CHUZHONG SHUXUE JINGSAI JIETI SIXIANG YU CELUE

初中数学竞赛解题
思想与策略

◎ 过伯祥 编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

初中数学竞赛
解题思想与策略

过伯祥　编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

初中数学竞赛解题思想与策略/过伯祥编著. —杭州：浙江大学出版社，2011.3(2011.11 重印)

ISBN 978-7-308-08405-5

Ⅰ.①初… Ⅱ.①过… Ⅲ.①数学课—初中—解题 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 017637 号

初中数学竞赛解题思想与策略

过伯祥　编著

责任编辑　杨晓鸣
文字编辑　吴　慧
封面设计　刘依群
出版发行　浙江大学出版社
(杭州市天目山路 148 号　邮政编码 310007)
(网址：http://www.zjupress.com)
排　　版　杭州大漠照排印刷有限公司
印　　刷　杭州浙大同力教育彩印有限公司
开　　本　787mm×960mm　1/16
印　　张　13.5
字　　数　272 千
版 印 次　2011 年 3 月第 1 版　2011 年 11 月第 3 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-08405-5
定　　价　24.00 元

浙江大学出版社发行部邮购电话 (0571) 88925591

自序

中学数学竞赛活动最早发端于东欧的匈牙利与罗马尼亚. 自 1894 年匈牙利、1902 年(一说 1889 年)罗马尼亚的物理—数学协会作出举办数学竞赛活动的决议起, 他们每年都举行这种竞赛,仅仅由于两次世界大战的影响间断过 7 年.

历届竞赛的优胜者包括我国著名科学家钱学森、钱伟长的导师冯·卡门,及在富里叶级数方面做出了出色工作的利·费叶尔,后来提出了哈尔测度的阿·哈尔等等,可以列出一份长长的名单. 在早期数学竞赛的优胜者中,已经涌现了许多世界一流的数学家.

以后的三十多年中没有其他国家举办过类似活动. 直到匈牙利数学竞赛造就的数学大师纷纷登台的时候,欧洲和其他国家才发生强烈的兴趣,争相效仿. 1934 年苏联首办了中学数学奥林匹克,第一次把学生的竞赛活动与古希腊的奥林匹克体育运动联系起来.

1959 年,在罗马尼亚的倡议下,首届国际数学奥林匹克(IMO)在布加勒斯特举行. 以后每年由各国轮流主办. 其规模不断扩大,参与的国家不断增多. 还出现了许多地区性的数学竞赛活动. 1990 年我国首次主办了第 31 届国际数学奥林匹克. IMO 及各国数学竞赛活动的发展趋势与历史业绩,充分证明了这是一项颇有生命力的科学文化教育活动.

数学竞赛之所以受到各国如此的重视,这是因为数学竞赛是普及数学教育、发现人才和培养人才的一种特殊而有效的方式;又是体现"让不同的人学不同的数学"的一条合理的途径;更是在给大量的中小学生减轻学业负担的同时,不致使有理科天赋的优秀青少年只能在低水平的题海战术的反复操练中浪费宝贵的青春岁月. 全世界的过往历史一次次地告诉我们,(作为公认的理工科基础的)数学,历来是产生少年天

才人物的领地．天赋英才是决不能错失青少年这一良好的发展时期的．

奥数热是在家长的望子成龙、望女成凤的热潮下，因市场因素的介入摧生的异常．仔细想想也不必大惊小怪．世上的哪一事物（事业）不是曲曲折折地发展的？就是正兴旺发达的奥林匹克体育运动不是也暴出了兴奋剂与“献金门”一类的丑闻么？我们只要冷静地正确应对，不因噎废食就好．事在人为，事物自有其客观的发展规律！

眼前的这一本书，不是流行的分年级的奥数训练书，可以说它是这么多年来，初中奥数的优秀资料，与思想方法、解题策略方面的集成之作．也是更多的着眼于打好青少年的数理基础的，兼顾教学与竞赛的一本数学书．对于初中奥数的教练员，对于优秀的想学好数学的初中生，既是分方法、按策略归类的现实的学习材料；也是一般初中数学教师提高自身业务素质的良好教材．相信本书能成为广大数学教师与数学爱好者的一份可资保留的心爱资料！

