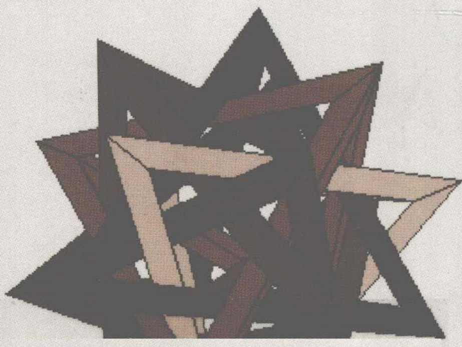
主编 陈德燕

专项大过关

高中数学
集合与函数



华东师范大学出版社

专项大过关

高中数学
集合与函数

主 编 陈德燕
参编 陈 健 苏 健

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

专项大过关. 高中数学. 集合与函数/陈德燕主编. —上海:华东师范大学出版社,2011
ISBN 978-7-5617-8395-5

Ⅰ.专…　Ⅱ.陈…　Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料
Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 011455 号

专项大过关
高中数学　集合与函数

主　　编　陈德燕
项目编辑　徐红瑾
组稿编辑　王元兴
审读编辑　徐惟简
装帧设计　黄惠敏

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话 021-62869887
地　　址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://ecnup.taobao.com/

印 刷 者　浙江杭州长命印刷有限公司
开　　本　720×965　16 开
印　　张　9.25
字　　数　182 千字
版　　次　2011 年 5 月第一版
印　　次　2011 年 5 月第一次
书　　号　ISBN 978-7-5617-8395-5/G·4936
定　　价　16.00 元

出 版 人　朱杰人

序

掌握科学的学习方法，学习效率就会大大提高。高效学习的关键在于针对学习中需要弥补和提高的内容进行专项突破。何谓专项？专项是指有内在联系的知识模块。能力欠缺的学生通常表现为在某一模块存在不足。当找到自己存在的问题后，就可以在这些方面进行强化。这时，一套精心编写的讲练结合的专项丛书一定会是你学习中的良师益友。

由华东师范大学出版社组织编写的《专项大过关》系列图书坚持“专项突破，轻松过关”的理念，涵盖初、高中语文、数学、英语、物理和化学5个学科。丛书依据课程标准，针对学习中的重点、难点、易错点、易混点，帮助学生扫清学习障碍，牢固掌握所学知识，提高解题技巧，提升学习能力，达到事半功倍的效果。

丛书特色主要体现在以下几方面：

1. 指向明确，紧跟学习需要

既可作为平时同步练习、复习使用，更能在中、高考冲刺阶段作为查漏补缺使用。

2. 作者权威，指导针对性强

作者均为长期耕耘在教学第一线的全国著名中学特、高级教师，他们有先进的教育理念和丰富的教学经验，对于中、高考有很深的研究。他们结合中、高考实际，精选近几年的中、高考真题进行讲解、分析、练习，有助于学生把握考试精神及发展趋势，为未来的复习应考指明方向。

3. 编排科学，不受教材版本限制

以教育部颁布的课程标准为编写依据，不受教材版本限制，按各学科知识内容编排，独立成册。不仅与教学要求相对应，更体现了知识的完整性、系统性和科学性，具有很强的通用性。

愿《专项大过关》成为你学习的好帮手，给你一个智慧的人生。

华东师范大学出版社教辅分社

contents 目录

专题 1

集合与集合的运算

【知识梳理】

集合的概念及基本理论是现代数学的重要基础，它已渗透到数学的各个分支，它的思想方法是我们继续学习的必要知识，也是学习、掌握和使用数学语言的基础.

主要内容包括：

1. 集合的基本概念

(1) 集合和元素的概念

某些指定的对象集在一起就成为一个集合，构成集合的各个对象叫做这个集合的元素.

集合是数学中不加定义的基本概念.

(2) 集合中元素的性质

确定性　任何一个对象或者是这个集合中的元素，或者不是它的元素，两者必居其一，而且只居其一.

