

高等院校 **精品课** 系列教材



高等院校经济数学系列教材

高等数学

(第三版)

上海财经大学应用数学系 编

GAODENG
SHUXUE

 上海财经大学出版社

• 高等院校精品课系列教材 •

高等院校经济数学系列教材

高等数学

(第三版)

上海财经大学应用数学系 编

 上海财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/上海财经大学应用数学系编. —3版. —上海:上海财经大学出版社, 2010. 8

高等院校精品课系列教材

高等院校经济数学系列教材

ISBN 978-7-5642-0850-9/F · 0850

I. ①高… II. ①上… III. ①高等数学-高等学校-教材
IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 155515 号

☐ 责任编辑 刘光本

☐ 封面设计 周卫民

GAODENG SHUXUE

高等数学

(第三版)

上海财经大学应用数学系 编

上海财经大学出版社出版发行
(上海市武东路 321 号乙 邮编 200434)

网 址: <http://www.sufep.com>

电子邮箱: webmaster@sufep.com

全国新华书店经销

同济大学印刷厂印刷

宝山葑村书刊装订厂装订

2010 年 8 月第 3 版 2010 年 8 月第 1 次印刷

787mm×960mm 1/16 31.5 印张 670 千字

印数: 20 001—25 000 定价: 37.00 元

第三版前言

本教材是精品课程建设项目的成果。自从本书第一、二版出版以来,得到了广大读者的肯定,同时也收到了许多宝贵的意见和建议。我们在使用的过程中,也发现了不少需要改进的地方,有些内容需要调整,有些例子不尽合适,需要进一步的精雕细刻。为此,我们对本教材进行再一次修订,形成了这个版本。在修订的过程中,保持了原貌,调整了部分内容,修正了一些不恰当之处,使之得到一定的完善。整个修订过程由叶玉全、殷承元教授负责统稿,戴滨林和杨爱珍老师对部分内容做了细致的修正。另外,在修订的过程中,我系胡业新、杨世海、胡军其、王清华、罗万钧和张立柱等老师就使用本教材教学的体会对教材提出了许多建设性的意见,在此表示感谢!但是,由于我们水平有限及可能的疏忽,一定还存在不尽如人意之处,敬请广大读者批评指正。

上海财经大学应用数学系
2010年8月

第二版前言

随着经济金融及管理学科研究和应用的不断深入,对数学的要求在不同层次上也都在不断地提高。不仅在数学的知识面上需要扩大,而且在理论的深度上需要加大。因此,我们这些从事经济金融及管理类本科生的《高等数学》和《微积分》教学多年的工作者义不容辞地要做好这方面的工作。

起初,经管类本科生的数学用教材大都称为《微积分》,现在有的仍然用之。后来,相应的《高等数学》作为经管类本科生的数学用教材也相继出现。为促进相关的数学教学起到了不少作用。从书名看,《微积分》和《高等数学》好像有很大的区别,其实主要的内容是一致的。只是,《高等数学》在理论上和知识面上都高于《微积分》。不过这样小小的区分,对不同专业的不同要求的教学提供方便的教材,是非常有益的。

国内外的《微积分》(Calculus)和《高等数学》(Advanced Mathematics)教材的版本可以说数以千计。对不同的国家、不同层次的学生都起着相应的作用,都各自培养出相应的人才。我们上海财经大学近五年来,上到校领导,下到有关的师生,都非常重视数学的教学和研究,学校将《高等数学》作为精品课程来认真建设。编写了《高等数学》教材,反映不错,一版再版。我们这些年的使用也有很大的效用,近年来我校学生考研的高数成绩有了很大的提高。

但是,在教学过程中我们发现确实也有一些方面需要改进,如所有经管类学生都用同一教材有失实事求是之作风。因此,我们将在我系原有的《高等数学》基础上,进一步完善提高,融入我们近年来的教学体会,编写这里的两本针对经济金融及管理学科使用的《高等数学》和《微积分》,这将对培养相应的管理和研究人才起到一定的



作用。

编写时,我们以教育部的教学大纲为准绳,以研究生考试大纲为核心,以专业要求为目标。侧重于数学的必要的理论、全面的知识及经济中的应用,培养学生具有良好的数学素养、严谨的思维方式、严格的推理习惯以及应用数学于相应专业的能力,以达到培养高级的经济类人才的目的。叙述深入浅出,经管应用突出,可读性强,便于教与学。通过这门课程的学习,学生可以掌握观察事物、分析事物的思路以及严密的推理观念。使学生不仅学到了知识,更是开启了智慧,从而对学生之后的进一步学习和工作都极其有益。

