1.3　一阶线性差分方程

本节我们讨论一阶线性差分方程:

$$x(n+1)=p(n)x(n)+q(n) \tag{3.1}$$

的求解，其中 $x\in R$, $n\in N^{+}$,p(n),q(n)均为给定的序列，并设

$p(n)\neq 0$, $n\in N^{+}$。

若 q(n)=0,对所有 $n\in N^{+}$，则(3.1)化为

$$x(n+1)=p(n)x(n) \tag{3.2}$$

称之为线性齐次差分方程，否则称为非齐次的。

我们将证明下述定理。

定理 3.1　方程(3.1)的通解可表示为下述有限形式

$$x(n)=\sum_{i=0}^{n-1}q(i)\sum_{j=i+1}^{n-1}p(i)+c\prod_{i=0}^{n-1}p(i)$$

其中 c 为常数。我们始终约定 $\prod\limits_{i=n+1}^{n}a(i)=1$及 $\sum\limits_{i=n+1}^{n}a(i)=0$.

证明:　　令 $P(n)=\prod\limits_{i=0}^{n1}p(i)$,并约定 P(0)=1.用 P(n+1)除(3.1)的两边

得:　　$$\frac{x(n+1)}{P(n+1)}=\frac{x(n)}{P(n)}+\frac{q(n)}{P(n+1)}$$

或

$$\frac{x(n+1)}{P(n+1)}-\frac{x(n)}{P(n)}=\frac{q(n)}{P(n+1)}$$

若记 $y(n)=\dfrac{x(n)}{P(n)}, g(n)=\dfrac{q(n)}{P(n+1)}$，则上式化为 $\Delta y(n)=g(n)$

从而

$$y(n)=\sum_{i=0}^{n-1}\Delta y(i)+y(0)=\sum_{i=0}^{n-1}g(i)+y(0)$$

设 x(0)=c,c 为任意常数，则 $y(0)=\dfrac{x(0)}{P(0)}=c$.于是

$$\begin{aligned}
x(n)&=P(n)\sum_{i=0}^{n-1}\frac{q(i)}{P(i+1)}+cP(n)\\
&=(\prod_{i=0}^{n-1}p(i))\sum_{i=0}^{n-1}(q(i)\Big/\prod_{j=0}^{i}p(j))+c\prod_{i=0}^{n-1}p(i)\\
&=\sum_{i=0}^{n-1}q(i)\prod_{j=i+1}^{n-1}p(j)+c\prod_{i=0}^{n-1}p(i)
\end{aligned}$$

注意到 c＝x(0)，故得。证毕。

推论 3.1 初值问题

$$\begin{cases}x(n+1)=p(n)x(n)+q(n), & p(n)\neq 0, n\in N^{+}\\ x(0)=x_0\end{cases}$$

的解为

$$x(n)=\sum_{i=0}^{n-1}q(i)\prod_{j=i+1}^{n-1}p(j)+x_0\prod_{i=0}^{n-1}p(i)$$

一般地，运用同样的论证可得

推论 3.2 初值问题

$$\begin{cases}x(n+1)=p(n)x(n)+q(n), & p(n)\neq 0, n\in N^+\\ x(n_0)=x_0 & n_0\in N^+\end{cases}$$

的解为

$$x(n)=\sum_{i=n_0}^{n-1}q(i)\prod_{j=i+1}^{n-1}p(j)+x_0\prod_{i=n_0}^{n-1}p(i)$$

推论 3.3 齐次初值问题

$$\begin{cases}x(n+1)=p(n)x(n) & p(n)\neq 0, n\in N^+\\ x(n_0)=x_0 & n_0\in N^+\end{cases}$$

的解为

$$x(n)=x_0\prod_{i=n_0}^{n-1}p(i)$$

例3.1 考虑非齐次方程

$$x(n+1)-\alpha x(n)=\beta \tag{3.3}$$

其中 α，β 为常数。对照定理 3.1 知 $p(n)=\alpha, q(n)=\beta$，从而

$$\sum_{i=0}^{n-1}q(i)\prod_{j=i+1}^{n-1}p(j)=\sum_{i=0}^{n-1}\beta\prod_{j=i+1}^{n-1}\alpha=\beta\sum_{i=0}^{n-1}\alpha^{n-i-1}=\beta\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$$

于是当 $\alpha\neq 1$ 时，(3.3)的通解为