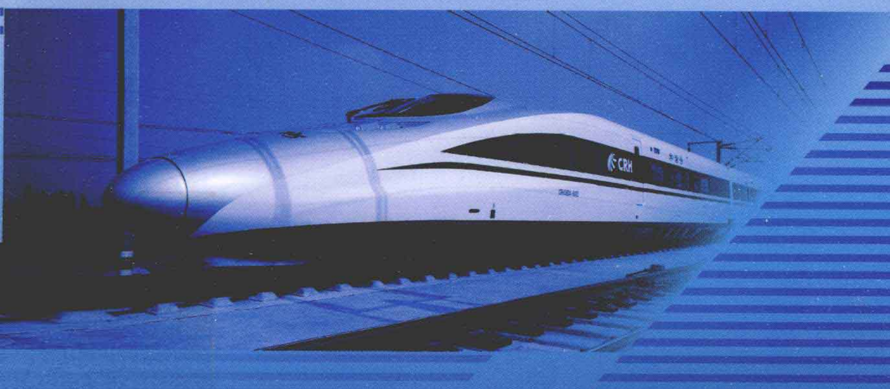
普通高等教育“十一五”国家级规划教材

振动力学

ZHENDONG LIXUE

- 介绍振动力学研究的基本内容和基本方法
- 结合已有研究成果，介绍振动力学在工程中的应用

高淑英 沈火明 编著



中国铁道出版社

普通高等学校"十一五"国家级规划教材

振动力学

高淑英　沈火明　编著

中国铁道出版社

2011年·北京

前　言

振动力学是研究机械系统和工程结构的动力特性及其在激励下振动响应分析方法的一门科学。研究这门科学的目的在于探究振动产生的原因，分析它们的运动规律，了解振动对机械、工程结构及其人体的影响，同时寻求控制振动、消除振动或利用振动的方法，最后达到机械系统与工程结构能够安全可靠地工作。本书主要介绍振动力学的基本理论和方法，以及振动力学在工程实际中的应用。

本书是在2003年出版的《线性振动教程》的基础上重新改编、整合而成的，改编过程中主要进行了以下几方面的工作：

(1)完善内容。增加了非线性振动基本理论、随机振动基本理论，形成以理论分析为主、理论与实践相统一的教材体系，使振动理论与工程应用的教学内容更加融合、紧密。

(2)提高教材的科学性，符合学生的认知规律。本教材线性振动理论分为离散系统的振动和连续系统的振动两部分，同时考虑了非线性振动基本理论、随机振动基本理论和振动在工程中的应用等内容。教材从如何建立力学模型和数学模型着手，深入浅出地讲述了振动的基本理论和分析、计算方法。教材同时能反映本学科国内外科学研究和教学研究的一些先进成果，且取材合适、深度适宜、份量恰当、层次分明，有启发性。内容精炼且适用层面宽，对振动基本理论的描述也比较详细，符合学生的认知规律。

(3)增添新的研究成果，提高教材的先进性。修订中注意补充在振动方面新的研究成果、规范和标准，使教材内容更加先进。

本书共分7章。第1章介绍振动力学研究的基本内容和基本方法。第2章介绍单自由度线性振动系统，包括振动建模、自由振动、定常强迫振动、任意激励的动力响应等。第3章在介绍两自由度线性振动内容的基础上，阐述了多自由度系统的自由振动、强迫振动以及近似求解方法。第4章介绍连续体（弹性体，分布参

数系统）振动的基本理论和方法，重点介绍了弦、杆、轴、梁及板等常见连续体的建模技能和分析方法。第5章介绍非线性振动的基本理论，主要有相平面法及定量分析方法、非线性系统的解析方法、多自由度系统的参数振动及其动力响应的数值方法等。第6章介绍了随机振动的基本理论，包括随机过程的统计特性、线性系统对随机激励的响应、非线性系统的随机响应以及工程中的随机振动问题等。第7章结合已有研究成果，介绍振动力学在工程中的应用。