为了做好这一工作,上海财经大学应用数学系非常重视,成立了以系主任梁治安教授、系副主任何其祥先生为核心的编写小组。

参加编撰的老师是:戴滨林,卢慧芳,罗万钧,叶玉全,杨爱珍,殷承元,魏枫。

本册《高等数学》由叶玉全、殷承元负主责统编。其他分工为:1~3章由叶玉全编写,4~6章由杨爱珍编写,7~9章由戴滨林编写,10~12章由殷承元编写。

上海财经大学出版社的刘光本博士为本书的出版付出了艰苦的劳动。他的认真编辑为本书增色不少,在此表示我们衷心的感谢。

尽管我们认真编撰、仔细审查,但毕竟水平有限,错误难免,我们真诚希望广大读者多多指教。

上海财经大学应用数学系
2008年2月

目 录

第三版前言	(1)
第二版前言	(1)
第一章 函数与极限	(1)
第一节 函数	(1)
第二节 极限的概念与性质	(14)
第三节 极限的运算	(29)
第四节 函数的连续性	(42)
习题一	(50)
第二章 导数与微分	(54)
第一节 导数概念	(54)
第二节 基本的导数公式与运算法则	(64)
第三节 高阶导数	(72)
第四节 隐函数与参数式函数的导数	(74)
第五节 函数的微分	(81)
习题二	(87)



第三章 中值定理与导数的应用	(91)
第一节 微分中值定理	(91)
第二节 泰勒公式	(100)
第三节 洛必达法则	(107)
第四节 函数单调性的判别法	(113)
第五节 函数的极值及其求法	(117)
第六节 函数的最值	(120)
第七节 曲线的凹向与拐点	(122)
第八节 函数图形的描绘	(127)
第九节 导数在经济分析中的应用	(132)
习题三	(140)
第四章 不定积分	(145)
第一节 不定积分的概念与性质	(145)
第二节 不定积分的换元积分法	(151)
第三节 不定积分的分部积分法	(158)
第四节 几种特殊类型函数的积分	(161)
习题四	(167)
第五章 定积分	(172)
第一节 定积分的概念与性质	(172)
第二节 微积分的基本定理	(180)
第三节 定积分的换元积分法	(186)
第四节 定积分的分部积分法	(190)
第五节 广义积分	(193)
习题五	(205)
第六章 定积分的应用	(212)
第一节 定积分的微元法	(212)
第二节 定积分的几何应用	(213)
第三节 定积分在经济上的应用	(226)
第四节 定积分在物理学上的应用	(231)

习题六	(235)
第七章 空间解析几何	(239)
第一节 空间直角坐标系	(239)
第二节 向量及其应用	(241)
第三节 二三阶行列式和向量积	(246)
第四节 平面及其方程	(249)
第五节 直线及其方程	(251)
第六节 二次曲面及一般曲面	(255)
习题七	(261)
第八章 多元函数的微分及其应用	(265)
第一节 多元函数的基本概念	(265)
第二节 偏导数	(275)
第三节 全微分	(278)
第四节 方向导数与梯度	(284)
第五节 中值定理与泰勒公式	(286)
第六节 隐函数的求导公式	(289)
第七节 空间曲线的切线与空间曲面的切平面	(295)
第八节 极值和最值问题	(299)
第九节 偏导数在经济学中的应用	(305)
习题八	(308)
第九章 重积分	(314)
第一节 二重积分	(314)
第二节 二重积分的计算	(318)
第三节 三重积分及其计算	(328)
第四节 重积分的应用	(337)
习题九	(341)
第十章 曲线积分与曲面积分	(345)
第一节 对弧长的曲线积分	(345)