引　言

在现代数学教育与数学学习指导上，有两种绝然不同的认识与做法：一种是单纯的依靠题海战术，别的很少去顾及，或者说，根本上不相信任何别的东西．这显然是应试教学的后遗症，因为目前的应试总是只考题解．题解训练是熟悉一个个典型例、习题的具体的解法，这是教学上所必需的！但是，它不应该成为数学教学的全部内容．

另一种是结合关于思想方法的归纳总结与渗透的学习．所谓结合，是要有一定量的各种类型的题解训练为基础的．而思想方法则是在你解题（特别是解较难又过程较长的题）遇到困难时，会给你提示一些关于思路要点与解题方向的想法．否则，一旦遭遇新题，你就只能望题兴叹、手足无措了．这是我们在中差生解题时经常可以见到的现象，而且，思想方法在人的素质发展与培育成长过程中的意义也是十分巨大的．

一般说，人的认识是一个过程．对一个题的思想方法的认识，就每个人来说，当然也是有一个过程的．对一个题思想方法的认识，各个人之间，同一人在不同阶段可能不尽一致，这都无关大局，重要的是经常要有方法的归纳．

目录 CONTENTS

第一章　初中数学解题方法

什么是方法？

黑格尔说："方法就是对于自己内容的内部自己运动的形式的觉识."

方法就是对形式的认识. 对形式的认识是步步深入的，因而方法也是不断发展的. 新方法就是在对新问题形式的认识，对老问题形式的新认识的基础上发展起来的. 简而言之，新方法就是对某种形式的新认识；对内容的内部自己运动的形式的新认识.

对形式的认识又是因人而异的. 同一个解题方法，不同的人会有不同的认识，是因为他们看这个解答时，认识切入的角度不同，或是看解答的侧重点不同. 这种认识过程中的差异是正常的，无关紧要的，在历史的长河中自会求得一定的解决的. 但是，关于思想方法的归纳，有要比没有好得多.

比之思想方法、解题策略等，解题方法是较低层次的比较具体的方法. 而本章中所涉及的数学解题方法，则均是初中数学课程中、课堂上会学到的方法. 只是这里所选择的一些例、习题，大多是奥数题，其难度已略高了些而已.

1.1　有利变形法

有利变形法俗称恒等变形法. 在代数式的变形过程中，往往要求形变值不变，而变化后新得到的形式，恰是有利于结论的推导的. 此法包括因式分解法，配方法，降幂法等.

例 1.1.1　解方程$(1997-x)^2+(x-1996)^2=1$

分析一　如果按常规的解法去括号、化简整理，因为数字大，过程就烦多了.

教师启发："请大家注意，本例中的几个数据：$(1997-x)$，$(x-1996)$，1 之间，有些什么样的关系？""据此，可以怎样来解方程呢？"

教师引导学生，要注意数值间的关系，以此来发现创新思路.

教师又提示："用$[(1997-x)+(x-1996)]$代替 1 时，小括号中的项始终要看作为一个整体的，不能把它拆散了."

原方程可化为$(1997-x)^2+(x-1996)^2=[(1997-x)+(x-1996)]^2-2(1997-x)(x-1996)=1$

化简整理得$2(1997-x)(x-1996)=0$. 于是就解得$x_1=1997$，$x_2=1996$.

分析二　注意到数值间的关系，解法就多了．还有别的灵活算法么？思路一打开，学生们就活跃起来了．

学生 A：把 1 移到左边，我利用平方差公式

$$\begin{aligned}(1997-x)^2+(x-1996)^2-1&=(x-1996)^2+[(1997-x)+1][(1997-x)-1]\\&=(x-1996)^2+(1998-x)(1996-x)\\&=(x-1996)[(x-1996)-(1998-x)]=0.\end{aligned}$$