本书由高淑英、沈火明编著，其中高淑英编写了第1、4、5章，沈火明编写了第2、3、6、7章。研究生林桂萍、邓莎莎参与了部分文字和图例的整理工作。

在本书编著过程中，参阅了国内外同行许多宝贵的研究成果及资料，在此谨向他们表示衷心的感谢。

本书的出版得到了西南交通大学研究生特色教材建设项目和西南交通大学教材建设基金的资助，在此表示衷心的感谢。

由于作者水平有限，本书的错误和不妥之处在所难免，敬请读者提出宝贵意见。

作　者

2010.12

目 录

1 绪　　论

1.1 概　　述

振动是指物体围绕它的平衡位置所作的往复运动或系统物理量在其平均值(或平衡值)附近来回变动。振动是自然界最普遍的现象之一,广泛存在于日常生活或生产实践中,如钟摆的振动,琴弦的振动,心脏的搏动,耳膜和声带的振动等。在工程技术领域中,振动现象更比比皆是,例如机车、车辆行驶时所引起的自身的振动以及支承它的线路、桥梁的振动;机器设备运转时或地震时所引起的厂房或堤坝的振动;风的脉动压力使输电线、烟囱、水塔、桥梁等建筑物产生的振动;船舶或飞机在航行中的振动等。

剧烈的振动可以造成结构物或机件的破坏;对于精密仪器或机械加工,振动将影响其灵敏度或精确度;振动要消耗能量因而使机器的效率降低;振动及同时发生的噪声使劳动条件恶化;飞机、车辆、船舶等的振动影响到乘客的身体健康,甚至危及安全等。应该设法消除这些有害的振动或减轻其危害。

振动既有有害的一方面,也有有利的一方面。例如,工程机械中的振动打桩机、混凝土振动器、捣固机等,机械工业中的振动造型机、振动输送机、脉冲锻压机等,以及地震仪等仪器,都是利用振动原理以达到提高工效或记录振动的目的。

不同领域中的振动现象虽然各具特色,但往往有着相似的数学和力学描述。在这种共性的基础上,有可能建立某种统一的理论来处理各种振动问题,振动力学就是这样一门基础学科,它借助于数学、物理、实验和计算技术,探讨各种振动现象的机理,阐明振动的基本规律,研究振动产生的原因,分析其运动规律,了解振动对机器、工程结构及人体的影响,寻求控制、消除振动或利用振动的方法,最后达到机械系统或工程结构能够可靠地工作,并具有良好的动态性能。

1.2 振动的分类

任何力学系统,只要它具有弹性和惯性,都可能发生振动。这种力学系统称为振动系统。振动系统可分为两大类,离散系统和连续系统。连续系统具有连续分布的参量,它是由弦、杆、轴、梁、板、壳等弹性元件组成的系统,有无穷多个自由度,数学描述为偏微分方程。离散系统是由彼此分离的有限个质量元件、弹簧和阻尼构成的系统,有有限个自由度,数学描述为常微分方程。

根据振动系统的自由度可分为有限多自由度系统和无限多自由度系统。有限多自由度系统与离散系统相对应,又可分为单自由度系统的振动、两个自由度系统的振动和多自由度系统的振动;无限多自由度系统则与连续系统相结合。连续系统可通过适当方式化为离散系统。

根据研究侧重点的不同,可从不同的角度对振动进行分类。

1. 根据振动系统的激励类型分

(1)自由振动:系统受初始激励后不再受外界激励的振动。

(2)受迫振动:系统在外界控制的激励作用下的振动。

(3)自激振动:系统在自身控制的激励作用下的振动。

(4)参数振动:系统自身参数变化激发的振动。

2. 根据系统的响应类型分

(1)确定性振动:响应是时间的确定性函数。根据响应存在时间分为暂态振动和稳态振动:前者只在较短的时间中发生,后者可在充分长时间中进行。根据响应是否有周期性还可分为简谐振动、周期振动、准周期振动、拟周期振动和混沌振动。

(2)随机振动:响应为时间的随机函数,只能用概率统计的方法描述。

3. 根据系统性质分

(1)确定性系统和随机性系统:若系统的特性可用时间的确定性函数给出,则这类系统称为确定性系统;系统特性不能用时间的确定性函数给出而只具有统计规律性的系统称为随机性系统。

(2)定常系统和参变系统:系统特性不随时间改变的系统称为定常系统,其数学描述为常系数微分方程。系统特性随时间变化的系统称为参变系统,其数学描述为变系数微分方程。

(3)线性系统和非线性系统:质量不变、弹性力和阻尼力与运动参数成线性关系的系统称为线性系统,其数学描述为线性微分方程。不能简化为线性系统的系统称为非线性系统,其数学描述为非线性微分方程。

一个实际振动系统应该采用何种简化模型,需要根据具体情况来确定。对于相同的振动问题,在不同条件下或为不同的目的,可以采用不同的振动模型。在有些情况下可以作近似简化,例如,当外界激励很小时,受迫振动可视为自由振动;当微幅振动时,非线性系统可近似作为线性系统处理。模型的建立及分析模型所得的结论,需通过实验或实践的检验。