互异性　对于给定集合中的任何两个元素都是不同的对象.

无序性　在给定集合中的元素相互交换次序所得的集合与原来的集合相同.

(3) 集合的分类

含有有限个元素的集合叫做有限集；

含有无限个元素的集合叫做无限集；

不含任何元素的集合叫做空集，记作$\varnothing$.

$\{0\}$、$\{\varnothing\}$均不是空集.

(4) 元素与集合的关系

如果 a 是集合 A 中的元素，就说 a 属于集合 A，记作 $a\in A$；否则记作 $a\notin A$.

2. 集合的表示法

(1) 列举法

将集合中的元素一一列举出来，写在大括号内表示集合的方法.

使用列举法要注意：元素间用分隔号“，”；对于含较多元素的集合，若其元素有明显规律，需把元素间规律显示清楚后才能用删节号.

(2) 描述法

把集合中元素的公共属性描述出来，写在大括号内，其模式为：$\{x \mid p(x)\}$.

(3) 图示法

用任意封闭曲线围成的图形表示集合.

图示法又称韦恩图法.

(4) 字母、符号表示法

为了书写方便，规定以下几种常用的数集及其记法：

空集，记作$\varnothing$；

自然数集(或全体非负整数的集合)，记作 $\mathbf{N}$；

正整数集，记作 $\mathbf{N}^*$(或 $\mathbf{N}_+$)；

全体整数的集合通常简称为整数集，记作 $\mathbf{Z}$；

全体有理数的集合通常简称为有理数集，记作 $\mathbf{Q}$；

全体实数的集合通常简称为实数集，记作 $\mathbf{R}$；

全体复数的集合通常简称为复数集，记作 $\mathbf{C}$.

3. 子集

(1) 对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，那么 A 称为 B 的子集，记作 $A \subseteq B$(或 $B \supseteq A$). 如果 A 是 B 的子集，且 B 中至少有一个元素不属于 A，那么 A 称为 B 的真子集，记作 $A \subsetneqq B$.

(2) 子集的性质

$A \subseteq A$; $\varnothing \subseteq A$; $\varnothing \subsetneqq A$ $(A \neq \varnothing)$;

若 $A \subseteq B$, $B \subseteq C$，则 $A \subseteq C$.

若 $A \subsetneqq B$, $B \subseteq C$，则集合 A 与 C 的关系怎样?

子集的个数：n 元集有 2^n 个子集；有 2^n-1 个真子集；有2^n-1 个非空子集；有 2^n-2 个非空真子集.

(3) $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$.

4. 交集

(1) 由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素组成的集合，叫做 A、B 的交集，记作 $A \cap B$，即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A, \text{且 } x \in B\}.$$

(2) 性质

$A \cap A = A$; $A \cap \varnothing = \varnothing$; $A \cap B \subseteq A$; $A \cap B = B \cap A$;

$A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$.

5. **并集**

(1) 由所有属于集合 A 或集合 B 的元素所组成的集合叫做 A 与 B 的并集，记作 $A \cup B$，即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{或} x \in B\}.$$

(2) 性质

$A \cup A = A$；$A \cup \varnothing = A$；$A \cup B \supseteq A$；$A \cup B = B \cup A$；

$A \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$.

6. **补集**

(1) 设全集为 U，集合 $A \subseteq U$，则由 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做集合 A 在集合 U 中的补集，记作 $\complement_U A$，即 $\complement_U A = \{x \mid x \in U, \text{且} x \notin A\}$.

(2) 性质

$A \cup \complement_U A = U$；$A \cap \complement_U A = \varnothing$；$\complement_U U = \varnothing$；$\complement_U \varnothing = U$；$\complement_U (\complement_U A) = A$.

有时在运算时，还可用德·摩根运算律：
$\complement_U (A \cup B) = (\complement_U A) \cap (\complement_U B)$；
$\complement_U (A \cap B) = (\complement_U A) \cup (\complement_U B)$.

