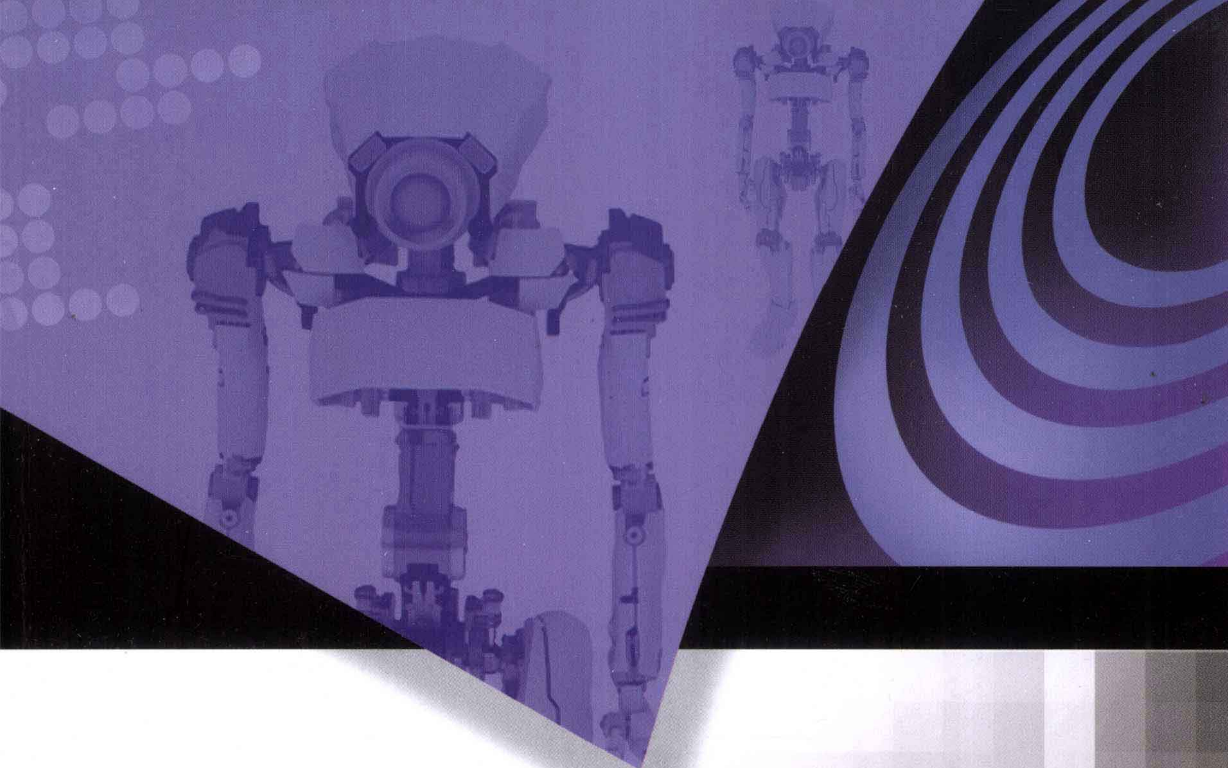

非完整机器人的原理与控制

谭跃刚　著

科学出版社

非完整机器人的原理与控制

谭跃刚　著

“武汉理工大学研究生教育创新基金”资助出版

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书主要介绍非完整机器人的机构原理与控制方法，强调机器人机构学与控制理论的结合，提出了基于非完整约束机构模型与控制模型映射关系的可控欠驱动机器人机构设计的方法。书中内容是根据作者在非完整机器人领域的研究成果撰写的。全书共分9章，内容包括：非完整机器人的基本问题和基础知识、非完整约束机构及其运动传递特性、可控非完整机器人的机构原理和控制方法等。本书着眼于对问题的理解，力图用通俗的语言诠释非完整机器人的机构原理与控制方法，突出非完整机器人的新机构。