本书采用的系统限于定常、线性、离散或连续的模型。

1.3 振动力学中的建模问题

振动研究中的首要环节是力学模型和数学模型的建立。

振动分析中一般都要通过测试与理论分析来建立力学模型。经过不断地修正,使一些工程中的振动问题获得更精确的力学模型(理论的、数值的或实验的力学模型)。

对于一台机器或一种工程结构的振动分析,首要的步骤是如何建模。由于它们本身组成的复杂性,外界载荷的复杂性、多样性(相对静载荷而言)及不可预见性(风载荷、地震载荷),为此建立振动问题力学模型时,必须根据需要解决的问题来考虑研究对象以及外界对它的作用,以便简化为一个计算所用的力学模型。例如,对高层建筑作地震反应分析时,根据所研究的对象特点不同所建立的计算力学模型也不同。

1. 刚性楼盖高层建筑

对采用现浇钢筋混凝土楼板的体型规则的高层建筑,由于楼盖的水平刚度很大,在确定结构动力特性(频率、主振型)时,可采用串联质点系[图 1.1(a)]。

2. 非刚性楼盖高层建筑

对采用钢筋混凝土预制楼板的高层建筑以及体型复杂的高层建筑,需要考虑地震作用下各层楼盖所产生的水平变形,因此在确定结构动力特性时,宜采用串并联质点系[图 1.1

(b)]。

3. 偏心结构高层建筑

结构存在偏心时，即使在地震单向平动分量作用下，也会发生扭转振动。此时若采用串联质点系作为其力学模型，就不可能体现出这种扭转振动的效果，而需采用串联刚片系作为偏心结构高层建筑的振动分析力学模型[图 1.1(c)]。该模型中每层刚片具有两个正交的水平位移和一个转角，共三个自由度，如图 1.1(d)所示。众所周知，不管机器或结构物会产生怎样的振动形式，其主要的原因在于其本身的质量(惯性)和弹性。阻尼则使振动抑制。从能量观点出发，质量可储存动能，弹性可储存势能，而阻尼则消耗能量。当外界对系统作功时，系统质量吸收动能而获得运动速度，弹性储存变形而具有使系统恢复到原来状态的能力。由于能量不断地变换就使系统在平衡位置附近作往复运动。如果没有外界始终不间断地给系统质量输入能量，那么，由于阻尼存在而消耗其能量，将使振动趋于停息。由此可见，质量、弹性和阻尼是振动系统力学模型的三要素。

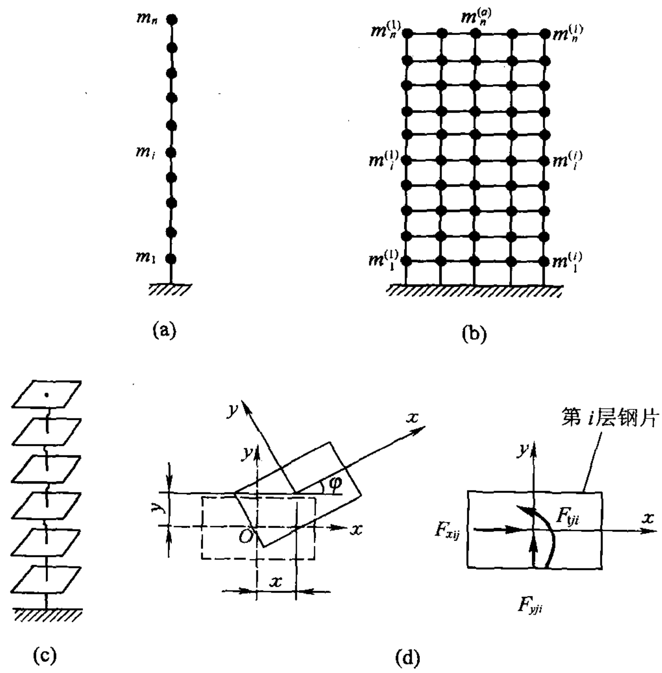


图 1.1

所有实际机器和结构物元件的质量和弹性皆是连续分布的。若将实际上是连续分布的参数(如高层建筑、桥梁、齿轮和齿轮轴等)简化成具有若干集中质量并由相应的弹簧或弹性杆和阻尼器联结在一起的系统，此时振动系统的力学模型就有连续系统和离散系统两种不同的计算力学模型。