【分类举例】

例 1 判断下列四个集合是否为相等集合. $A = \{x \mid y = x^2 + 1\}$；$B = \{y \mid y = x^2 + 1\}$；$C = \{(x, y) \mid y = x^2 + 1\}$；$D = \{y = x^2 + 1\}$.

解析 用描述法表示集合时，常把集合写成如下形式：$\{x \mid x \text{具有公共属性} P\}$. 其中 x 是“代表元”，这四个集合中前三个的代表元均不同. A 为二次函数自变量 x 的值的全体，即 $A = \mathbf{R}$；B 为二次函数值 y 的全体，即 $B = \{y \mid y \geqslant 1\}$；$C$ 为二次函数图象上所有点的全体组成的集合；而 D 为列举法表示，把二次函数 $y = x^2 + 1$ 作为该集合元素，为单元素集. 故这四个集合均为不同集合.

集合 $A = \{x \mid x > 1\}$ 与集合 $B = \{y \mid y > 1\}$ 是否为相同集合?

例 2 (2010·天津)设集合 $A = \{x \mid |x - a| < 1, x \in \mathbf{R}\}$，$B = \{x \mid |x - b| > 2, x \in \mathbf{R}\}$. 若 $A \subseteq B$，则实数 a、b 必满足(　　).

(A) $|a + b| \leqslant 3$　　(B) $|a + b| \geqslant 3$

(C) $|a - b| \leqslant 3$　　(D) $|a - b| \geqslant 3$

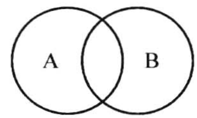
解析 由 $|x - a| < 1$ 得，$-1 < x - a < 1$，所以 $a - 1 < x < a + 1$，即 $A = (a - 1,$

$a+1)$. 由 $|x-2|>2$ 得，$x-b>2$ 或 $x-b<-2$，所以 $x>b+2$ 或 $x<b-2$，即 $B=(b+2, +\infty)\cup(-\infty, b-2)$，要使 $A\subseteq B$，需 $b+2\leqslant a-1$ 或 $b-2\geqslant a+1$.

所以 $a-b\geqslant 3$ 或 $a-b\leqslant -3$. 故 $|a-b|\geqslant 3$. 故选 D.

判断集合的关系及由子集关系确定参数的取值范围时.要注意以下两个问题:①空集;②端点.

例 3 （2009 · 江西）已知全集 $U=A\cup B$ 中有 m 个元素，$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$ 中有 n 个元素. 若 $A\cap B$ 非空，则 $A\cap B$ 的元素个数为（　　）.



(A) mn　　(B) $m+n$　　(C) $n-m$　　(D) $m-n$

解析　由韦恩图不难得到，$\text{card}(A\cap B)=\text{card}(A\cup B)-\text{card}[(\complement_U A)\cup(\complement_U B)]=m-n$. 故选 D.

例 4 （2010 · 四川）设 S 为复数集 $\mathbf{C}$ 的非空子集. 若对任意 $x, y\in S$，都有 $x+y, x-y, xy\in S$，则称 S 的封闭集. 下列命题：①集合 $S=\{x|x=|a+bi|, a, b$ 为整数，i 为虚数单位$\}$为封闭集；②若 S 为封闭集，则一定有 $0\in S$；③封闭集一定是无限集；④若 S 为封闭集，则满足 $S\subseteq T\subseteq \mathbf{C}$ 的任意集合 T 也是封闭集. 其中真命题是________.

解析　$S=\{x\mid x=\sqrt{a^2+b^2}\}$，即 S 为整数开平方所得的非负数集，对 $x-y\in S$ 不一定成立，故 ① 错；② 显然成立；如集合 $S=\{0\}$，满足 $x+y, x-y, xy\in S$ 这三个条件，但它为有限集，故 ③ 错误；对于 ④，令 $S=\{0\}$，$T=\{0, 1\}$，则 S 是封闭集，且 $S\subseteq T\subseteq \mathbf{C}$. 但 $0-1=-1\notin T$，故 ④ 错误. 故真命题为：②.