第二节	对坐标的曲线积分	(349)
第三节	格林公式	(354)
第四节	对面积的曲面积分	(359)
第五节	对坐标的曲面积分	(362)
第六节	两类曲面积分之间的联系	(368)
第七节	高斯公式与斯托克斯公式	(370)
习题十		(382)
第十一章	级数	(391)
第一节	级数的概念及其性质	(391)
第二节	正项级数的收敛判别法	(395)
第三节	条件收敛与绝对收敛	(400)
第四节	幂级数	(401)
第五节	幂级数的收敛性	(404)
第六节	泰勒公式和泰勒级数	(408)
第七节	傅立叶级数	(415)
习题十一		(424)
第十二章	微分方程与差分方程简介	(429)
第一节	微分方程的概念	(429)
第二节	可分离变量的微分方程	(431)
第三节	一阶线性微分方程	(435)
第四节	全微分方程	(438)
第五节	一阶隐式方程与可降阶方程	(441)
第六节	线性微分方程解的结构	(443)
第七节	差分方程	(450)
习题十二		(455)
习题参考答案		(460)

第一章 函数与极限

函数的微积分及其应用是高等数学研究的内容,而极限是研究函数的微积分的工具.正确地理解极限理论,掌握好求极限的基本方法,对学好高等数学是十分重要的.本章将介绍函数、极限以及函数连续性等基本内容.

第一节 函 数

一、函数概念及其表示法

定义 1.1 设 X 和 Y 是两个非空集合,如果存在一个法则 f ,使得对 X 中每个元素 x ,按照法则 f 在 Y 中有惟一确定的元素与之对应,则称 f 为从 X 到 Y 的映射,记作

$$f: X \rightarrow Y,$$

其中 y 称为元素 x (在映射 f 下)的像,并且记作 $f(x)$,即

$$y = f(x),$$

而元素 x 称为元素 y (在映射 f 下)的原像;集合 X 称为映射 f 的定义域,记作 D_f ,即 $D_f = X$;集合 X 中所有元素的像所组成的集合称为映射 f 的值域,记作 R_f 或 $f(X)$,即

$$R_f = f(X) = \{f(x) | x \in X\}.$$

函数作为一种特殊的映射,定义如下:

定义 1.2 设数集 D (D 为非空集合) $\subset \mathfrak{R}$ ($\mathfrak{R}$ 为实数集),则称映射 $f: D \rightarrow \mathfrak{R}$ 为定



义在 D 上的函数,通常简记为

$$y=f(x), x \in D,$$

其中 x 称为自变量, y 称为因变量, D 为定义域.

在上面的函数定义中,对每个 $x \in D$,按对应法则 f ,总有惟一确定的值 y 与之对应,这个值称为函数 f 在 x 处的函数值,记作 $f(x)$,即 $y=f(x)$. 因变量 y 与自变量 x 之间的这种依赖关系称为函数关系. 函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的值域,记作 R_f 或 $f(D)$,即

$$R_f = f(D) = \{y | y = f(x), x \in D\}.$$

从函数的定义中不难看出,定义域与对应法则是构成函数的两个基本要素. 如果两个函数的定义域与对应法则都分别相同,则称这两个函数相同.

例 1 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \lg(4-x^2) + \arcsin(2x-1); \quad (2) y = \frac{\sqrt{x+2}}{|x|-x}.$$

解 (1) 由 $\begin{cases} 4-x^2 > 0 \\ |2x-1| \leq 1 \end{cases}$ 可得 $0 \leq x \leq 1$, 于是,所求的函数定义域为 $[0, 1]$.

(2) 由 $\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ |x|-x \neq 0 \end{cases}$ 可得 $-2 \leq x < 0$, 所求的函数定义域为 $[-2, 0)$.

例 2 某工厂生产某型号车床,年产量为 a 台,分若干批进行生产,每批生产后入库,再投放市场,每批生产准备费为 b 元,设产品均匀投入市场,且上一批用完后,下一批产品立即入库,即平均库存量为批量的一半. 设每台每年库存费为 c 元. 显然,生产批量大则库存费高,生产批量少则批数增多,因而生产准备费高. 为了选择最优批量,试求出一年中库存费与生产准备费的和同批量的函数关系,并求得函数的定义域.

解 设批量为 x , 库存费与生产准备费的和为 $f(x)$, 那么每年生产的批数为 $\frac{a}{x}$ (设其为整数). 于是,生产准备费为 $b \cdot \frac{a}{x}$, 因库存费为 $c \cdot \frac{x}{2}$. 因此可得

$$f(x) = b \cdot \frac{a}{x} + c \cdot \frac{x}{2} = \frac{ab}{x} + \frac{cx}{2}.$$

函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, a]$, 但注意到本题中的 x 为车床的台数, 批数 $\frac{a}{x}$ 为整数, 所以 x 只能取 $(0, a]$ 中的正整数.