可见，在振动分析中，力学模型的建立需注意以下几点：

(1)根据研究目的，即需要解决什么问题。对实际结构进行分析，找到其特点。

(2)分清外界对研究对象的作用，判别是确定载荷，还是不确定载荷。在线性振动中，将不讨论不规则载荷，这种载荷的作用将在随机振动书籍中专门解决。

(3)考察研究对象是以空间、还是平面问题来进行研究；是以离散、还是连续系统来进行解决；是以一个自由度、还是多个自由度系统来进行处理。

当力学模型建立之后，需建立系统参数（质量、弹性、阻尼）、激励及响应三者之间的关系式，即数学表达式——运动微分方程式。

根据理论力学中的牛顿第二定律、动力学普遍定理、动静法或拉格朗日方程建立离散系统运动微分方程。另外，再考虑材料力学中的单元、变形等概念，对连续系统建立运动微分方程。

对离散系统所建立的振动微分方程一般为二阶常微分方程。当系统为多自由度系统时，则为二阶联立微分方程组。对连续系统所建的振动微分方程一般为偏微分方程。由于微分方程是系统振动行为的数学描述，为此根据微分方程人们便可清楚地了解其运动类型。这样，若运动微分方程是常微分方程，那么系统一定是集中质量系统，即离散系统。若运动微分方程是偏微分方程，那么系统一定是连续分布参数系统，即连续系统。当运动微分方程是齐次时，系统一定作自由振动，即在初始激励后以系统的恢复力进行振动。若运动微分方程是非齐次的，则系统作强迫振动，即在系统上作用着外激励，系统受干涉力进行振动。当运动微分方程是线性的，那么系统为线性的；若运动微分方程是非线性的，则系统为非线性的。

从振动运动微分方程的自由项函数的形式也可以判定系统振动运动的形式。若自由项为简谐函数，则系统的响应（稳态）也是简谐函数；若自由项为任意周期函数，则系统的稳态响应也一定是任意周期函数；若自由项为脉冲函数，那么，系统一定是瞬态振动；若自由项为随机函数，则系统一定是随机振动。

求解微分方程是一件较为复杂的工作。对线性微分方程而言，一般对一、二个自由度系统，可用经典方法求得封闭解，对高阶线性微分方程需借用线性代数的方法，将联立微分方程化为联立代数方程，编写电算程序在计算机上求解，以得出其近似解。对于偏微分方程将应用数理方程的方法，将偏微分方程化为常微分方程，并配合边界条件进行求解。

1.4 振动力学的研究内容

随着科技和生产的发展及近代电子技术和数字计算机的发展和广泛的应用，使振动领域的基础理论和应用技术的研究日益广泛和深入。过去无法实现的复杂计算和测试皆可能实现，使振动的研究取得了突破性的进展。

当前我国处在经济建设的高潮，大量的工程项目正在建设中，工程的设计，工程问题的分析处理，产品质量的提高，设备有效运行的故障排除等，都提出了大量需要研究和解决的问题。总之，振动研究的目的是探究工程实际中使研究对象发生振动的原因及其运动规律对机器、结构物和人体的影响，寻找控制和消除振动的方法。振动的研究大致有以下几个方面：

(1)确定系统的固有频率，预防共振的发生；

(2)计算系统的动力响应，以确定机器、结构物受到的动载荷或振动的能量水平；

(3)研究平衡、隔振和消振方法，以消除振动的影响；

(4)研究自激振动及其他不稳定振动产生的原因，以便有效地控制；

(5)进行振动检测，分析事故原因及控制环境噪声；

(6)振动技术的利用。

以上这些问题涉及线性振动、非线性振动、随机振动及其他学科等。由于本书篇幅的限制，主要讨论前两类问题。

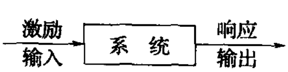


图 1.2

振动力学研究的内容可以用图 1.2 表示。系统是指所研究振动问题的对象、机械产品、工程结构或零部件，它表征了系统本身的特征，如质量（惯性）、弹

性(刚度)、阻尼。激励(输入)是指外界对系统的作用,如初始干扰、外激振力等。响应(输出)是指系统在激励的作用下所产生的输出(位移,速度和加速度),通常称为系统的动态响应。

从计算分析来看,只要已知其中两者的情况即可求得第三者。从此意义来说,工程实际中所研究和所要解决的问题可分为以下几类:

(1) 响应分析。在已知系统激励和系统参数的情况下求系统响应问题,它包括位移、速度、加速度和力的响应,为计算结构物的强度、刚度、允许的振动能量水平提供依据。

(2)系统设计。在已知系统激励的情况下设计合理的系统参数,以满足动态响应或其他输出的要求。这是使结构具有良好动态性能非常重要的一步,同时它也依赖于前一个问题的解决,故在实际工作中这两个问题是互相交替进行分析的。