显然，得到的解是一样的．

学生 B：我利用和的平方公式

$$(1997-x)^2=[(1996-x)+1]^2=(1996-x)^2+2(1996-x)+1$$

然后，代入运算可化得 $2(1996-x)^2+2(1996-x)=0$．

也可得到同样的解．

教师：很好！当然，还可以变化 $(x-1996)^2-1$．同学们课后还可自己去琢磨．

例 1.1.2　在满足 $x+2y\leqslant 3, x\geqslant 0, y\geqslant 0$ 的条件下，$2x+y$ 能达到的最大值是________．

分析与解　只要想到有利变形 $2x+y=2(x+2y)+(-3y)$，余下的也就好办了：当 $y=0, x=3$ 时，原式有最大值 6．

例 1.1.3　如果 $2a+b=0$，则 $\left|\dfrac{a}{|b|}-1\right|+\left|\dfrac{|a|}{b}-2\right|$ 等于________．

分析与解　因 $a=-\dfrac{b}{2}, b=-2a$，对原式作如下的有利变形：原式 $=\left|\dfrac{b}{2|b|}+1\right|+\left|\dfrac{|a|}{2a}+2\right|$．因为 $\dfrac{|a|}{a}$ 有两个值：1 或 -1，且本例由条件可得，a 与 b 必定异号．于是，两种情况下，均得所求的值为 3．

例 1.1.4　证明：没有一个自然数 n，能使 $n^6+3n^5-5n^4-15n^3+4n^2+12n+3$ 的值是某个自然数的平方．

分析　用怎样的形式来说明结论最好呢？猛然发现式子中各项系数间的关系：$1:3=(-5):(-15)=4:12$，这不会是偶然的，先尝试分解因式吧！

证明　$n^6+3n^5-5n^4-15n^3+4n^2+12n+3=n^5(n+3)-5n^3(n+3)+4n(n+3)+3=n(n+3)(n^4-5n^2+4)+3=(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)+3=N$

即 N 为 6 个连续自然数的积加上 3．

$$3\mid N,\ 9\mid(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)$$

即 3 能整除 N，但 9 不能整除 N，

所以，N 不是完全平方数.

例 1.1.5　证明：任一偶数是表达式 $2x^2+11xy+12y^2+4x+5y+6$ 的值，其中变量 x 和 y 取任意整数值.

分析　令 $2x^2+11xy+12y^2+4x+5y+6=2m$，$m$ 为任意整数. 需要找到用 m 表示 x 和 y 两个整式，使能满足上式. 这就需要改变式子的形式. ——认清这样的思路，是本题的关键！

本例也是对部分式子进行分解因式.

证明　令 $2x^2+11xy+12y^2+4x+5y+6=2m$，$m$ 为任意整数.

化为 $(2x+3y)(x+4y)+4x+5y+6=2m$.

令 $2x+3y=0$，得 $4x+5y+6=2m$.

联合解之得 $x=3m-9$，$y=6-2m$.

这就表明当 x 和 y 分别取整数值 $3m-9$ 与 $6-2m$ 时，原表达式即得任一偶数值 $2m$.

评注与说明：也可将原式化为 $(2x+3y)(x+4y+2)-y+6=2m$ 等，解题的思路相同.

例 1.1.6　已知三点 $A(0,-1)$，$B(1,3)$，$C(2,6)$. 直线 $y=ax+b$ 上横坐标为 0、1、2 的点分别为 D、E、F，求 a、b 的值，使得 $AD^2+BE^2+CF^2$ 达到最小值.

分析　思路是明朗的：先用 a、b 表出 $AD^2+BE^2+CF^2$. 然后，把这式子进行变形，找到一个易于求出其最小值的形式.

本例用到的是二次配方法.

解　显然有 $D(0,b)$，$E(1,a+b)$，$F(2,2a+b)$，则

$$\begin{aligned}AD^2+BE^2+CF^2&=(b+1)^2+(a+b-3)^2+(2a+b-6)^2\\&=5a^2+6ab+3b^2-30a-16b+46\\&=5\left(a+\frac{3}{5}b-3\right)^2+\frac{6}{5}b^2+2b+1\\&=5\left(a+\frac{3}{5}b-3\right)^2+\frac{6}{5}\left(b+\frac{5}{6}\right)^2+\frac{1}{6}\end{aligned}$$

$\because a+\frac{3}{5}b-3=0$，$b+\frac{5}{6}=0$，

当 $b=-\frac{5}{6}$，$a=\frac{7}{2}$ 时，$AD^2+BE^2+CF^2$ 取得最小值.