本书适合于机械设计及理论、机械电子工程、控制理论等相关专业的研究生及科研工作者阅读，也可供从事机器人设计和应用的工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

非完整机器人的原理与控制/谭跃刚著. —北京：科学出版社，2011

ISBN 978-7-03-032127-5

Ⅰ. 非… Ⅱ. 谭… Ⅲ. ①机器人-理论 ②机器人控制 Ⅳ. TP24

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第170509号

责任编辑：姚庆爽/责任校对：陈玉凤

责任印制：赵 博/封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011年8月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2011年8月第一次印刷 印张：11

印数：1—2 000 字数：212 000

定价：50.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

机器人作为一种计算机控制的机械电子一体化自动装置，不但为人们的生产活动提供先进的自动化装备，使生产效率成倍提高，而且以惊人的速度向服务业、医疗卫生等领域渗透，给人们的生活带来广泛和深远的影响。例如，在汽车组装线上对车身进行焊接和喷漆的机器人、在水下或地下等环境中进行检查和维修的机器人、在太空中维修航天器的操作机器人、在展览场馆中的服务机器人、为病人做手术和帮助病人康复的医疗机器人等。这些机器人虽然大都不是拟人的，但是人们对像人类一样工作的"拟人机器"的追求并没有停止，特别是对具有末端执行器的简单机器人的研究和应用已取得了很大的进步，并且这种研究和应用的步伐还在迅速地加快，且在不断地向纵深及新的领域发展。

非完整机器人就是机器人学科新发展的一个方向。"完整(honolomic)"和"非完整(nonhonolomic)"是分析力学中的重要概念。完整约束就是指可以表示为以系统广义坐标和时间为变参数的代数方程式的约束，否则就是非完整约束。例如，绳索的一端固定另一端连接圆球的圆球运动、在平面上做自由纯滚动的圆球运动等，圆球的这些运动所受到的约束在前者表现为绳索牵引给出的不等式方程，后者表现为不可积分的微分方程。这两种约束都不能表示成代数方程式的几何约束形式，都是非完整约束。具有非完整约束的系统就是非完整系统。本书所要讨论的是具有不可积运动约束方程的非完整系统，这类系统的一个突出特点就是系统的广义速度数目少于广义坐标数目，从控制角度看就是系统的控制输入空间维数小于位形空间维数，因此非完整系统也属于欠驱动系统，如轮式移动机器人、角动量守恒的太空机器人、具有自由关节的欠驱动机器臂等就是典型的非完整系统，也称为非完整机器人。

在分析力学中，对非完整约束的力学性质研究已有百余年的历史。科学技术的发展，推动了非完整系统的深入研究。尤其是进入 20 世纪 80 年代，非完整系统研究在机器人领域得到迅速发展，相继出现了"非完整机器人系统"、"非完整运动规划"、"非完整轨迹规划"等术语和概念，使非完整机器人的研究逐渐成为机器人领域的一个新的热点方向。在以往的机器人研究开发中，机器人的机械本体基本是独立地从机构学角度提出的，其运动规划和控制的研究基本是独立地在控制理论领域展开，这使得机器人机械系统的运动复杂性与控制准确性的矛盾尤为突出。随着机器人技术的发展和广泛应用，对机器人的精细操作和在各种环境下自主控制的要求越来越高，使得机器人机械本体的运动复杂性与机器人控制精确性的问

题更加突出。在机器人技术迅速发展的今天，人们已经清楚地认识到：机器人的机械本体必须与控制系统紧密地结合为一个整体才能充分发挥出机器人应有的性能和功能。因此，机器人机构学和控制理论的融合是目前机器人学发展的一个重要方面。非完整机器人系统的控制输入数少于位形空间维数，且在位形空间内可控的特征，为机器人机构学与控制理论的融合提供了一个很好的研究领域。目前，对非完整机器人研究较多的还是运动规划和控制，其机构设计与控制相结合的研究还不多见，本书试图通过非完整机器人的研究，在机器人机构设计与控制理论结合方面做一些探索。