例 5 （2006 · 湖南）设函数 $f(x)=\dfrac{x-a}{x-1}$，集合 $M=\{x\mid f(x)<0\}$，$P=\{x\mid f'(x)>0\}$，若 $M\subsetneqq P$，则实数 a 的取值范围是（　　）.

(A) $(-\infty, 1)$　　(B) $(0, 1)$

(C) $(1, +\infty)$　　(D) $[1, +\infty)$

解析　设函数 $f(x)=\dfrac{x-a}{x-1}$，集合 $M=\{x\mid f(x)<0\}$，当 $a>1$ 时，$M=\{x\mid 1<x<a\}$；当 $a<1$ 时，$M=\{x\mid a<x<1\}$；当 $a=1$ 时，$M=\varnothing$；又因为 $f'(x)=\dfrac{(x-1)-(x-a)}{(x-1)^2}=\dfrac{a-1}{(x-1)^2}>0$，所以当 $a>1$ 时，$P=\{x\mid x\neq 1\}$；$a\leqslant 1$ 时，$P=\varnothing$. 因为 $M\subsetneqq P$，故选 C.

例 6　已知集合 $M=\{x\mid x^2+ax+1=0\}$，$N=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$，且 $M\cap N=M$，求 a 的取值范围.

解析　由 $M\cap N=M$ 知，$M\subseteq N$. 因为 N 为确定集合，所以应根据 $M\subseteq N$，对 M 的

可能的情况进行分类讨论，其中 $M=\varnothing$ 不能忽略.

由 $x^2-3x+2=0$，得 $x=1$ 或 $x=2$，所以 $N=\{1,\ 2\}$. 又由已知，得 $M\subseteq N$.

(1) 若 $M=\varnothing$，即 $x^2+ax+1=0$ 无实数解.

$\Delta<0$，此时 $a^2-4<0$，即 $-2<a<2$ 时，符合题意.

(2) 若 $M\neq\varnothing$，则 $M=\{1\}$ 或 $\{2\}$ 或 $\{1,\ 2\}$. 又 $x^2+ax+1=0$ 的两根之积为 1，故 $M=\{1\}$，所以 $x^2+ax+1=0$ 有两重根 1. 所以 $x_1+x_2=2=-a$，且满足 $\Delta\geqslant 0$. 综上所述：$-2\leqslant a<2$.

M 在 $x^2+ax+1=0$ 有解的情况下，两根积为定值 1，为解题提供一条捷径.

例 7　(2006・全国Ⅱ)设 $a\in\mathbf{R}$，二次函数 $f(x)=ax^2-2x-2a$. 若 $f(x)>0$ 的解集为 A，$B=\{x\mid 1<x<3\}$，$A\cap B\neq\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

解析　由 $f(x)$ 为二次函数知 $a\neq 0$. 由 $f(x)=ax^2-2x-2a=0$ 知：$\Delta=4+8a^2>0$. 则其两根为 $x_1=\dfrac{1}{a}-\sqrt{2+\dfrac{1}{a^2}}$，$x_2=\dfrac{1}{a}+\sqrt{2+\dfrac{1}{a^2}}$，且易知 $x_1<0$，$x_2>0$.

(1) 当 $a>0$ 时，$A=\{x\mid x<x_1\}\cup\{x\mid x>x_2\}$，$A\cap B\neq\varnothing$ 的充要条件是 $x_2<3$，即 $\dfrac{1}{a}+\sqrt{2+\dfrac{1}{a^2}}<3$，解得 $a>\dfrac{6}{7}$.

(2) 当 $a<0$ 时，$A=\{x\mid x_1<x<x_2\}$，$A\cap B\neq\varnothing$ 的充要条件是 $x_2>1$，即 $\dfrac{1}{a}+\sqrt{2+\dfrac{1}{a^2}}>1$，解得 $a<-2$.