(3)系统识别。在已知系统的激励和响应的情况下求系统的参数,以便了解系统的特性,这个问题称为动力学反问题之一。目前较为有效的方法是采用测试技术和理论相结合的途径。

(4)环境预测。在已知系统的输出及系统参数的情况下,来确定系统的输入,以判别系统的环境特性。

2 单自由度系统的振动

实际的振动系统往往是很复杂的，在研究某些感兴趣的物理量时，振动系统需要简化为某种理想模型。例如简化为若干个“无质量”的弹簧和“无弹性”的质量所组成的“弹簧—质量”系统。由于对同一物理系统可以建立几种数学模型，人们希望得到一个既能较真实反映实际物理系统的重要特性，又便于计算或实验的模型。仅有一个“弹簧—质量”的系统是最简单的振动模型，如图2.1所示。若质量块在竖直方向上作上下运动，系统的位置可用一个独立坐标y来确定，这种系统称为单自由度系统，简称单度系统。工程中有许多问题可简化成这种模型。图2.2(a)所示为一发动机固定在混凝土基础上，在只研究发动机与基础的竖直振动时，将基础和发动机一起看作质量块，把参与振动的土壤当作一个无质量的弹簧和阻尼器，于是就简化成图2.2(b)所示的弹簧—质量—阻尼系统。图2.3中所示各例均属于单自由度振动系统，也都可以简化为类似图2.2(b)所示的模型。

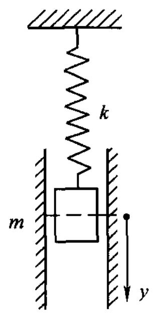


图 2.1

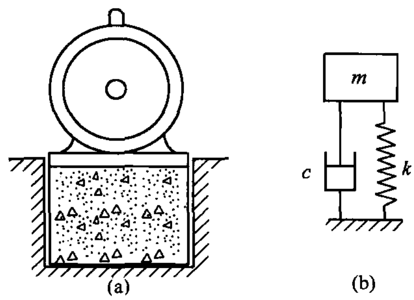


图 2.2

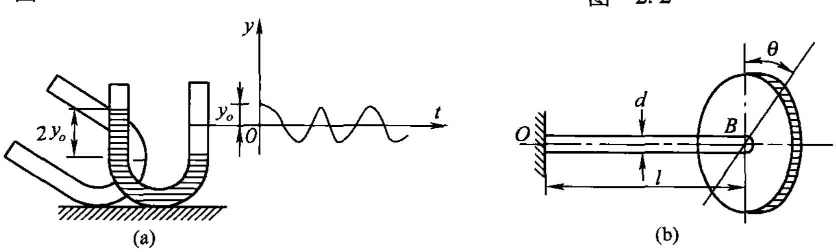


图 2.3

2.1 运动方程的建立

【例2.1】 已知弹簧—质量系统如图2.4(a)所示，质量为m，弹簧刚度为k，弹簧原长为l。试确定系统的振动方程。

【解】 图2.4(a)是最简单的单自由度系统。考察弹簧—质量系统沿铅垂方向的自由振动。设x_1向下为正，由牛顿第二定律知系统的运动方程为

$$m\ddot{x}_1 + k(x_1 - l) = mg$$

若设偏离静平衡位置的位移为 x，则因 $x_1 = x + l + mg/k$，故上式变为

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

因此，当像重力一类的不变力作用时，可只考虑偏离系统静平衡位置的位移，那么运动方程中不会再出现重力这类常力，使方程形式变得简洁。现约定，以后若无特别指明，一律以系统稳定的静平衡位置作为运动(或广义)坐标的原点。

【例 2.2】 如图 2.5 所示扭摆，已知扭轴的切变模量为 G，极惯性矩为 I_p，转动惯量为 J，轴长为 l。试求扭摆的振动方程。

【解】 如图 2.5 所示，相对于固定轴 x 发生扭动，以 θ 为广义坐标建立系统的转动运动方程。经分析知有两力矩作用在圆盘上，即惯性力矩 $J\ddot{\theta}$ 和恢复力矩 $\frac{GI_p}{l}\theta$。由动静法原理得