作者最早接触非完整机器人问题大约是在 1997 年的夏天，从订阅的日本《計測と制御》(Vol. 36，No. 6，1997)杂志上看到了关于非完整机器人的系列专题报道，当即引起极大的兴趣。随后又查阅了日本东京大学中村仁彦教授刊登在《日本ロボット学会誌》上的介绍非完整机器人系统的系列文章，更促发了对非完整机器人研究的激情。作者在 1998 年国家留学基金的支持下，作为访问学者前往日本东京大学中村仁彦教授的研究室进行交流和学习，更多地接触非完整机器人的研究前沿。在中村仁彦教授的指导下，与研究室同仁一起开展了多挂车轮式移动机器人的操舵机构设计与运动控制实验研究。回国后，作者在中国科学院沈阳自动化研究所机器人学重点实验室开放基金的资助下，尤其是在谈大龙研究员的支持和指导下，继续开展了非完整机器人的研究工作。近期还获得了教育部博士点基金的资助，有力地促进了这项研究工作，使这项研究获得了一些成果，本书就是作者在博士学位论文的基础上，对这些年来研究非完整机器人的成果总结。在这里，向给予这项研究工作大力支持和帮助的各位老师表示诚挚的感谢！

本书的出版是与作者的博士导师周祖德教授的长期指导分不开的。同时，还得益于武汉理工大学研究生院(筹)提供的博士学位论文出版基金的积极资助，以及博士研究生李亮进行的一些仿真和实验工作，硕士研究生姜勇完成的多关节非完整机器人实验装置制作，在此向他们表示衷心的感谢。

本书在非完整机器人方面的研究和讨论，应该说还很肤浅，尤其是在机器人机构设计与控制理论相结合方面所做的研究，还只是一些探索或摸索，作者感到还有很多问题需要深入地讨论和研究，希望通过本书的出版能扩大这方面的交流、方便切磋和开展讨论。同时，受作者水平所限，不妥之处在所难免，还恳望读者不吝赐教，给予批评指正。

谭跃刚
2011 年 4 月
于武汉市马房山

目　　录

第1章 绪 论

“完整(holonomic)”和“非完整(nonholonomic)”是力学上对约束和系统的分类概念。完整约束是对系统位形的限制，非完整约束是对系统运动的限制。具有非完整约束的机器人属于非完整系统，也称为非完整机器人，如轮式移动机器人就是受到非完整滚动约束的非完整机器人。非完整机器人的显著特征是系统的广义坐标变分并不都是独立的，这就是说非完整机器人系统的位形空间维数多于控制输入空间的维数，从而使得非完整机器人表现出与完整机器人(如工业机器人等)不同的运动特性和控制特性。

本章主要介绍非完整约束、非完整系统及非完整机器人的一些基本概念，以及相关研究的发展现状，以展示非完整机器人系统的基本概貌。

1.1 非完整约束与非完整系统

机械是基于力学原理组成的机构和机器，机械的基础是力学。

在力学中，对系统的位形(即位置与姿态)和运动的限制作用称为约束。例如，轮式移动机器人的运动就受制于车轮与地面之间的无滑动滚动，这种滚动约束表现为限制车轮上与地面接触点的瞬时速度为零。一般情况下，可用包含坐标参数的数学方程来描述约束，这种数学方程就称为系统的约束方程。

实际中的系统总是受到各种各样的约束，如几何约束与运动约束、定常约束与非定常约束、双面约束与单面约束、可积分约束与不可积分约束等。在这些约束作用下，系统的运动往往表现出不同的特性。从系统的运动本质类别(或从约束方程的实质)来看，约束可分为完整约束和非完整约束两大类。

