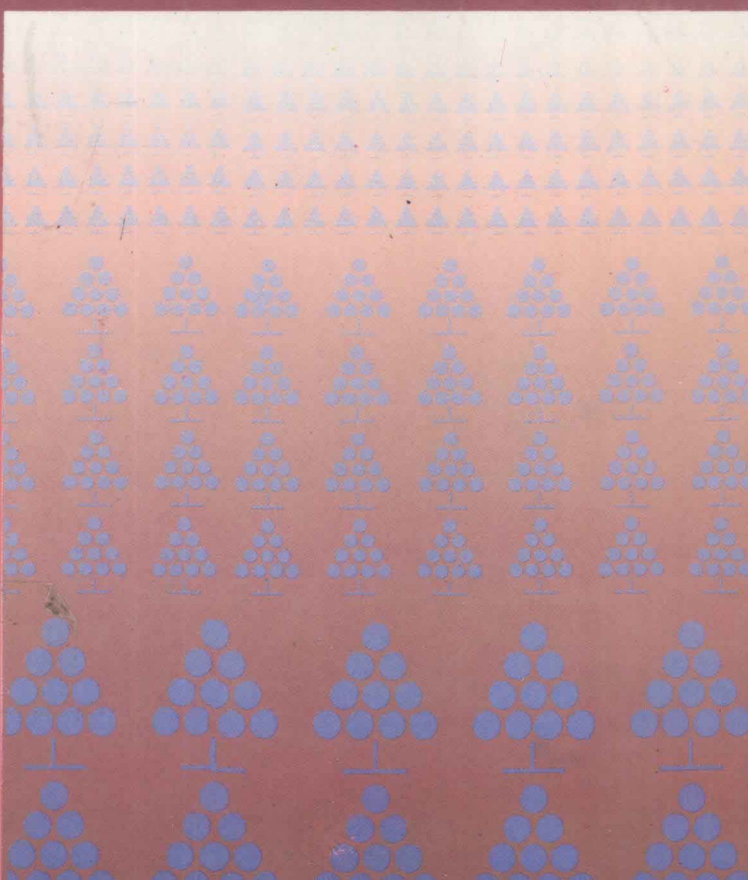
代数与三角解题

〔苏〕 V. 利特维内柯
A. 莫德科维奇 著
张锡桐 陈特为 林丽明 译
张谋成 审校



代数与

[苏] V．利特维
A．莫德科
张锡桐
张谋成

三角解题

著

特为　林丽明　译

审校

广东教育出版社

代数与三角解题

V.利特维内柯
A.莫德科维奇 著

张锡桐　陈特为　林丽明 译

张谋成 审校

·

广东教育出版社出版发行

韶关新华印刷厂印刷

850×1168毫米32开本　15印张　1插页　366,000字

1992年4月第1版　1992年4月第1次印刷

印数1—1,800册

ISBN 7—5406—1737—3/G.1727

定价　5.70元

内容提要

这是一本中学数学教学参考书，内容包括代数与三角两部分，每一节除了作简短导言性说明外，基本上是以例题为主阐述解题技巧，而且配有大量练习题．题目由易而难，成梯形编排，便于循序渐进地掌握与提高．

本书读者对象为：普通中学、中等专业学校、中等技术学校和职业中学的数学教师和学生．本书也适用于师范院校、教育学院数学专业的学生学习和参考．

译者的话

应用广泛的基础科学——数学的发展在苏联处于领先地位，这是全世界公认的。苏联的数学教学内容和方法与我国有着历史的联系。随着与苏联在文化、科技领域交流的深入发展，我们认为苏联在中学数学教育方面，有不少内容和经验值得学习和借鉴。因此，选定了其中一套新版的有关中学数学解题的参考书——《几何解题》和《代数与三角解题》，将其从英文译成中文，并由广东教育出版社出版。

《代数与三角解题》是莫斯科“迷尔”出版社于1987年自行从俄文版翻译为英文版的参考书，根据行家认为，苏联可以翻译成外文出版的书一般都是质量较高的。

我们在张谋成教授指导下对这本书进行翻译(并参考了原俄文版)。具体执笔是：林丽明(§1—§10)，张锡桐(§11—§20)，陈特为(§21—§27).对原文中某些错漏之处作了校正。但因时间仓促和水平所限，错误在所难免，恳请读者指正。

译　者　1990．12

前　言

这本学习辅助书是为师范学院数学和物理系的学生而写的。

这本书包含大约2000道例子、问题和习题，其中1700道是独立求解的习题。在较为简单的习题中，也有一些习题，它们的求解要求认真地、有时甚至是有创造性的工作。在准备手稿付印过程中，我们为中学代数和中学三角的问题的基本类型腾出一些篇幅。解决这些问题有助于学生获得作为中学教师必须知道的如何解决中学程度的数学问题所需要的专业技能。

提请读者注意，这本书不仅是一些问题的汇编，而是一本实用的学习辅助书。每一节包含必要的理论材料和足够数量的已解出的例子(总数大约300道)，从方法论的观点，它们对于低年级学生是非常有用的。

这本书建立在最近出版的为实用数学解题而写的和打算学习对应课程的学生而写的学习辅助书系列的基础上。在准备手稿过程中，参考了中学生的各种教科书和学习辅助书，教师的各种参考书，代数和三角的各种习题书，大学预科学生的学习辅助书，大学数学系入学考试试题，中学数学奥林匹克材料等等。

作者十分感谢И.П.马凯罗夫，М.М.雷萨多夫斯卡娅，М.И.德尼索娃和А.Х.纳齐伊夫，感谢他们对手稿提出的有价值的建议和评论。

作　者

目　　录

第 一 部 分

代　　数

第一章　恒等变换

§1　多项式的分解

当解决许多代数问题时，把一个多项式表示为两个或多个多项式的乘积，或者把一个多项式表示为一个多项式和一个至少含有一个变量的单项式的乘积的这些形式，已证明是十分必要的。不过，并不是每一个多项式在实数域上都是可分解的。例如，多项式$x+3$和$x^2+6x+10$就是不可分解的。这样的多项式称为**不可约多项式**或者称为**素多项式**。如果所有得到的因式是不可约的，那么这个多项式的分解就被认为已经完成了。

在分解多项式时，我们使用多种方法：提取公因式到括号外，分组，利用简单的乘法公式等等。现在，讨论几个例子来解释这些方法。

例1　分解下面的多项式：

$$(1)\quad f(a,\ b)=a^2-2a^3b-2ab^3+b^2,$$

$$(2)\quad f(a)=a^3-7a^2+7a+15.$$

解　(1) 取头、尾两项为一组，中间项为另一组，又在第二组中提取公因式到括号外后，我们得到：

$$f(a,\ b)=(a^2+b^2)-2ab(a^2+b^2)=(a^2+b^2)(1-2ab).$$

(2) 我们用下面的方法表示这个多项式的第二项和第三项：

$$-7a^2=-3a^2-4a^2;\ 7a=12a-5a.$$

然后，我们写：$f(a)=a^3-3a^2-4a^2+12a-5a+15.$

两两合成一组并从这些组中提取公因式到括号外后，我们得到：

$$f(a)=(a^3-3a^2)-(4a^2-12a)-(5a-15)$$
$$=a^2(a-3)-4a(a-3)-5(a-3)$$
$$=(a-3)(a^2-4a-5).$$

接下来就是分解多项式 a^2-4a-5。这可用下面两种 方法。

第一种方法 我们得到：

$$a^2-4a-5=a^2+a-5a-5$$
$$=a(a+1)-5(a+1)$$
$$=(a+1)(a-5).$$

第二种方法 从方程$a^2-4a-5=0$，我们找出根：$a_1=-1$，$a_2=5$。应用分解二次三项式公式，$ax^2+bx+c=a(x-x_1)\cdot(x-x_2)$，我们得到：

$$a^2-4a-5=(a-a_1)(a-a_2)=(a+1)(a-5).$$

所以
$$f(a)=(a-3)(a+1)(a-5).$$

例2 分解

$$f(a, b, c)=ab(a+b)-bc(b+c)+ac(a-c).$$

解 我们利用含于第一个括号内的表示式是含于第二个括号和第三个括号的表示式之和这一特点：$a+b=(b+c)+(a-c)$。因此

$$f(a, b, c)=ab((b+c)+(a-c))-bc(b+c)+ac(a-c)$$
$$=ab(b+c)+ab(a-c)-bc(b+c)+ac(a-c).$$

分组并从这些组中提取公因式到括号外面后，我们得到：

$$f(a, b, c)=(ab(b+c)-bc(b+c))+(ab(a-c)+ac(a-c))$$
$$=(b+c)(ab-bc)+(a-c)(ab+ac)$$
$$=(b+c)b(a-c)+(a-c)a(b+c)$$
$$=(a-c)(b+c)(a+b).$$

例3 分解

$$f(a)=a^3-5a^2-a+5.$$

解 分组并提取公因式到括号外面后，我们得到：

$$f(a)=(a^3-5a^2)-(a-5)=a^2(a-5)-(a-5)$$
$$=(a-5)(a^2-1).$$

利用公式$p^2-q^2=(p-q)(p+q)$，我们得到：

$$f(a)=(a-5)(a-1)(a+1).$$

例4 分解

$$f(a, b)=4a^2-12ab+5b^2.$$

解 把二项式$4a^2-12ab$配成完全平方后，我们得到：$(2a)^2-2(2a)(3b)+(3b)^2$.因此

$$f(a, b)=(4a^2-12ab+9b^2)-9b^2+5b^2$$
$$=(2a-3b)^2-(2b)^2$$
$$=(2a-3b-2b)(2a-3b+2b)$$
$$=(2a-5b)(2a-b).$$

例5 分解

$$f(a)=a^4-10a^2+169.$$

解 注意 $a^4+169=(a^2)^2+13^2$，并把它配成完全平方后，我们得到：

$$f(a)=(a^4+26a^2+169)-26a^2-10a^2$$
$$=(a^2+13)^2-(6a)^2$$
$$=(a^2-6a+13)(a^2+6a+13).$$

例6 分解

$$f(a,b)=a^6+a^4+a^2b^2+b^4-b^6.$$

解 因为

$$a^6-b^6=(a^3)^2-(b^3)^2$$
$$=(a^3-b^3)(a^3+b^3)$$
$$=(a-b)(a^2+ab+b^2)(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

而且

$$a^4+a^2b^2+b^4=(a^4+2a^2b^2+b^4)-a^2b^2$$

$$= (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2$$
$$= (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2),$$

所以，我们得到：

$$f(a, b) = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)((a - b)(a + b) + 1)$$
$$= (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)(a^2 - b^2 + 1).$$

例7 分解

$$f(a) = a^3 + 9a^2 + 27a + 19.$$

解 显而易见，为了得到和的完全立方，所给的函数可以重新写成下面的形式：

$$f(a) = (a^3 + 9a^2 + 27a + 27) - 8$$
$$= (a + 3)^3 - 2^3$$
$$= (a + 3 - 2)((a + 3)^2 + (a + 3) \times 2 + 4)$$
$$= (a + 1)(a^2 + 8a + 19).$$

例8 证明：如果 $a \in N$ 和 $f(a) = a^4 + 6a^3 + 11a^2 + 6a$，则 $f(a) \vdots 24$*

解 把$6a^3$和$11a^2$表示为同类项之和：$6a^3 = a^3 + 5a^3$ 和$11a^2 = 5a^2 + 6a^2$．那么

$$f(a) = a^4 + (a^3 + 5a^3) + (5a^2 + 6a^2) + 6a$$
$$= (a^4 + a^3) + (5a^3 + 5a^2) + (6a^2 + 6a)$$
$$= a^3(a + 1) + 5a^2(a + 1) + 6a(a + 1)$$
$$= a(a + 1)(a^2 + 5a + 6)$$
$$= a(a + 1)(a + 2)(a + 3).$$

但是，四个紧接的自然数至少有一个可以被 3 整除，而且两个是偶数，也就是说，其中一个可以被 4 整除，因此，这四个数的乘积可以被$3 \times 2 \times 4$整除．所以，$f(a) \vdots 24$．

例9 证明：如果$f(a) = a^2(a^2 + 14) + 49$，则 $f(a) \vdots 64$，其

---

* 记号 ⋮ 表示被整除（没有余项）．

中a是一个奇数。

解 注意$f(a)=a^4+14a^2+49=(a^2+7)^2$。因为$a$是一个奇数，所以我们有：$a=2n-1$，其中$n\in N$。那么$f(a)=f(2n-1)=((2n-1)^2+7)^2=(4n^2-4n+8)^2=16(n^2-n+2)^2$。这样得到的式子可以被16整除。因此，只要证明$(n^2-n+2)^2 \vdots 4$，就可以证明$f(a)\vdots 64$。考虑两种可能的情况：(1) n是一个偶数；(2) n是一个奇数。

(1) 如果n是一个偶数，则n^2也是一个偶数，因此n^2-n+2也是一个偶数，即$(n^2-n+2)\vdots 2$，这样$(n^2-n+2)^2\vdots 4$，因此，$f(a)\vdots 64$；

(2) 如果n是一个奇数，则n^2也是奇数，然而n^2-n是一个偶数，而且n^2-n+2也是一个偶数。因此，在这种情况下，$f(a)\vdots 64$。

习　题

分解下列表示式：

1. a^4-1。 2. a^6-1。 3. a^6+1。 4. a^4-18a^2+81。

5. $a^{12}-2a^6+1$。 6. $a^5+a^3-a^2-1$。 7. a^4+2a^3-2a-1。

8. $4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2$。

9. $a^4+a^2b^2+b^4$。 10. a^4+4a^2-5。

11. $4a^4+5a^2+1$。 12. $c^4-(1+ab)c^2+ab$。

13. a^4+324。 14. a^4+a^2+1。

15. a^8+a^4+1。 16. $2a^4+a^3+4a^2+a+2$。

17. $a^4+3a^3+4a^2-6a-12$。

18. $(a^2+a+3)(a^2+a+4)-12$。 19. $a^5+a^3-a^2-1$。

20. $2a^2b+4ab^2-a^2c+ac^2-4b^2c+2bc^2-4abc$。

21. $(ab+ac+bc)(a+b+c)-abc$。

22. $a(b-2c)^2+b(a-2c)^2-2c(a+b)^2+8abc$.

23. $a^3(a^2-7)^2-36a$. 24. $(a+b)^5-(a^5+b^5)$.

25. $a^2b^2(b-a)+b^2c^2(c-b)+a^2c^2(a-c)$.

26. $8a^3(b+c)-b^3(2a+c)-c^3(2a-b)$.

27. $(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)$.

28. a^4+9. 29. a^4+b^4.

30. a^3+5a^2+3a-9. 31. $a(a+1)(a+2)(a+3)+1$.

32. $(a+1)(a+3)(a+5)(a+7)+15$.

33. $2(a^2+2a-1)^2+5(a^2+2a-1)(a^2+1)+2(a^2+1)^2$.

34. $(a-b)c^3-(a-c)b^3+(b-c)a^3$.

35. $(a-b)^3+(b-c)^3-(a-c)^3$.

36. $(a^2+b^2)^3-(b^2+c^2)^3-(a^2-c^2)^3$.

37. $a^4+2a^3b-3a^2b^2-4ab^3-b^4$.

38. $a^2b+ab^2+a^2c+b^2c+bc^2+3abc$.

39. $a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2$.

40. $a^5+a^4+a^3+a^2+a+1$. 41. $a^4+2a^3+3a^2+2a+1$.

42. $a^4-2a^3b-8a^2b^2-6ab^3-b^4$.

43. $a^4+a^2+\sqrt{2}a+2$.

44. $a^{10}+a^5+1$.

45. 证明：如果$a\in N$，则$(a^5-5a^3+4a)\vdots 120$.

46. 证明：如果a是一个与6互素的数，则$(a^2-1)\vdots 24$.

47. 证明：如果$a\in N$，则$(2a^3+3a^2+a)\vdots 6$.

48. 对于$a\in N$的什么值，表示式a^4+4a是一个素数？

49. 证明：如果a是一个偶数，则$\frac{a}{12}+\frac{a^2}{8}+\frac{a^3}{24}$是一个整数.

50. 证明：如果$a\in N$，则$\frac{a^5}{120}+\frac{a^4}{12}+\frac{7a^3}{24}+\frac{5a^2}{12}+\frac{a}{5}$是一个整数.