$$J\ddot{\theta} + \frac{GI_p}{l}\theta = 0$$

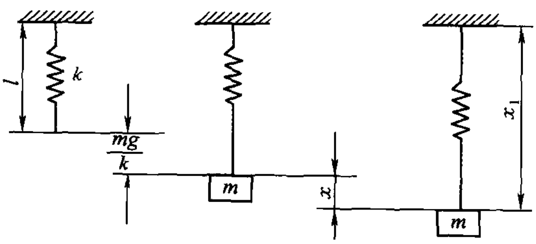


图 2.4

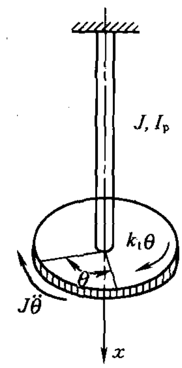


图 2.5

其中，$\frac{GI_p}{l}$ 为轴的扭转刚度，设为 k_t，故

$$\ddot{\theta} + \frac{k_t}{J}\theta = 0$$

【例 2.3】 一质量为 m 的重物附加在简支梁上，系统参数及截面尺寸如图 2.6(a)、(b) 所示。试将系统简化为单自由度系统，并求其振动方程。

【解】 梁的质量与 m 相比可略去。弹簧常数 k 取决于质量 m 在梁上的位置。对图 2.6(a)所示的简支梁，由材料力学得

$$\Delta = \frac{mg}{3EI} \cdot \frac{l_1^2 l_2^2}{l}$$

从而

$$k = \frac{mg}{\Delta} = \frac{3EIl}{l_1^2 l_2^2}$$

因矩形横截面惯性矩 $I = \frac{1}{12}bh^3$，所以

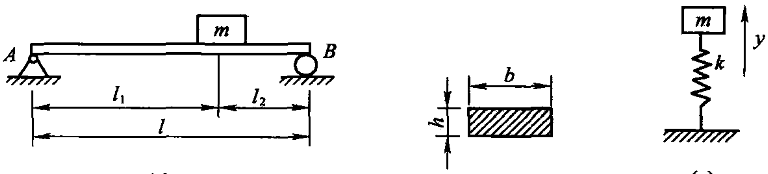
$$k = \frac{Ebh^3 l}{4l_1^2 l_2^2}$$

将带重物的简支梁简化为图 2.6(c)所示的相当系统，惯性力与弹性恢复力相平衡，则有

$$m\ddot{y}+ky=0$$

或
$$y+\frac{Ebh^3l}{4ml_1^2l_2^2}y=0$$

如果梁的两端不是简支，则 Δ 应有不同数值。



(a) (b) (c)

图 2.6

【例 2.4】 如图 2.7 所示系统，相关参数已在图上标出。试求系统的振动方程。

【解】 求解时可以选择任意坐标 x_1、x_2、θ 作为变量，但它们相互关联，只有一个是独立的。现取绕固定轴 O 的转角 θ 为独立坐标，则等效转动惯量

$$J_c=m_1a^2+m_2b^2+m_3r^2$$

其中，r 是 m_3 的惯性半径。系统的等效角刚度

$$k_e=k_1a^2+k_2b^2+k_3c^2$$

则
$$\ddot{\theta}+\frac{k_1a^2+k_2b^2+k_3c^2}{m_3r^2+m_2b^2+m_1a^2}\theta=0$$

或
$$\ddot{\theta}+A\theta=0$$

其中
$$A=\frac{k_1a^2+k_2b^2+k_3c^2}{m_1a^2+m_2b^2+m_3r^2}$$

可以取 x_1 为独立坐标，于是

$$(m_1)_e=m_1+m_2\left(\frac{b}{a}\right)^2+m_3\left(\frac{r}{a}\right)^2$$

$$(k_1)_e=k_1+k_2\left(\frac{b}{a}\right)^2+k_3\left(\frac{c}{a}\right)^2$$

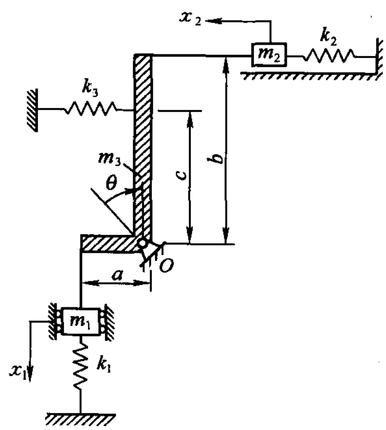


图 2.7

令
$$B=\frac{(k_1)_e}{(m_1)_e}=\frac{k_1+k_2\left(\frac{b}{a}\right)^2+k_3\left(\frac{c}{a}\right)^2}{m_1+m_2\left(\frac{b}{a}\right)^2+m_3\left(\frac{r}{a}\right)^2}$$