若约束仅限制系统的空间位形，则这种约束称为几何约束。其约束方程一般表示为

$$f(q,t)=0 \tag{1-1}$$

式中，参数 t 是时间；q 是表示系统位形的广义坐标向量，一般表示为

$$q=\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$$

显然，几何约束只限制系统的几何位置和姿态，不限制系统的运动速度。

若约束不仅限制系统的位形，还限制系统运动的速度，则这种约束称为运动约束。对于系统的广义坐标向量 q 和广义速度向量 $\dot{q}$，即

$$q=\begin{bmatrix}q_1\\q_2\\\vdots\\q_n\end{bmatrix}\quad 和 \quad \dot{q}=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=\begin{bmatrix}\dot{q}_1\\\dot{q}_2\\\vdots\\\dot{q}_n\end{bmatrix}$$

运动约束的约束方程一般表示为

$$f(q,\dot{q},t)=0 \tag{1-2}$$

式中，$f(q,\dot{q},t)\in R^{m\times 1}$，$m$ 是约束个数。

在许多的实际问题中，运动约束可以转化为与系统广义速度 $\dot{q}_i(i=1,\cdots,n)$ 呈线性关系的形式，即

$$f(q,\dot{q},t)=\sum_{i=1}^{n}W_i(q)\cdot\dot{q}=W(q)\cdot\dot{q}=0 \tag{1-3}$$

式中，系数矩阵 $W(q)\in R^{m\times n}(m<n)$ 是满秩的，其中的每一个行向量 $W_i(q)\in R^{1\times n}(i=1,2,\cdots,m)$ 是对系统广义速度 $\dot{q}$ 取值方向的一种约束。许多的轮式移动机器人、多指机器人、冗余机器人等的运动约束方程一般可表示为这种关于系统广义速度 $\dot{q}$ 的线性关系。

定义 1.1　式(1-3)表示的线性运动约束称为 Pfaffian 约束。

在图 1.1 中，半径为 r 的滚轮在直线轨道上作无滑动的滚动时，滚轮的位形由滚轮所在平面上的滚轮中心坐标(x_c,y_c)和姿态角 φ 确定，记 $q=[x_c y_c \varphi]^{\mathrm{T}}$。此时滚轮与直线轨道的接触点 A 是其速度瞬心(线速度 $v_A=0$)，滚轮的运动可看成是绕速度瞬心 A 的瞬时转动，其约束方程为

$$y_c=r \tag{1-4}$$

$$W(q)\cdot\dot{q}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}_c\\\dot{y}_c\\\dot{\varphi}\end{bmatrix}=\dot{x}_c-r\dot{\varphi}=v_A=0 \tag{1-5}$$

显然，约束方程式(1-4)表示的是对滚轮的几何约束；约束方程式(1-5)是速度 $\dot{x}_c$、$\dot{\varphi}$ 的线性组合，表示的是一种线性运动约束。但是，滚轮受到的这种运动约束可以通过积分表示为

$$x_c-r\varphi=C\quad(C\ 为积分常数) \tag{1-6}$$

表明图 1.1 所示滚轮受到的运动约束的本质是几何约束，或者说这时的滚轮速度 $\dot{x}_c$、$\dot{\varphi}$ 被限制在超曲面 $x_c-r\varphi=C$ 上。

在图 1.2 中，半径为 r 的滚轮在平面上做自由的无滑动滚动时，滚轮的位形可由坐标(x_c,y_c)、方位角 θ 和姿态角 φ 确定，记 $q=[x_c y_c \theta\varphi]^{\mathrm{T}}$。此时，滚轮与平面的接触点 A 仍是滚轮的速度瞬心(线速度 $v_A=0$)，其运动仍可看成是绕速度瞬心 A