综上，使 $A\cap B\neq\varnothing$ 成立的 a 的取值范围是 $(-\infty,\ -2)\cup\left(\dfrac{6}{7},\ +\infty\right)$.

基础训练

1. 已知集合 $A=\{(x,\ y)\mid y=x^2,\ x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{(x,\ y)\mid y=|x|,\ x\in\mathbf{R}\}$，则 $A\cap B$ 中的元素个数为(　　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

2. 设全集 $I=\{1,\ 2a-4,\ a^2-a-3\}$，$A=\{a-1,\ 1\}$，$\complement_I A=\{3\}$，则 a 的值为(　　).

(A) -2　　(B) 3　　(C) -2 或 3　　(D) $\dfrac{7}{2}$

3. 已知集合 $A=\{2,\ 3,\ 4\}$，$B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$，$C=\{(x,\ y)\mid x\in A,\ y\in B$，且 $\log_x y\in\mathbf{N}^*\}$，则 C 中元素个数是(　　).

(A) 9　　(B) 8　　(C) 3　　(D) 4

4. 设集合 $S=\{x\mid |x-2|>3\}$，$T=\{x\mid a<x<a+8\}$，$S\cup T=\mathbf{R}$，则 a 的取值范围是(　　).

(A) $-3<a<-1$　　(B) $-3\leqslant a\leqslant -1$

(C) $a\leqslant -3$ 或 $a\geqslant -1$　　(D) $a<-3$ 或 $a>-1$

5. 集合 $A=\{y\mid y=\lg x,\ x>1\}$，$B=\{-2,-1,1,2\}$，则下列结论中正确的是(　　).

(A) $A\cap B=\{-2,-1\}$　　(B) $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cup B=(-\infty,0)$

(C) $A\cup B=(0,+\infty)$　　(D) $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=\{-2,-1\}$

6. 已知函数 $f(x)=x^2+x-1$，集合 $M=\{x\mid x=f(x)\}$，$N=\{y\mid y=f(x)\}$，则(　　).

(A) $M=N$　　(B) $M\supsetneqq N$　　(C) $M\cap N=\varnothing$　　(D) $M\subsetneqq N$

7. 已知 $P=\{\vec{a}\mid \vec{a}=(1,0)+m(0,1),\ m\in\mathbf{R}\}$，$Q=\{\vec{b}\mid \vec{b}=(1,1)+n(-1,1),\ n\in\mathbf{R}\}$，是两个向量集合，则 $P\cap Q=$(　　).

(A) $\{(1,1)\}$　　(B) $\{(-1,1)\}$　　(C) $\{(1,0)\}$　　(D) $\{(0,1)\}$

8. 设集合 $M=\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{4},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$，$N=\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{k}{4}+\dfrac{1}{2},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$，则(　　).

(A) $M=N$　　(B) $M\subsetneqq N$　　(C) $M\subseteq N$　　(D) $M\cap N=\varnothing$

9. 定义集合运算：$A*B=\{z\mid z=xy,\ x\in A,\ y\in B\}$ 设 $A=\{1,2\}$，$B=\{0,2\}$，则集合 $A*B$ 的所有元素之和为(　　).

(A) 0　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 6

10. 已知集合 $A=\{1,2^a\}$，$B=\{a,b\}$，若 $A\cap B=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$，则 $A\cup B$ 为________.

11. 已知集合 $A=\{a,b,2\}$，$B=\{2,b^2,2a\}$，且 $A\cap B=A\cup B$，则 $a=$________.

12. 设 $P=\{x\mid 12+x-x^2\geqslant 0\}$，$Q=\{x\mid m-1\leqslant x\leqslant 3m-2\}$. 若 $Q\subseteq P$，求实数 m 的取值范围.

能力提高

13. 实数 a、b 满足 $a>b>0$，集合 $M=\left\{x\,\middle|\,b<x<\dfrac{a+b}{2}\right\}$，$N=\{x\mid \sqrt{ab}<x<a\}$，则集合 $\{x\mid b<x\leqslant\sqrt{ab}\}$ 可表示为(　　).