例 1.1.7 已知 $a+b=1, a\cdot b=-1$，求 a^7+b^7 的值.

分析 $a^7+b^7=(a^3+b^3)(a^4+b^4)-(a\cdot b)^3(a+b)$

而
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2+b^2)-(a\cdot b)(a+b),$$
$$a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2(a\cdot b)^2,$$
$$a^2+b^2=(a+b)^2-2(a\cdot b).$$

于是 a^7+b^7 可求了.

解 如上可得
$$a^2+b^2=(a+b)^2-2(a\cdot b)=3,$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2+b^2)-(a\cdot b)(a+b)=4,$$
$$a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2(a\cdot b)^2=7,$$

$\therefore a^7+b^7=(a^3+b^3)(a^4+b^4)-(a\cdot b)^3(a+b)=29.$

例 1.1.8 求方程 $x^3-x^2-x-\dfrac{1}{3}=0$ 的实数解.

分析 先去分母，化为 $3x^3-3x^2-3x-1=0$，即 $3x^3=3x^2+3x+1$.
这时，有的同学可能会眼前灵机一现：两边同加 x^3，此题即可得解了.

解 原方程化为 $3x^3=3x^2+3x+1$，两边同加 x^3 得 $4x^3=(x+1)^3$，
两边开立方得 $\sqrt[3]{4}x=x+1$，

解得 $x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}-1}$.

例 1.1.9 设 $x_1,x_2,\cdots,x_{2006}$ 都是 $+1$ 或 -1，证明：$x_1+2x_2+3x_3+\cdots+2006x_{2006}\neq 0$.

证明 $x_1+2x_2+3x_3+\cdots+2006x_{2006}=(x_1+|x_1|)+2(x_2+|x_2|)+\cdots+2006(x_{2006}+|x_{2006}|)-(|x_1|+2|x_2|+3|x_3|+\cdots+2006|x_{2006}|)$［巧变!!!］

$=(x_1+|x_1|)+2(x_2+|x_2|)+\cdots+2006(x_{2006}+|x_{2006}|)-(1+2+\cdots+2006)$

$=(x_1+|x_1|)+2(x_2+|x_2|)+\cdots+2006(x_{2006}+|x_{2006}|)-2007\times 1003$

$=(x_1+|x_1|)+2(x_2+|x_2|)+\cdots+2006(x_{2006}+|x_{2006}|)-$ 奇数

$\because (x_1+|x_1|),(x_2+|x_2|),\cdots,(x_{2006}+|x_{2006}|)$ 总是 0 或者 2，即它们都是一个偶数，

$\therefore$ 上式为偶数 $-$ 奇数，它们的差必为奇数，即不为 0.

引申与思考：一般地，请研究 $x_1+2x_2+3x_3+\cdots+kx_k$ 的值的情况，其中 $x_i=+1$ 或 -1.

练习题

1.1　若分数$\frac{(\quad)-10}{4\times(\quad)+33}$中，括号(　　)内是一个三位自然数，为了使该分数成为一个可约分数，(　　)内最小、最大的三位数是________.

1.2　使$A=\frac{x^2-2x-3}{x^2-x+1}$为整数的一切整数$x$为________.

1.3　怎样的整数可以满足不等式$a^2+b^2+c^2+3<ab+3b+2c$？

1.4　证明：n为任何整数，形如$n^2+9n+12$的数，不能被121整除.

1.5　已知$y=100+10nx-10x-100\sqrt{x}$，其中$n$为正整数.要使$0<y\leqslant 300$对于满足$0<x\leqslant 16$的所有$x$都成立，求$n$的值.

1.2 换元法

换元法通常是解方程时，通过代换，使新方程变得简单可解的一种手段. 其他数学问题，也有通过代换使问题变得简单可解的情形. 又可分为两种情况：第一种换元是用一个字母代换某一个式子；第二种换元则反之，用某个式子去代换一个字母.