函数的表示法主要有三种:解析法、表格法和图示法. 用图形法表示函数是基于

函数图形的概念,坐标平面上的点集

$$\{(x, y) | y = f(x), x \in D\}$$

称为函数 $y = f(x), x \in D$ 的图形.

在函数的定义中,并不要求当自变量变化时函数的值一定要改变,因此即使所有的 x 值都对应于一个 y 值也是允许的,即常数函数 $y = c$.

在实际问题中,经常会遇到用几个式子表示一个函数的情形,这种在自变量的不同变化范围中,对应法则用不同式子表示的函数,通常称为分段函数.它仍然是一个函数,而不是几个函数.

例 3 函数 $y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ 的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $R_f = [0, +\infty)$, 它的图形如图 1-1 所示. 该函数称为绝对值函数.

例 4 取整函数 $y = [x]$ 表示不超过 x 的最大整数,即 $y = [x] = n, n \leq x < n+1, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 是一个分段函数,它的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 函数的图形如图 1-2 所示.

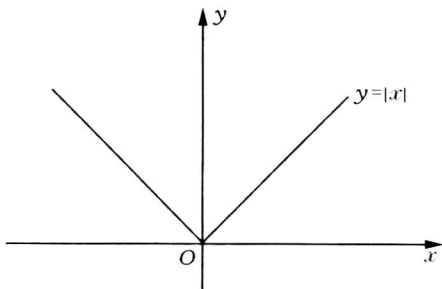


图 1-1

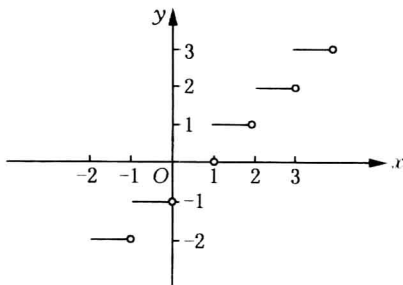


图 1-2

例 5 函数 $g(x) = \begin{cases} x+3, & 2 < |x| \leq 4 \\ 2x^2+1, & |x| \leq 2 \end{cases}$ 是一个分段函数,定义域为 $D_g = [-4, -2) \cup (2, 4] \cup [-2, 2] = [-4, 4]$, 函数的图形如图 1-3 所示.

例 6 函数 $y = D(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 是有理数时} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 是无理数时} \end{cases}$ 是一个分段函数,把它称为狄利克雷函数,它的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$.

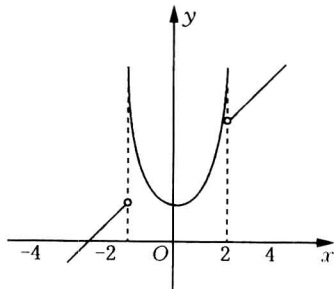


图 1-3



二、函数的几种特性

有些函数具有某些特殊性质,掌握这些性质对研究函数很有帮助.

1. 函数的有界性

定义 1.3 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 数集 $X \subset D$, 若 $\exists K_1$, 使得 $\forall x \in X$ 恒有 $f(x) \leq K_1$ 成立, 则称函数 $f(x)$ 在 X 上有上界 K_1 ; 若 $\exists K_2$, 使得 $\forall x \in X$ 恒有 $f(x) \geq K_2$ 成立, 则称函数 $f(x)$ 在 X 上有下界 K_2 ; 若 $\exists M > 0$, 使得 $\forall x \in X$ 恒有 $|f(x)| \leq M$ 成立, 则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界. 否则, 称函数 $f(x)$ 在 X 上无界.

这里记号“ $\forall$ ”表示任给的(或任意的), “ $\exists$ ”表示存在.

显然, 在某区间上有界函数 $f(x)$ 的图形一定在该区间上介于两条平行直线 $y = \pm M$ 之间. 有界函数必有上界和下界.

例如, $y = \sin x$ 与 $y = \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界, 是因为 $|\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1$; 函数 $y = \sqrt{1-x^2}$ 在定义域 $[-1, 1]$ 上有界, 是因为 $0 \leq y \leq 1$. 而函数 $y = x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是无界函数, 是因为它只有下界而无上界.