经推导可得系统运动方程

$$\ddot{x}_1+Bx_1=0$$

同理以 x_2 为独立坐标，可得

$$\ddot{x}_2+Cx_2=0$$

其中
$$C=\frac{k_1+k_2\left(\frac{a}{b}\right)^2+k_3\left(\frac{c}{b}\right)^2}{m_1+m_2\left(\frac{a}{b}\right)^2+m_3\left(\frac{r}{b}\right)^2}$$

不难验证 $A=B=C$。

可见，对结构较复杂的单自由度系统（其中有些元件作平移，另一些作转动），不管选择哪一个坐标变量作为独立坐标，其振动方程形式不变。这说明系统固有振动规律与坐标选择无关。

2.2 等效质量、等效刚度、等效阻尼

1. 等效质量

在工程实际中，有时要把具有多个集中质量或分部质量系统简化为具有一个等效质量的单自由度系统。下面介绍几种典型情况下求等效质量的方法。

【例 2.5】 如图 2.8 所示，一弹簧—质量系统若需要考虑弹簧的质量，则其等效质量为多少？设弹簧原长为 l，单位长度的质量为 ρ。

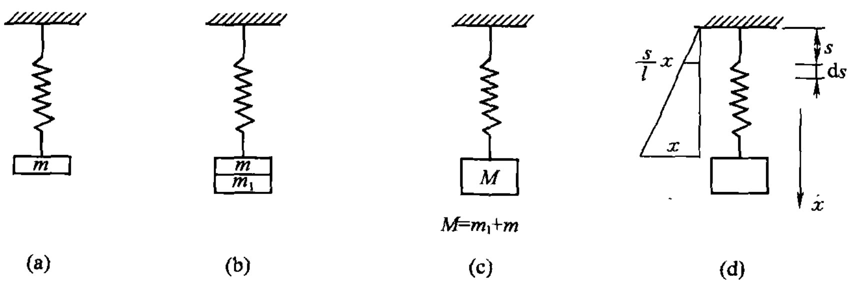


图 2.8

【解】 弹簧的质量为匀布，它要参与系统振动，可以将其简化，即把它集中到质量块上，如图 2.8(b)所示。现按动能等效的原则来获得等效质量，如图(d)所示，取微段 ds，其质量

$$\rho \mathrm{d}s = \mathrm{d}m$$

在 ds 段处的弹簧位移为$\frac{s}{l}x$，速度为$\frac{s}{l}\dot{x}$，微段的动能为

$$\mathrm{d}T = \frac{1}{2}\mathrm{d}m \cdot v^2 = \frac{\rho}{2}\mathrm{d}s\left(\frac{s}{l}\dot{x}\right)^2$$

则弹簧的动能为

$$T = \int \mathrm{d}T = \int_0^l \frac{1}{2}\rho \cdot \frac{\dot{x}^2}{l^2}s^2\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\rho l\right)\dot{x}^2$$

令
$$m_1 = \frac{1}{3}\rho l$$

则
$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2$$

故
$$m_e = m_1 = \frac{1}{3}\rho l$$

即弹簧的等效质量是按 1/3 的弹簧的质量附加到原质量块上。

【例 2.6】 如图 2.9(a)所示，已知杆的长度为 l，质量为 m，弹簧的刚度系数为 k。求该系统的等效质量。

【解】 依据动能等效原则，有

$$T = \frac{1}{2}J_0\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left[J_C + m\left(\frac{l}{4}\right)^2\right]\dot{\theta}^2$$

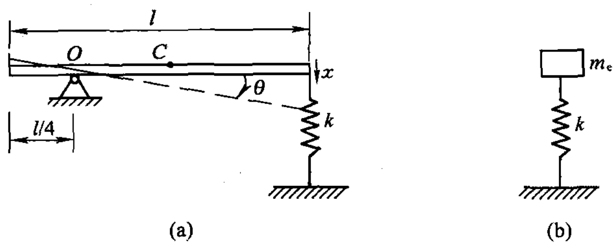


图　2.9

又 $J_C = \frac{1}{12}ml^2$，则

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{48}ml^2\right)\dot{\theta}^2 \tag{a}$$

由几何关系，得

$$\dot{x} = \frac{3}{4}l\dot{\theta}$$

故

$$T = \frac{1}{2}m_e\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m_e\left(\frac{3}{4}l\dot{\theta}\right)^2 \tag{b}$$

由式(a)和式(b)得

$$m_e = \frac{7}{27}m$$

【例 2.7】 如图 2.10 所示系统，一转动惯量为 J_0 的杆件 AB，连接有质量块 m_1 和 m_2，转轴 O 点距杆 A、B 端的距离分别为 a 和 b。现求将质量简化到 A 点的等效质量。