例 1.2.1 设 x、y 满足 $(x+3y)+|3x-y|=19$，$2x+y=6$，求 x、y.

分析与解 令 $x+3y=s$，$3x-y=t$，则有 $s+|t|=19$，$s+t=6\times 2$.

以下分 $t\geqslant 0$；$t<0$ 进行讨论，便易解了，可得：$x=0.5$，$y=5$.

例 1.2.2 已知：$3a+b+2c=3$ 且 $a+3b+2c=1$. 求 $2a+c$ 之值.

分析与解 令 $2a+c=x$，$a+b+c=y$，即化为二元一次方程组：$x+y=3$，$3y-x=1$. 以下便易解得 $x=2$，$y=1$. 于是 $2a+c=2$.

例 1.2.3 解方程组

$$\begin{cases} x(x+1)(3x+5y)=144 & ① \\ x^2+4x+5y=24 & ② \end{cases}$$

解 令 $x(x+1)=a$，$3x+5y=b$.

① 化为 $a\cdot b=144$，② 化为 $a+b=24$.

解得 $a=12$，$b=12$. 从而 $x=-4$，$y=4.8$；或 $x=3$，$y=0.6$.

例 1.2.4 设 $x^2-y^2-z^2=0$，试将 $x^3-y^3-z^3$ 分解为一次因式的积.

分析 可通过第二种换元来利用条件 $x^2-y^2-z^2=0$.

解 令 $y=ax$，$z=bx$，由条件知 $a^2+b^2=1$.

于是
$$\begin{aligned} x^3-y^3-z^3 &= x^3(1-a^3-b^3) \\ &= x^3(a^2+b^2-a^3-b^3) \\ &= x^3[a^2(1-a)+b^2(1-b)] \\ &= x^3[(1-b^2)(1-a)+(1-a^2)(1-b)] \\ &= x^3(1-a)(1-b)(2+a+b) \\ &= (x-ax)(x-bx)(2x+ax+bx) \\ &= (x-y)(x-z)(2x+y+z). \end{aligned}$$

评注与说明： 本例也可用消去 z^2 求解，因为 $z^2=x^2-y^2$，于是，$z^3=z(x^2-y^2)$，代入后，即可提公因式了.

例 1.2.5 设 x、y 都是正整数，且使 $\sqrt{x-116}+\sqrt{x+100}=y$，求 y 的最大值.

分析　要去掉根号，一是用两边平方法；二是进行换元.

解　令 $\sqrt{x-116}=u$，$\sqrt{x+100}=t$，它们均为整数.

则
$$y=\frac{(x+100)-(x-116)}{\sqrt{x+100}-\sqrt{x-116}}=\frac{216}{t-u}$$

$t>u$，$t-u$ 为整数，y 是整数为最大时，$t+u>0$ 为最小.

$$\begin{aligned}t^2-u^2&=100+116=216=107+109\\&=(54^2-53^2)+(55^2-54^2)\\&=55^2-53^2\end{aligned}$$

$\therefore$ $t=55$，$u=53$；$(t-u)_{\min}=2$，$y_{\max}=108$.

评注与说明：也可令 $t=x-8$ 进行换元. 这样处理后，两个根号内的式子分别变为 $t-108$ 与 $t+108$. 两边平方后，再化简就容易多了.

例 1.2.6　解方程组

$$\begin{cases}x+y+z+u=8 & ①\\ x^2+y^2+z^2+u^2=20 & ②\\ xz+xu+yz+yu=16 & ③\\ xyzu=9 & ④\end{cases}$$

分析　由方程关于字母的对称性，使我们想到可用换元法求解.

解　令 $x+y=t$，$z+u=w$.

由方程 ①、③ 得 $t+w=8$，$tw=16$，$\therefore$ $t=4$，$w=4$，

即
$$x+y=4,z+u=4. \qquad ⑤$$

又 $2(xy+zu)=(x+y)^2+(z+u)^2-(x^2+y^2+z^2+u^2)=12$

$$xy+zu=6. \qquad ⑥$$

由 ④、⑥ 得 $xy=3$，$zu=3$. ⑦

于是由 ⑤、⑦ 得解为：(1, 3, 1, 3)；(3, 1, 3, 1)；(1, 3, 3, 1)；(3, 1, 1, 3).