注意, 函数的有界性与所选的数集有关. 例如, 函数 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内无界, 但在 $(1, 2)$ 内有界.

例 7 证明函数 $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是有界的.

证明 因为 $(1-x)^2 \geq 0$, 所以 $|1+x^2| \geq 2|x|$, 因此

$$|f(x)| = \left| \frac{x}{x^2+1} \right| = \frac{2|x|}{2|1+x^2|} \leq \frac{1}{2}$$

对一切 $x \in (-\infty, +\infty)$ 都成立. 于是可得函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是有界的.

2. 函数的奇偶性

定义 1.4 如果函数 $f(x)$ 在一个关于原点对称的实数集 D 内有定义, 若 $\forall x \in D$, 都有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数; 若 $\forall x \in D$, 都有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数.

例如, $y = x^3, y = \sin x$ 是奇函数, 而 $y = x^2, y = \cos x$ 是偶函数. 显然, 奇函数的图形关于原点对称, 而偶函数的图形关于 y 轴对称.

例 8 判断下列函数的奇偶性:

$$(1) f(x) = \frac{1}{a^x+1} - \frac{1}{2}, \text{ 其中 } a > 0 \text{ 且 } a \neq 0; (2) f(x) = \begin{cases} -x^3+1, & x < 0 \\ x^3+1, & x \geq 0 \end{cases}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad (1) \text{ 由于 } f(-x) &= \frac{1}{a^{-x}+1} - \frac{1}{2} = \frac{a^x}{1+a^x} - \frac{1}{2} = \frac{a^x+1-1}{1+a^x} - \frac{1}{2} \\
 &= 1 - \frac{1}{1+a^x} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{1+a^x} + \frac{1}{2} \\
 &= -f(x),
 \end{aligned}$$

因此, $f(x)$ 是奇函数.

$$\begin{aligned}
 (2) \text{ 由于 } f(-x) &= \begin{cases} -(-x)^3+1, & -x < 0 \\ (-x)^3+1, & -x \geq 0 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} x^3+1, & x > 0 \\ -x^3+1, & x \leq 0 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} x^3+1, & x \geq 0 \\ -x^3+1, & x < 0 \end{cases} \\
 &= f(x),
 \end{aligned}$$

因此 $f(x)$ 是偶函数.

3. 函数的单调性

定义 1.5 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subset D$. 若对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时,

(1) 恒有 $f(x_1) \leq f(x_2)$ (或 $f(x_1) < f(x_2)$), 则称函数 $f(x)$ 在该区间上是单调 (或严格单调) 增加函数;

(2) 恒有 $f(x_1) \geq f(x_2)$ (或 $f(x_1) > f(x_2)$), 则称函数 $f(x)$ 在该区间上是单调 (或严格单调) 减少函数.

(严格) 单调增加与 (单调) 减少函数统称为单调函数. 例如, $y=x^2$ 在 $(-\infty, 0]$ 内单调减少, 在 $[0, +\infty)$ 内单调增加, 但在整个定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内它不是单调函数.

例 9 判断函数 $y=x^3$ 的单调性.

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \text{由于 } x_1^3 - x_2^3 &= (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) \\
 &= (x_1 - x_2) \left[\left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 \right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 \right],
 \end{aligned}$$

当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $x_1^3 < x_2^3$. 因此, 函数 $y=x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调增加.

4. 函数的周期性

定义 1.6 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在一个非零常数 T , 使得 $\forall x \in D$, 有 $(x \pm T) \in D$, 且 $f(x+T) = f(x)$ 成立, 则称 $f(x)$ 为周期函数. T 称为 $f(x)$ 的周



期. 通常所说的周期函数的周期是指其最小正周期.

例如, $y = \sin x$ 与 $y = \cos x$ 都是周期为 2π 的周期函数, 而 $y = \tan x$ 与 $y = \cot x$ 都是周期为 π 的周期函数.

例 10 设函数 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数, 试求函数 $f(ax+b)$ 的周期, 其中 a, b 为常数, 且 $a > 0$.

解 因为

$$\begin{aligned} f\left[a\left(x+\frac{T}{a}\right)+b\right] &= f(ax+T+b) \\ &= f[(ax+b)+T] = f(ax+b), \end{aligned}$$

所以根据周期函数的定义, $f(ax+b)$ 的周期为 $\frac{T}{a}$.