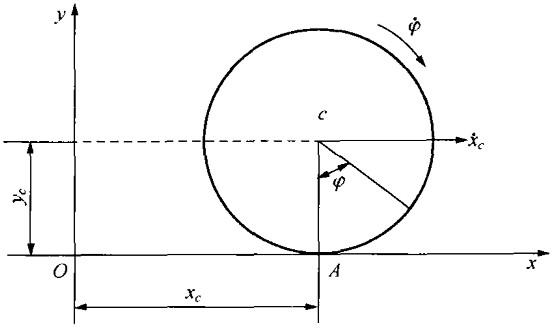

图 1.1 滚轮的无滑动滚动约束

的瞬时转动，约束方程为

$$y_c = r \tag{1-7}$$

$$W(q) \cdot \dot{q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 & -r\sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_c - r\cos\theta \cdot \dot{\varphi} \\ \dot{y}_c - r\sin\theta \cdot \dot{\varphi} \end{bmatrix} = v_A = 0 \tag{1-8}$$

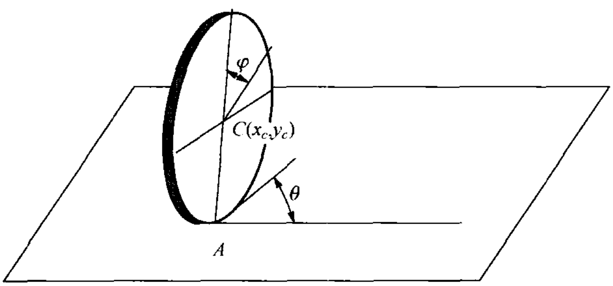

图 1.2 滚轮在平面上的无滑动滚动约束

可以看到，滚轮在平面上做自由的无滑动滚动时，滚动约束既限制滚轮的几何位置，还限制滚轮的运动速度。这时的滚动约束是一种本质的运动约束，即约束方程不能通过积分转化成几何约束，因为滚轮的方位角 θ 是变化的，或者说这时的滚轮速度不被限制于某个超曲面上。只有当滚轮的方位角 θ 固定不变时，自由的无滑动滚动约束就可转化为图 1.1 所示的滚动约束。

几何约束和可积分的运动约束属于同一个范畴的约束，这类约束是对系统空间位形的限制，系统运动速度被限制在某个超曲面上。不可积分的运动约束是对系统速度的限制，且这种限制不局限于位形空间中的某个超曲面上。因此，几何约束和可积分的运动约束规定了一类系统运动，不可积分的运动约束规定了另一类

系统运动。

定义 1.2　几何约束和可积分的运动约束，称为完整约束；不可积分的运动约束，称为非完整约束。相应地，只含有完整约束的系统，称为完整系统；含有非完整约束的系统，称为非完整系统。

完整系统和非完整系统是具有不同运动性质的两类系统。完整系统的运动限于某一位形，用微分几何的术语表述就是完整系统的运动被限制在位形空间中的某个流形上；非完整系统的运动是在不同流形之间的运动。可以进一步通过考察某系统在受到式(1-9)约束时的运动情况，看到这两类运动的区别。

$$\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}=\begin{cases} p_1(q(t)) & 0\leqslant t<T \\ p_2(q(t)) & T\leqslant t<2T \\ -p_1(q(t)) & 2T\leqslant t<3T \\ -p_2(q(t)) & 3T\leqslant t<4T \end{cases} \tag{1-9}$$

式中，$q(t)$是系统的广义坐标；$p_1(q(t))$、$p_2(q(t))$分别是相互独立的沿某超曲面运动的速度。对于这个系统运动的最终位形 $q(4T)$，可以依据式(1-9)的约束条件，通过逐个时域区间的 Taylor 级数展开计算得到[1]

$$q(4T)=q(0)+T^2\left\{\frac{\partial p_2(q(t))}{\partial q}p_1(q(t))-\frac{\partial p_1(q(t))}{\partial q}p_2(q(t))\right\}_{t=0}+O(T^3) \tag{1-10}$$

由此可见，如果时间 T 充分小，则系统运动的最终位形 $q(4T)$与初始位形 $q(0)$一致，这时式(1-9)所示约束的完整性和非完整性无关。系统运动的差异主要表现在式(1-10)右边第 2 项上(即关于 T 的二次项)。为了便于说明，令

$$[p_1,p_2]=\frac{\partial p_2}{\partial q}p_1-\frac{\partial p_1}{\partial q}p_2 \tag{1-11}$$