【解】 设等效质量的动能为

$$T_e = \frac{1}{2}m_e u_e^2$$

而系统的总动能为

$$T = \frac{1}{2}m_1 v_A^2 + \frac{1}{2}m_2 v_B^2 + \frac{1}{2}J_0\omega^2$$

又

$$u_e = v_A = a\dot{\theta}$$

$$v_B = b\dot{\theta}$$

$$T = \frac{1}{2}m_1(a\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}m_2(b\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}J_0(\dot{\theta})^2$$

$$T = T_e$$

$$\frac{1}{2}m_e(a\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}m_1(a\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}m_2(b\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}J_0(\dot{\theta})^2$$

得

$$m_e = m_1 + m_2\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{J_0}{a^2}$$

【例 2.8】 如图 2.11 所示均质等截面简支梁，在梁中央放置一集中质量 m_1，梁本身的质量为 m_2。试求将梁本身质量简化到梁的中央的等效质量。

【解】 已知梁中央处的静载荷为 $m_1 g$，在其作用下梁的挠度曲线为

$$y = \frac{m_1 g}{48EI}(3l^2x - 4x^3)\quad\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{l}{2}\right) \tag{a}$$

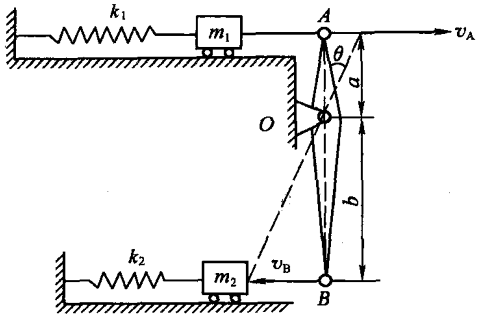


图　2.10

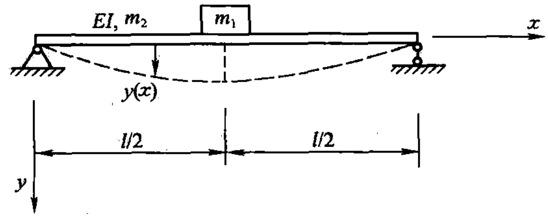


图　2.11

$$y_m = y(x)\Big|_{x=l/2} = \frac{m_1 g}{48EI} l^3 \qquad \text{(b)}$$

式中 y、y_m 皆为时间函数。

由式(a)、式(b)得

$$y = y_m \frac{3l^2x - 4x^3}{l^3}$$

则

$$\dot{y} = \dot{y}_m \frac{3l^2x - 4x^3}{l^3} \qquad \text{(c)}$$

设梁的单位长度的质量为 ρ，则其动能为

$$T = 2\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{1}{2}\rho\left(\dot{y}_m \frac{3l^2x - 4x^3}{l^3}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{35}\rho l\right)\dot{y}_m^2 = \frac{1}{2}m_e \dot{y}_m^2$$

故

$$m_e = \frac{17}{35}m_2$$

2. 等效刚度

工程系统中，若弹性元件斜向布置或几个弹性元件(或弹簧)以不同方式连接在一起，则必须求得一个与之等效的弹性元件的刚度，称为等效刚度。

(1)并联弹簧

把图 2.12(a)作为并联弹簧是显而易见的，但对图 2.12(b)和(c)有必要略加说明。

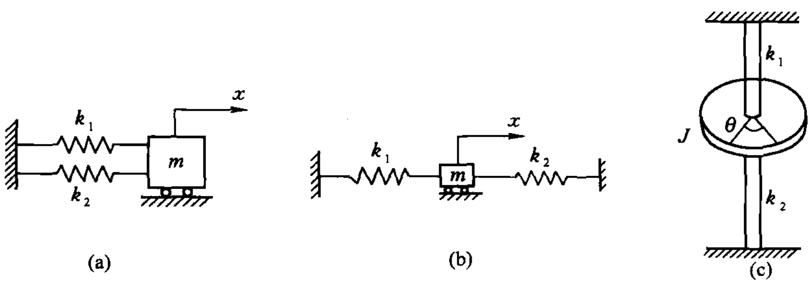


图　2.12

图 2.12(b)和(c)是并联的，是因为图(b)中 k_1 和 k_2 两弹簧的变形相同，而图(c)中两轴的扭角也相同。

如果 F_1、F_2 分别表示图 2.12(b)中 k_1 和 k_2 弹簧所受到的力，x 为质点 m 的位移，则