例 1.2.7　试求所有的正整数对 (a, b)，使得 $ab-a^2+b+1$ 能整除 $ab+1$.

分析　进行适当的变形与换元转化，是打开本例求解的关键.

解　$ab-a^2+b+1=(a+1)(b-a+1)$，而 $ab+1=b(a+1)-(b-1)$

由题给条件可得
$$(a+1)\mid(b-1). \qquad ①$$

于是,可令 $b-1=k(a+1)$(k 为非负整数),

即做代换 $b=ka+k+1$,题给的整除条件消去 b 化为

$$(a+1)[(k-1)a+k+2]\mid(a+1)(ka+1),$$

即
$$[(k-1)a+k+2]\mid(ka+1). \qquad ②$$

由式②知 $ka+1\geqslant[(k-1)a+k+2]$,即 $a\geqslant k+1$. ③

由于 $ka+1=[(k-1)a+k+2]+a-k-1$,式②又转化为只需证明

$$[(k-1)a+k+2]\mid(a-k-1). \qquad ④$$

下面,对 k 分三种情况进行讨论:

(1) 当 $k=0$ 时,式④化为:$(2-a)\mid(a-1)$,$(a-1)=(a-2)+1$,

$\therefore (2-a)\mid 1$ 或 -1. 于是,$a=1$ 或 3,$b=1$.

(2) 当 $k=1$ 时,式④化为:$3\mid(a-2)$,即 $a=3t+2$,$b=a+2=3t+4$(t 为任意非负整数).

(3) 当 $k\geqslant 2$ 时,由③式可得 $(k-1)a+k+2>a-k-1$,又由④式得

只有 $a-k-1=0$,$a=k+1$.

从而,$b=ka+k+1=k(k+1)+k+1=(k+1)^2$($k$ 为任意的大于或等于2的整数).

综上,所有的正整数解对 (a,b) 为:$(1,1)$;$(3,1)$;$(3m-1,3m+1)$(m 为任意的正整数);(n,n^2)(n 为大于或等于 3 的整数).

评注 本例解答步骤长,关键的是换元、消去 b、推理、对 k 讨论求值.

例 1.2.8 已知 k 是正整数,方程 $x^2+x+10=k(k-1)$ 有一个正整数根.求这个根及 k 的值.

解 设此方程的正整数根为 α,令 $k=\alpha+m+1$(这是第二换元法!),m 为整数.则有

$$\alpha^2+\alpha+10=(\alpha+m)(\alpha+m+1)$$

于是有 $\alpha=\dfrac{10-m^2-m}{2m}\geqslant 1$.

(1) 当 $m>0$ 时,化为 $m^2+3m-10\leqslant 0$,解得 $-5\leqslant m\leqslant 2$,m 为整数,仅当 $m=1$ 或 2 时,$\alpha=4$ 或 1,$k=6$ 或 4.

(2) 当 $m<0$ 时,$\because \alpha>0$,$\therefore 10-m^2-m<0$;

又 $k>0$,即 $\alpha+m+1>0$,化得 $10+m^2+m<0$.

此两式矛盾，此种情形无解.

所以，$\alpha = 4$ 或 1，$k = 6$ 或 4.

评注与说明： 亦可设方程的正整数根为 α，另一根为 β.

以下用韦达定理得 $\beta = -(\alpha + 1)$ 为负整数根.

再令 $k = \alpha + m$，m 为整数，以方便求解.

练习题

1.6　解方程 $2x - \dfrac{1}{x} - \dfrac{4x}{2x^2 - 1} = 3$.

1.7　解由如下三个方程组成的方程组：

$$\begin{cases} (x+2y)(x+2z) = -16, \\ (y+2x)(y+2z) = 8, \\ (z+2x)(z+2y) = -7. \end{cases}$$

1.8　解方程 $\sqrt{4x^2+4x+1} - \sqrt{x^2+x+3} = \sqrt{x^2+x-2}$.