实际上，对于完整约束，$[p_1,p_2]$总是处于系统位形 $q(t)$可能运动的切空间内，即完整约束下的系统运动速度只能限于局部的位形空间内；对于非完整约束，$[p_1,p_2]$一般不是总处于系统位形 q 可能运动的切空间内，亦即非完整约束下的系统运动可以抵达系统位形空间内的任一位形。因此，完整约束存在一个确定的约束超曲面，而非完整约束不存在这样的约束超曲面。这就表明，完整系统的运动只能限于位形空间中的一个约束超曲面上，而非完整系统的运动则没有这个限制。因此，完整约束是对系统的一种本质几何约束，非完整约束是一种本质运动约束。

1.2　非完整机器人

约束的“完整性”和“非完整性”规定了两类不同性质的运动，这表明在分析非完整系统的运动时，不能完全用完整系统的方法来处理。这个问题在机器人领

域尤为突出。机器人的约束方程常常是复杂的非线性方程，且在许多情况下可以实现严密的反馈线性化，从而可以应用线性系统的控制方法来控制机器人的运动。然而，人们在研究轮式移动机器人、宇宙机器人的一些运动规划和控制问题时，遇到了如何处理不可积微分方程式的约束问题。例如，在处理多指机器人的抓取问题时，若手指端在抓取物体表面存在自由滚动，那么采用反馈线性化等方法就不能解决其运动规划和控制问题[2]。对于这类可控的非线性机器人，采用线性化方法所遇到的这些问题，后来研究发现可归结为系统约束的非完整性。

常见的工业机器人或机械操作臂，由于其坐标之间的约束关系可以表示成代数方程的几何约束形式，因此这些工业机器人属于完整系统的范畴。而常见的轮式移动机器人、水下机器人、宇宙机器人、体操机器人和多指机器人等，由于其运动约束存在非完整性，它们属于非完整系统的范畴。

定义 1.3 含有非完整约束的机器人，称为非完整机器人(nonholonomic robot)。

非完整机器人属于非完整系统的范畴，它的特性主要反映在非完整约束方程上，不同的非完整约束形式直接影响着这类机器人的运动规划和控制方法。实际上，非完整约束的表现形式有一阶微分方程和二阶微分方程等多种。轮式移动机器人、太空机器人等机器人受到的非完整约束一般就表现为一阶微分方程；具有自由关节的欠驱动机械臂(如倒立摆)等机器人受到的非完整约束一般就表现为二阶微分方程。本书主要是以不可积一阶微分方程约束下的非完整机器人为对象，重点讨论这类非完整机器人的设计与控制等问题。

实际中，大多数非完整机器人的运动约束是对系统运动速度的约束，非完整约束的方程表现为不可积一阶微分方程。在许多情况下，这种一阶微分方程的约束形式一般可表示为不可积 Pfaffian 约束的形式，即

$$W(q)\cdot\dot{q}=0 \tag{1-12}$$

式中，$q\in R^n$ 为系统的广义坐标向量；$W(q)\in R^{m\times n}$ 为关于系统广义坐标的系数矩阵($m<n$)。显然，式(1-12)是关于系统广义速度的一种一阶线性微分方程组。

在不可积 Pfaffian 约束下，如果可确定彼此线性独立的广义速度 $u(u\in R^{n-m})$，那么非完整机器人系统就又可表示为一种系统状态的导数与系统状态的非线性关系，与系统控制量呈线性关系的对称仿射系统(affine systems)，即

$$\dot{q}=P(q)\cdot u \tag{1-13}$$

式中，$P(q)$ 是关于系统广义坐标的满秩矩阵。注意：对称仿射系统的状态量 $q\in R^n$ 数目多于控制输入量 $u\in R^{n-m}$ 的数目，这对相应的非完整机器人来说就是机器人的位形空间维数大于控制输入空间维数，表明非完整机器人是一类欠驱动机器人。