例 11 求函数 $y = \sin^4 x + \cos^4 x$ 的周期.

解 因为 $y = \sin^4 x + \cos^4 x$

$$\begin{aligned} &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x \\ &= 1 - \frac{\sin^2 2x}{2} = 1 - \frac{1 - \cos 4x}{4} \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x. \end{aligned}$$

所以, y 的周期为 $T = \frac{\pi}{2}$.

三、反函数

定义 1.7 设函数 $y = f(x)$, 若将 y 作为自变量, x 作为因变量, 则由关系式 $y = f(x)$ 惟一确定的函数 $x = \varphi(y)$ 称为 $y = f(x)$ 的反函数. 相对于反函数 $x = \varphi(y)$ 来说, 原来的函数 $y = f(x)$ 称为直接函数.

习惯上, 自变量用 x 表示, 因变量用 y 表示, 因此 $x = \varphi(y)$ 可写为 $y = \varphi(x)$ 或用 $y = f^{-1}(x)$ 表示. 显然, $y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 互为反函数. 把直接函数 $y = f(x)$ 和反函数 $y = \varphi(x)$ 的图形画在同一坐标平面上, 这两函数的图形关于直线 $y = x$ 是对称的. 本质上, 定义 1.7 中直接函数 y 是关于 x 的函数, 反函数 x 是关于 y 的函数, 因此, 直接函数和反函数的图像是重合的.

需要指出, 并非所有的函数都存在反函数. 例如, 函数 $y = x^2$ 在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内就没有反函数. 只有一一对应函数, 才存在反函数. 严格单调增(或减)的函数, 显然是一一对应函数, 所以必存在反函数.

例如,由 $y = -\sqrt{x-1}$ 可确定出 $x = y^2 + 1 (y \leq 0)$, 因此函数 $y = -\sqrt{x-1}$ 的反函数为 $y = x^2 + 1, x \leq 0$.

四、初等函数

1. 基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数统称为基本初等函数. 现分别简单介绍如下:

(1) 幂函数. $y = x^\mu$, μ 为任意常数, 其定义域随 μ 的不同而不同. 例如, 当 $\mu = 3$ 时, $y = x^3$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$; 当 $\mu = \frac{1}{2}$ 时, $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ 的定义域是 $[0, +\infty)$; 当 $\mu = -\frac{1}{2}$ 时, $y = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 的定义域是 $(0, +\infty)$. 但无论 μ 取什么值, 幂函数在 $(0, +\infty)$ 内总有定义.

(2) 指数函数. $y = a^x$, $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 其定义域为 $(-\infty, +\infty)$. 当 $0 < a < 1$ 时, $y = a^x$ 为单调减函数; 当 $a > 1$ 时, $y = a^x$ 为单调增函数, 如图 1-4 所示.

在实际中, 常出现以 e 为底的指数函数 $y = e^x$, 其中 $e \approx 2.718\ 28\cdots$ 是一个无理数.

(3) 对数函数是指数函数的反函数, 记作 $y = \log_a x$, 其中 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 其定义域为 $(0, +\infty)$. 图 1-5 展示了 a 取不同值时对应的对数函数的图形.

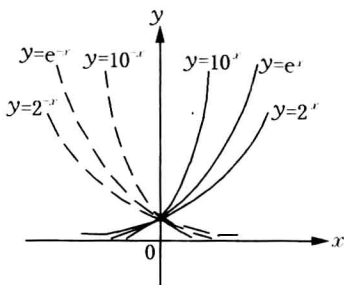


图 1-4

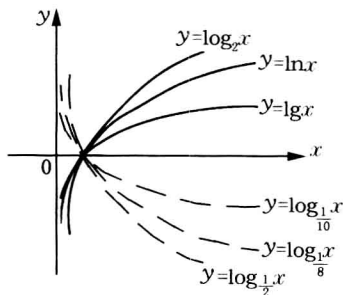


图 1-5

以 10 为底的对数函数 $\log_{10} x$ 称为常用对数函数, 简记为 $y = \lg x$; 而以 e 为底的对数函数称为自然对数函数, 简记为 $y = \ln x$.

根据对数的定义, 可以推出两个常用等式: