21世纪经管类创新教材

微积分
习题精解

陶前功　熊章绪　主编

下册

科学出版社

21 世纪经管类创新教材

微积分习题精解

（下册）

陶前功　熊章绪　主编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是与陶前功、熊章绪主编的《微积分教程》(下册)相配套的参考书. 本书按教材的章节顺序分为5章,包括向量代数与空间解析几何、多元函数微积分学、无穷级数、微分方程、差分方程. 本书对教材中的全部习题给出了详细分析和精心解答,通过解题示范,揭示解题规律,使读者对于如何着手解题,如何思考有所启发. 本书对培养和提高学生的学习兴趣以及增强学生学好微积分这门课程的信心有较大的作用.

本书可作为高等学校经济管理类各专业微积分课程的教学参考书和学生的学习用书,也可供报考研究生的读者参考.

图书在版编目(CIP)数据

微积分习题精解. 下册/陶前功,熊章绪主编. —北京：科学出版社,2011.9
21世纪经管类创新教材
ISBN 978-7-03-032152-7

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①陶…②熊… Ⅲ. ①微积分-高等学校-题解
Ⅳ. O172-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第170290号

责任编辑：曾 莉 / 责任校对：董艳辉
责任印制：彭 超 / 封面设计：苏 波

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

武汉市新华印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011年9月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2011年9月第一次印刷 印张：16
印数：1—5 000 字数：310 000

定价：28.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前　　言

陶前功、熊章绪主编的《微积分教程》(下册)习题分为三个部分,包括每节后的习题(A)、习题(B)和每章后的总习题. 习题(A)多为基础题,习题(B)多为提高题,总习题则是综合性习题,题量大,有坡度,能满足不同层次读者的需求.

本书是与《微积分教程》(下册)配套的参考书,它对教材中的全部习题给出了精心的解析,旨在帮助读者掌握一元微积分的基本内容和解题方法,提高学习兴趣以及分析问题和解决问题的能力. 值得一提的是,解题能力的提高需要动脑加动手,需要自身的实践和不断地积累经验. 因此,我们希望读者拿到题目,要先行思考,自己解题,然后与题解进行对照,这样,对提高学习效率是有益的.

本书可作为高等学校经济管理类各专业教师的教学用书和学生学习微积分课程的参考书,也可供报考研究生的读者参考.

本书由陶前功、熊章绪主编,曾艳妮任副主编. 陶前功、曾艳妮、谢承义、陈兰、赵琼参加各章节的编写,曾艳妮对全部习题进行了核查. 另外,易风华、邢婧等参加了部分编校工作. 最后由陶前功统稿、定稿.

本书不足之处,诚恳期望同行和读者批评指正.

编　　者

2011 年 7 月

目　　录

第 7 章　向量代数与空间解析几何 …… 1

习题 7.1 …… 1

习题 7.2 …… 1

习题 7.3 …… 2

习题 7.4 …… 3

习题 7.5 …… 5

习题 7.6 …… 6

总习题 7 …… 7

习题解答 …… 9

习题 7.1 …… 9

习题 7.2 …… 10

习题 7.3 …… 13

习题 7.4 …… 17

习题 7.5 …… 26

习题 7.6 …… 28

总习题 7 …… 33

第 8 章　多元函数微积分学 …… 43

习题 8.1 …… 43

习题 8.2 …… 45

习题 8.3 …… 47

习题 8.4 …… 48

习题 8.5 …… 50

习题 8.6 …… 51

习题 8.7 …… 53
习题 8.8 …… 54
总习题 8 …… 58
习题解答 …… 60
习题 8.1 …… 60
习题 8.2 …… 65
习题 8.3 …… 76
习题 8.4 …… 82
习题 8.5 …… 88
习题 8.6 …… 92
习题 8.7 …… 100
习题 8.8 …… 102
总习题 8 …… 112

第 9 章 无穷级数 …… 120
习题 9.1 …… 120
习题 9.2 …… 121
习题 9.3 …… 122
习题 9.4 …… 123
习题 9.5 …… 124
总习题 9 …… 125
习题解答 …… 127
习题 9.1 …… 127
习题 9.2 …… 131
习题 9.3 …… 136
习题 9.4 …… 140
习题 9.5 …… 148
总习题 9 …… 155

第 10 章 微分方程 …… 164
习题 10.1 …… 164
习题 10.2 …… 165

习题 10.3 …… 166
习题 10.4 …… 167
习题 10.5 …… 168
习题 10.6 …… 169
总习题 10 …… 169
习题解答 …… 171
习题 10.1 …… 171
习题 10.2 …… 175
习题 10.3 …… 189
习题 10.4 …… 194
习题 10.5 …… 198
习题 10.6 …… 211
总习题 10 …… 213

第 11 章　差分方程 …… 229
习题 11.1 …… 229
习题 11.2 …… 229
习题 11.3 …… 230
习题 11.4 …… 230
总习题 11 …… 230
习题解答 …… 231
习题 11.1 …… 231
习题 11.2 …… 233
习题 11.3 …… 236
习题 11.4 …… 238
总习题 11 …… 239

第 7 章 向量代数与空间解析几何

习 题 7.1

(A)

1. 指出下列各点在空间直角坐标系中的位置：

$$A(1,\ -2,\ 3),\ B(0,\ 2,\ 1),\ C(-4,\ -3,\ 1),$$
$$D(2,\ 0,\ 0),\ E(0,\ -1,\ 0),\ F(-5,\ 2,\ 3)$$

2. 求点$(a,\ b,\ c)$关于(1) 原点；(2) 各坐标面；(3) 各坐标轴对称的点的坐标.

3. 自点 $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$分别作各坐标平面和各坐标轴的垂线，写出各垂足的坐标.

4. 求点 $M(4,\ -3,\ 5)$到各坐标平面和各坐标轴的距离.

5. 在 x 轴上求一点 P，使它与点 $P_0(4,\ 1,\ 2)$的距离为 $\sqrt{30}$.

(B)

1. 过点 $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$分别作平行于 z 轴的直线和平行于 xOy 平面的平面，问它们上面的点的坐标有什么特点？

2. 求点$(1,\ -3,\ -2)$关于点$(-1,\ 2,\ -1)$对称的点的坐标.

3. 在 yOz 平面上，求与已知点 $A(3,\ 1,\ 2)$，$B(4,\ -2,\ -2)$和 $C(0,\ 5,\ 1)$等距离的点的坐标.

4. 一边长为 a 的立方体放置在 xOy 平面上，其底面的中心在坐标原点，底面的顶点在 x 轴和 y 轴上，求它各顶点的坐标.

5. 证明：以 $A(4,\ 1,\ 9)$，$B(10,\ -1,\ 6)$，$C(2,\ 4,\ 3)$为顶点的三角形是等腰直角三角形.

习 题 7.2

(A)

1. 已知菱形两邻边 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，对角线的交点为 D，求$\overrightarrow{OD}$.

2. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

3. 把$\triangle ABC$的BC边平分成五等份,设分点依次是D_1,D_2,D_3,D_4,再把各分点与点A连接. 试以$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$来表示向量$\overrightarrow{D_1A}$,$\overrightarrow{D_2A}$,$\overrightarrow{D_3A}$,$\overrightarrow{D_4A}$.

4. 已知两点$A(0,1,2)$和$B(1,-2,3)$,试用坐标表示式表示向量$\overrightarrow{AB}$及$-3\overrightarrow{AB}$.

5. 求平行于向量$\boldsymbol{a}=\{4,2,\sqrt{5}\}$的单位向量.

6. 设向量$\boldsymbol{r}$的模是4,它与u轴的夹角是$60°$,求$\boldsymbol{r}$在u轴上的投影.

7. 已知$|\boldsymbol{a}|=3$,且其方向角$\alpha=\gamma=60°$,$\beta=45°$,求向量$\boldsymbol{a}$.

8. 设$|\overrightarrow{OM}|=6$,$\overrightarrow{OM}$与x轴成$45°$角,与y轴成$60°$角. 若点M的坐标中z是负的,求$\overrightarrow{OM}$的坐标.

(B)

1. 如果平面上一个四边形的对角线互相平分,试用向量证明它是平行四边形.

2. 设$A(1,2,-3)$,$B(2,-3,5)$为平行四边形的相邻两个顶点,而$M(1,1,1)$为对角线的交点,求其余两个顶点的坐标.

3. 设$\boldsymbol{a}=\{3,5,8\}$,$\boldsymbol{b}=\{2,-4,-7\}$,$\boldsymbol{c}=\{5,1,-4\}$,求一向量$\boldsymbol{m}=4\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$在$x$轴上的投影以及在$y$轴上的分量.

4. 一向量的终点为$B(2,-1,7)$,它在x轴,y轴及z轴上的投影分别为4,-4,7,求这向量的起点A的坐标.

5. 一向量与x轴,y轴的夹角相等,而与z轴的夹角是前者的两倍,求该向量的方向角.

6. 用向量法证明:三角形两边中点的连线平行于第三边,且长度等于第三边的长度的一半.

习 题 7.3

(A)

1. 设$|\boldsymbol{a}|=3$,$|\boldsymbol{b}|=5$,且两向量的夹角$\theta=\pi/3$,试求$(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$.

2. 设$\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$,求:

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$及$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$;　　(2) $(-2\boldsymbol{a})\cdot 3\boldsymbol{b}$及$\boldsymbol{a}\times 2\boldsymbol{b}$;

(3) $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$;　　(4) $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$及$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$.

3. 设$\boldsymbol{a}=\{3,5,-2\}$,$\boldsymbol{b}=\{2,1,4\}$,问$\lambda$与$u$有怎样的关系能使$\lambda\boldsymbol{a}+u\boldsymbol{b}$与$z$轴垂直?

4. 已知 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}$,求证:$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d}$ 与 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 共线.

5. 设 $\boldsymbol{a}=\{2,-3,1\}$, $\boldsymbol{b}=\{1,-1,3\}$, $\boldsymbol{c}=\{1,-2,0\}$,求:

(1) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$;　　(2) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$;

(3) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$;　　(4) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$.

6. 设 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 为相互垂直的单位矢量,求以 $2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积.

7. 已知 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,求证:$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$.

(B)

1. 直线 L 通过点 $A(-2,1,3)$ 和 $B(0,-1,2)$,求点 $C(10,5,10)$ 到直线 L 的距离.

2. 试在点 $P(0,1,1)$ 和 $Q(-1,1,2)$ 的连线上确定点 R,使点 $A(1,0,1)$ 与 R 的连线垂直于 PQ.

3. 设点 A, B, C 的向径分别为 $\boldsymbol{r}_1=2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{r}_2=3\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{r}_3=4\boldsymbol{i}+10\boldsymbol{j}+9\boldsymbol{k}$. 试证:$A$, B, C 三点在一条直线上.

4. 试用向量证明不等式

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\ \sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\geqslant|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|$$

其中 a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 为任意实数,并指出等号成立的条件.

5. 证明:三角形三条高相交于一点.

习　题　7.4

(A)

1. 求满足下列条件的平面方程:

(1) 过点 $M(1,-2,3)$ 且与向量 $\overrightarrow{OM}$ 垂直;

(2) 过点 $(3,0,-1)$ 且与平面 $3x-7y+5z-12=0$ 平行;

(3) 过原点 O,且同时垂直于平面 Π_1: $x+2y+3z-2=0$ 及平面 Π_2: $6x-y+5z+2=0$;

(4) 过 $(1,1,2)$, $(3,2,3)$, $(2,0,3)$ 三点;

(5) 过点 $(-3,1,-2)$ 且通过 z 轴;

(6) 平行于 x 轴且经过 $(4,0,-2)$ 和 $(5,1,7)$ 两点;

(7) 过点 $(1,1,1)$ 和点 $(0,1,-1)$ 且与平面 $x+y+z=0$ 相互垂直.

2. 写出下列各平面的特殊位置:

(1) $2y-3=0$;　　(2) $2x-3y+1=0$;

(3) $\sqrt{2}x+y=0$;　　(4) $y+z=3$;

(5) $2x-z=0$；　　(6) $x-4y+2z=0$.

3. 求平面 $2x-2y+z+5=0$ 与各坐标平面的夹角.

4. 求过 z 轴且与平面 $\sqrt{5}x+2y+z-18=0$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$ 的平面方程.

5. 求过点 $P(2,-1,3)$ 且与各坐标轴截距相等的平面方程.

6. 求下列平面的方程：

(1) 平分两平面 $x-2y+2z+21=0$ 与 $7x+24z-5=0$ 的平面方程；

(2) 平行于平面 $x+y+z=100$ 且与球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 相切的平面方程.

7. 求下列直线方程：

(1) 过点 $(0,1,2)$ 且与平面 $x+y-3z+1=0$ 垂直；

(2) 过点 $(0,2,4)$ 且与直线 $\begin{cases}y=1,\\x+y+3z=0\end{cases}$ 平行；

(3) 过 $(1,2,-3)$ 和 $(2,1,4)$ 两点；

(4) 过点 $(0,2,4)$ 与两平面 $x+2z=1$ 和 $y-3z=2$ 平行.

8. 将直线的一般方程 L：$\begin{cases}x-4y+z-1=0,\\x+y-z+1=0\end{cases}$ 化为对称式方程和参数方程.

9. 判别下列直线 L_1 和 L_2 的相互关系，若相交求夹角的余弦.

(1) L_1：$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z}{4}$ 与 L_2：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-2}{2}$；

(2) L_1：$\begin{cases}x+2y-z=7,\\-2x+y+z=7\end{cases}$ 与 L_2：$\begin{cases}3x+6y-3z=8,\\2x-y-z=0.\end{cases}$

10. 求下列投影点的坐标：

(1) 点 $(-1,2,0)$ 在平面 $x+2y-z+1=0$ 上的投影点；

(2) 点 $(2,3,1)$ 在直线 $\dfrac{x+7}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+2}{3}$ 上的投影点.

11. 求直线 $\begin{cases}x+y+3z=0,\\x-y-z=0\end{cases}$ 与平面 $x-y-z+1=0$ 的夹角.

12. 试确定下列各组中直线与平面间的关系：

(1) $\dfrac{x+3}{-2}=\dfrac{y+4}{-7}=\dfrac{z}{3}$ 和 $4x-2y-2z=3$；

(2) $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{7}$ 和 $3x-2y+7z=8$；

(3) $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-3}{-4}$ 和 $x+y+z=3$.

13. 求点 $A(1,2,3)$ 到直线 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-4}{-3}=\dfrac{z-3}{-2}$ 的距离.

(B)

1. 求直线 $\begin{cases} 2x-4y+z=0, \\ 3x-y-2z-9=0 \end{cases}$ 在平面 $4x-y+z=1$ 上的投影直线方程.

2. 求通过直线 L: $\begin{cases} x+5y+z=0, \\ x-z+4=0 \end{cases}$ 且与平面 Π: $x-4y-8z+12=0$ 成 45° 角的平面方程.

3. 求两平行平面 $Ax+By+Cz+D_1=0$ 与 $Ax+By+Cz+D_2=0$ 之间的距离.

4. 设直线 L 过点 $P_0(1, 1, 1)$，并且与直线 L_1: $x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$ 相交，与直线 L_2: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{4}$ 垂直，试求直线 L 的方程.

5. 证明直线 L_1: $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-9}{8}=\dfrac{z-3}{1}$ 与直线 L_2: $\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y-2}{7}=\dfrac{z}{3}$ 相交，并求它们交角的平分线方程.

习　题　7.5

(A)

1. 建立以点(1, 2, −2)为球心，且通过坐标原点的球面方程.
2. 方程 $x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z=0$ 表示什么曲面?
3. 写出下列曲线绕指定轴旋转而成的旋转曲面的方程:
(1) xOy 平面上的双曲线 $2x^2-3y^2=6$ 分别绕 x 轴及 y 轴旋转;
(2) yOz 平面上的抛物线 $z^2=4y$ 绕 y 轴旋转;
(3) xOz 平面上的直线 $x-2z+1=0$ 绕 z 轴旋转.
4. 指出下列方程在平面解析几何与空间解析几何中分别表示什么图形:
(1) $x+y=1$;　　(2) $x^2+y^2=4$;
(3) $x^2-y^2=3$;　　(4) $x^2+2=3y$.
5. 说明下列旋转曲面是怎样形成的:
(1) $\dfrac{x^2}{4}+y^2+z^2=1$;　　(2) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}=1$;
(3) $-x^2-y^2+z^2=1$;　　(4) $x+y^2+z^2=1$.
6. 说出下列方程表示曲面的名称:
(1) $\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{a}{2}\right)^2$;　　(2) $y^2-z=0$;

(3) $4x^2+y^2-z^2=4$;　　(4) $x^2-y^2-4z^2=4$;

(5) $-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$;　　(6) $\frac{z}{3}=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$;

(7) $z^2-x^2-y^2=0$;　　(8) $z=x^2-y^2$.

(B)

1. 试求与三个坐标平面相切,且过点(1, 2, −5)的球面方程.

2. 求直线 $\frac{x}{\alpha}=\frac{y-\beta}{0}=\frac{z}{1}$ 绕 z 轴旋转而成的曲面的方程,并按 α,β 的值讨论它是什么曲面.

3. 就 p,q 的各种情况说明二次曲面 $z=x^2+py^2+qz^2$ 的类型.

习　题　7.6

(A)

1. 画出下列曲线在第Ⅰ卦限内的图形:

(1) $\begin{cases}x=1,\\ y=3;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}z=\sqrt{9-x^2-y^2},\\ x-y=0;\end{cases}$　　(3) $\begin{cases}x^2+z^2=a^2,\\ y^2+z^2=a^2.\end{cases}$

2. 指出下列方程组在平面解析几何中与空间解析几何中分别表示什么图形.

(1) $\begin{cases}y=3x+2,\\ y=5x-3;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1,\\ y=1.\end{cases}$

3. 指出下列方程组所表示的曲线:

(1) $\begin{cases}x^2+4y^2+9z^2=36,\\ z=1;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x^2-4y^2+z^2=25,\\ x=-3;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x^2-4y^2=4z,\\ y=-2;\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=20,\\ z-2=0.\end{cases}$

4. 将曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9,\\ y=x\end{cases}$ 化为参数方程.

5. 将曲线 $\begin{cases}(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4,\\ z=0\end{cases}$ 化为参数方程.

6. 求曲线 $\begin{cases}x^2+y^2-z=0,\\ x-z+1=0\end{cases}$ 在 xOy 平面上的投影.

7. 求曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2,\\ x^2+y^2=z^2\end{cases}$ 在 xOy 平面上的投影曲线方程及投影区域.

8. 求曲面 $(x+1)^2+(y+1)^2+z^2=25$ 与曲线

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=16,\\ z=3\end{cases}$$

的交点.

9. 证明：曲线 $x=3\sin t$, $y=4\sin t$, $z=\cos t$ 在平面 $5x^2-3y^2-3z^2+3=0$ 上.

(B)

1. 求准线为 $\begin{cases}x^2+y^2+4z^2=1,\\ x^2=y^2+z^2,\end{cases}$ 母线平行于 z 轴的柱面方程.

2. 假定直线 L 在 yOz 平面上的投影方程为 $\begin{cases}2y-3z=1,\\ x=0,\end{cases}$ 而在 zOx 平面上的投影方程为 $\begin{cases}x+z=2,\\ y=0.\end{cases}$ 求直线 L 在 xOy 平面上的投影方程.

3. 求螺旋线 $\begin{cases}x=a\cos\theta,\\ y=a\sin\theta,\\ z=b\theta\end{cases}$ 在三个坐标面上的投影曲线的直角坐标方程.

4. 求上半球 $0\leqslant z\leqslant\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 与圆柱体 $x^2+y^2\leqslant ax$ $(a>0)$ 的公共部分在 xOy 平面和 xOz 平面上的投影.

5. 求下列曲面所围成的立体在三个坐标平面上的投影区域：

(1) $z=x^2+y^2$ 与 $z=2-x^2-y^2$;

(2) $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2=1$ 与 $z=0$.

6. 画出下列各曲面所围成的立体的图形：

(1) $z=0$, $z=3$, $x-y=0$, $x-\sqrt{3}y=0$, $x^2+y^2=1$，在第Ⅰ卦限内；

(2) $x=0$, $y=0$, $x=2$, $y=1$, $3x+4y+2z=12$.

总 习 题 7

1. 说明下列各结果是否正确：

(1) $|\boldsymbol{a}|\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$;

(2) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})$;

(3) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$;

(4) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$;

(5) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$,则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$.

2. 设 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 是满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ 的单位向量,计算 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$ 的值.

3. 已知 $A(2,-1,3)$, $B(1,1,1)$, $C(0,0,5)$,求$\angle ABC$.

4. 求证：向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{c}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})-\boldsymbol{b}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})$ 相互垂直.

5. 求证：由圆的圆心向圆内接正三角形的三个顶点所引三向量之和为零

向量.

6. 求与向量 $\boldsymbol{a}=\{2,-1,2\}$ 共线且满足方程 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=-18$ 的向量 $\boldsymbol{x}$.

7. 已知向量与各坐标轴成相等的锐角,且向量的模为 $2\sqrt{3}$,求该向量的坐标.

8. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦分别满足:(1) $\cos\alpha=0$;(2) $\cos\beta=1$;(3) $\cos\alpha=\cos\beta=0$. 问这些向量与坐标轴或坐标平面的关系如何?

9. 设 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$,且 $\boldsymbol{a}=\{-2,1,3\}$,$\boldsymbol{b}=\{x,-2,0\}$,求 x.

10. 设 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}$,$|\boldsymbol{b}|=1$,$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\pi/6$,计算:

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 之间的夹角;

(2) 以 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积.

11. 设 $\boldsymbol{a}=\{2,-1,-2\}$,$\boldsymbol{b}=\{1,1,x\}$,问 x 为何值时 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 最小,并求出此最小值.

12. 求过直线 L_1:$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-3}{-1}$ 且平行于直线 L_2:$\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$ 的平面方程.

13. 求通过点 $A(3,0,0)$,$B(0,0,1)$ 且与 xOy 面成 $\pi/3$ 角的平面方程.

14. 求与两直线 $\begin{cases}x=1,\\ y=-1+t,\\ z=2+t\end{cases}$ 及 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ 都平行且过原点的平面方程.

15. 求过直线 L:$\begin{cases}2x-y-2z+1=0,\\ x+y+4z-2=0\end{cases}$ 且在 y 轴和 z 轴有相同的非零截距的平面的方程.

16. 设有直线 L_1:$\begin{cases}x-y=6,\\ 2y+z=3\end{cases}$ 及 L_2:$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z+8}{1}$,求 L_1 与 L_2 的夹角.

17. 求过点 $(-1,0,4)$ 且平行于平面 $3x-4y+z=10$,又与直线 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{2}$ 相交的直线方程.

18. 求与两直线 L_1:$\begin{cases}x=3z-1,\\ y=z-3\end{cases}$ 和 L_2:$\begin{cases}y=2x-5,\\ z=7x+2\end{cases}$ 垂直相交的直线方程.

19. 设直线通过点 $P(-3,5,-9)$ 且和两直线 L_1:$\begin{cases}y=3x+5,\\ z=2x-3,\end{cases}$ L_2:

$\begin{cases} y = 4x - 7, \\ z = 5x - 39 \end{cases}$ 相交，求此直线方程.

20. 求点 $P(3, -1, 2)$ 到直线 $\begin{cases} x + y - z + 1 = 0, \\ 2x - y + z - 4 = 0 \end{cases}$ 的距离.

21. 设一平面垂直于平面 $z = 0$，并通过从点 $(1, -1, 1)$ 到直线 $\begin{cases} y - z + 1 = 0, \\ x = 0 \end{cases}$ 的垂线，求此平面的方程.

22. 求曲线 $\begin{cases} z = 2 - x^2 - y^2, \\ z = (x-1)^2 + (y-1)^2 \end{cases}$ 在三个坐标平面上的投影曲线的方程.

23. 求锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与柱面 $z^2 = 2x$ 所围成的立体在三个坐标平面上的投影.

习 题 解 答

习　题　7.1

(A)

1. 解　A, B, C, D, E, F 分别在第 IV 卦限，yOz 平面上，第 III 卦限，x 轴上，y 轴上，第 II 卦限.

2. 解　(1) (a, b, c) 关于原点对称的点坐标为 $(-a, -b, -c)$；

(2) (a, b, c) 关于 xOy 平面，yOz 平面，zOx 平面对称的点的坐标分别为 $(a, b, -c)$，$(-a, b, c)$，$(a, -b, c)$；

(3) (a, b, c) 关于 x 轴，y 轴，z 轴对称的点的坐标分别为 $(a, -b, -c)$，$(-a, b, -c)$，$(-a, -b, c)$.

3. 解　自点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 分别作 xOy 平面，yOz 平面，zOx 平面的垂线，垂足的坐标分别为 $(x_0, y_0, 0)$，$(0, y_0, z_0)$，$(x_0, 0, z_0)$.

自点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 分别作 x 轴，y 轴，z 轴的垂线，垂足分别为 $(x_0, 0, 0)$，$(0, y_0, 0)$，$(0, 0, z_0)$.

4. 解　到 xOy 平面，yOz 平面，xOz 平面的距离分别为 5，4，3. 到 x 轴，y 轴，z 轴的距离分别为 $\sqrt{34}$，$\sqrt{41}$，5.

5. 解　设点 P 的坐标为 $(x, 0, 0)$. 由题意，有

$$|PP_0| = \sqrt{(4-x)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{30}$$

解得 $x=9$ 或 $x=-1$. 所以点 P 的坐标为(9, 0, 0)或(−1, 0, 0).

(B)

1. 解 过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$且平行于 z 轴的直线上的点的坐标设为(x, y, z)，则 $x=x_0$, $y=y_0$. 过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$且平行于 xOy 平面的平面上的点的坐标设为(x, y, z)，则 $z=z_0$.

2. 解 设所求点的坐标为(x, y, z)，则

$$\frac{x+1}{2}=-1, \qquad \frac{y-3}{2}=2, \qquad \frac{z-2}{2}=-1$$

解得 $x=-3$, $y=7$, $z=0$. 所以所求点的坐标为(−3, 7, 0).

3. 解 设所求点的坐标为 $P(0, y, z)$，则 $|PA|=|PB|=|PC|$. 所以

$$\begin{aligned}3^2+(y-1)^2+(z-2)^2 &= 4^2+(y+2)^2+(z+2)^2 \\ &= (y-5)^2+(z-1)^2\end{aligned}$$

解之得 $y=1$, $z=-2$. 所以所求点的坐标为(0, 1, −2).

4. 解 立方体的 8 个顶点的坐标分别为

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, 0\right), \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, 0\right), \quad \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}a, 0\right), \quad \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0\right),$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, a\right), \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, a\right), \quad \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}a, a\right), \quad \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}a, a\right)$$

5. 解

$$|AB|^2=(10-4)^2+(-1-1)^2+(6-9)^2=49$$

$$|BC|^2=(10-2)^2+(-1-4)^2+(6-3)^2=98$$

$$|AC|^2=(2-4)^2+(4-1)^2+(3-9)^2=49$$

因为 $|AB|^2+|AC|^2=|BC|^2$，且 $|AB|=|AC|$，所以$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

习 题 7.2

(A)

1. 解

$$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$

2. 解

$$\begin{aligned}2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v} &= 2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c})-3(-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}) \\ &= 2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}-9\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}+3\boldsymbol{c} \\ &= 5\boldsymbol{a}-11\boldsymbol{b}+7\boldsymbol{c}\end{aligned}$$