图 1.3 所示为一个二轮移动机器人，其轮子的无滑动滚动就构成移动机器人

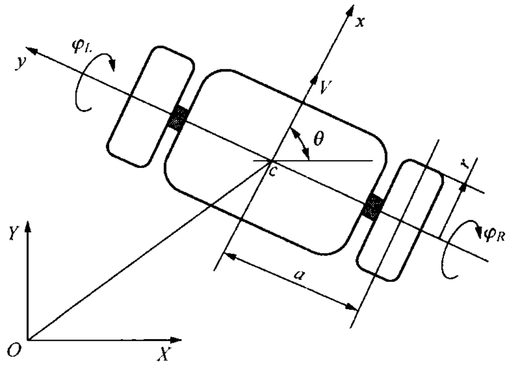

图 1.3　二轮移动机器人

系统的非完整约束，它表现为 3 维位形空间中 2 个位置坐标(X_c,Y_c)和 1 个方位坐标 θ 的运动变化之间的关系，即

$$\dot{X}_c\sin\theta-\dot{Y}_c\cos\theta=\begin{bmatrix}\sin\theta & -\cos\theta & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{X}_c\\ \dot{Y}_c\\ \dot{\theta}\end{bmatrix}=0 \tag{1-14a}$$

表示成对称仿射系统的形式就是

$$\begin{bmatrix}\dot{X}_c\\ \dot{Y}_c\\ \dot{\theta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0\\ \sin\theta & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v\\ \dot{\theta}\end{bmatrix} \tag{1-14b}$$

式中，v 是动坐标系 $c-xy$ 的原点沿 $c-x$ 轴方向运动的速度。这个二轮移动机器人系统的实际控制输入是左右轮的转动角速度，即有

$$\begin{bmatrix}v\\ \dot{\theta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r & r\\ r/a & -r/a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\varphi}_R\\ \dot{\varphi}_L\end{bmatrix} \tag{1-14c}$$

从而，以左右轮转动角速度为控制输入时，这个二轮移动机器人系统的对称仿射系统的形式就为

$$\begin{bmatrix}\dot{X}_c\\ \dot{Y}_c\\ \dot{\theta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r\cos\theta & r\cos\theta\\ r\sin\theta & r\sin\theta\\ r/a & -r/a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\varphi}_R\\ \dot{\varphi}_L\end{bmatrix} \tag{1-15}$$

因此，二轮移动机器人系统是一个位形空间维数为 3，控制输入空间维数为 2 的欠驱动系统。同样，对于图 1.4 所示的三轮和四轮移动机器人系统，其车轮与地面之间的无滑动滚动约束是一种非完整约束。如果取位形空间由坐标 X_c、Y_c、θ 构成，控制输入空间是由速度 v 和 $\dot{\varphi}$ 构成，那么这类三轮和四轮移动机器人系统的

运动约束方程为

$$\begin{bmatrix} \sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ -\tan\varphi & 0 & a\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X}_c \\ \dot{Y}_c \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = 0 \tag{1-16a}$$

或表示为

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_c \\ \dot{Y}_c \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ (\tan\varphi)/a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \tag{1-16b}$$

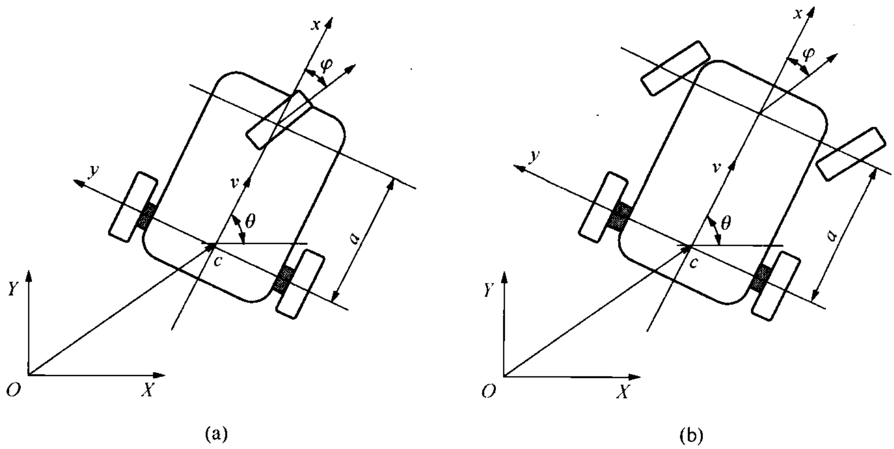

图 1.4　三轮和四轮型轮式移动机器人

如果把轮式移动机器人的前轮方位角 φ 也作为位形量，则系统的运动约束方程就表示为

$$\begin{bmatrix} \sin\theta & -\cos\theta & 0 & 0 \\ -\tan\varphi & 0 & a\cos\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X}_c \\ \dot{Y}_c \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = 0 \tag{1-16c}$$

或表示为

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_c \\ \dot{Y}_c \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ (\tan\varphi)/a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \tag{1-16d}$$

式(1-16b)不是对称仿射系统,式(1-16d)是对称仿射系统。

在如图 1.4 所示的轮式移动机器人系统中,假设其位形空间内还存在一个 $\varphi=45^\circ$ 的几何约束,且认为轮式移动机器人上的 c 点沿 $c-x$ 轴方向运动的速度 v 是常数。那么,由运动约束式(1-16d)的求解可知,此时轮式移动机器人的运动被限制于位形空间内的某个超曲面上,这个超曲面就是

$$X_c=\frac{a}{v}\sin\frac{vt}{a},\quad Y_c=-\frac{a}{v}\left(\cos\frac{vt}{a}-1\right),\quad \theta=\frac{vt}{a},\quad \varphi=45^\circ \tag{1-17a}$$

或为

$$X_c^2+Y_c^2=2\left(\frac{a}{v}\right)^2\left(1-\cos\frac{vt}{a}\right),\quad \theta=\frac{vt}{a},\quad \varphi=45^\circ \tag{1-17b}$$

根据人们实际的经验,轮式移动机器人尽管存在非完整约束,但它仍能以任意方位停留在平面上的任意位置,这表明轮式移动机器人的位形坐标是可以自由变化的,也就是说轮式移动机器人可以在其位形空间内处于任意位形。如果在轮式移动机器人的位形坐标之间还存在完整约束,那么这些坐标之间就不可能是自由的,此时轮式移动机器人就不能在位形空间内任意运动,而只能在位形空间内的某个超曲面上运动。

1.3 非完整机器人的基础问题

对非完整机器人的研究,许多情况下可以归结为对不可积 Pfaffian 约束和对称仿射系统的研究。事实上,许多轮式移动机器人、多指机器人、宇宙机器人的运动约束就表现为不可积 Pfaffian 约束,其对应的对称仿射系统就是研究这类非完整机器人系统运动控制的基础。正是由于非完整机器人的运动有其自身的特点,对非完整机器人性能的研究就不能采用针对完整系统的研究方法。

1.3.1 机器人的“非完整性”判别

这实际上是判断机器人所受运动约束是否可积的问题,涉及力学和数学的方法。对于机器人受到的 Pfaffian 约束

$$W_i(q)\dot{q}=0,\quad W_i(q)\in R^n,\quad i=1,2,\cdots,m \tag{1-18}$$

可积就意味着存在函数 $h_i(q(t)):R^n\rightarrow R$,且有

$$h_i(q(t))=0 \tag{1-19}$$

代数方程式(1-19)就是对机器人的几何约束。因此,Pfaffian 约束可积与完整约束等价。