(A) $M\cup N$　　(B) $M\cap N$　　(C) $\complement_{\mathbf{R}}M\cap N$　　(D) $M\cap\complement_{\mathbf{R}}N$

14. 已知 $S=\{1,2,\cdots,2010\}$，$A\subseteq S$ 且 A 中有三个元素，若 A 中的元素可构成等差数列，则这样的集合 A 共有(　　).

(A) C_{2010}^3 个　　(B) A_{2010}^3 个　　(C) $2\mathrm{A}_{1005}^2$ 个　　(D) $2\mathrm{C}_{1005}^2$ 个

15. 对任意两个集合 M、N,定义 $M-N=\{x \mid x\in M$ 且 $x\notin N\}$, $M*N=(M-N)\cup(N-M)$,设 $M=\{y \mid y=x^2,\ x\in\mathbf{R}\}$, $N=\{y \mid y=3\sin x,\ x\in\mathbf{R}\}$ 则 $M*N=$ (　　).

(A) $(-\infty,\ -3)\cup(0,\ 3]$　　(B) $[-3,\ 0)\cup(3,\ +\infty)$

(C) $(-3,\ 0)\cup(3,\ +\infty)$　　(D) $[-3,\ 0)\cup[3,\ +\infty)$

16. 定义:设 A 是非空实数集合,若 $\exists a\in A$,使得对于 $\forall x\in A$,都有 $x\leqslant a(x\geqslant a)$,则称 a 是 A 的最大(小)值. 若 B 是一个不含零的非空实数集合,且 a_0 是 B 的最大值,则 (　　).

(A) 当 $a_0>0$ 时,a_0^{-1} 是集合 $\{x^{-1} \mid x\in B\}$ 的最小值

(B) 当 $a_0>0$ 时,a_0^{-1} 是集合 $\{x^{-1} \mid x\in B\}$ 的最大值

(C) 当 $a_0<0$ 时,$-a_0^{-1}$ 是集合 $\{-x^{-1} \mid x\in B\}$ 的最小值

(D) 当 $a_0<0$ 时,$-a_0^{-1}$ 是集合 $\{-x^{-1} \mid x\in B\}$ 的最大值

17. 已知集合 $A=\{x \mid \log_2 x\leqslant 2\}$, $B=(-\infty,\ a)$,若 $A\subseteq B$,则实数 a 的取值范围是 $(c,\ +\infty)$,其中 $c=$ ________.

18. 已知集合 $A=\{x \mid x^2-ax+a^2-19=0\}$, $B=\{x \mid x^2-5x+6=0\}$, $C=\{x \mid x^2+2x-8=0\}$,是否存在实数 a,使得 $A\cap C=\varnothing$, $\varnothing\subsetneqq A\cap B$ 同时成立?若存在,求出 a 值;若不存在,说明理由.

专题 2

简易逻辑

【知识梳理】

逻辑是研究思维形式及其规律的一门学科，在学习数学的过程中，全面理解概念，正确进行表述、判断和推理都离不开逻辑知识，因此它是我们认识问题、研究问题不可缺少的工具.

1. 逻辑连接词

(1) 命题　可以判断真假的语句叫做命题.

(2) 逻辑连接词　“或”、“且”、“非”这些词叫做逻辑连接词.

(3) 简单命题　不含逻辑连接词的命题叫做简单命题.

(4) 复合命题　由简单命题与逻辑连接词构成的命题叫做复合命题，复合命题由“p且q”、“p或q”或“非p”构成.

简单命题常用小写拉丁字母 p, q, r, s, …表示.

(5) 判断复合命题的真假，可用下表表示.

p	q	非p	p或q	p且q
真	真	假	真	真
真	假	假	真	假
假	真	真	真	假
假	假	真	假	假

2. 四种命题

(1) 四种命题

一般地，用p和q分别表示原命题的条件和结论，用$\neg p$和$\neg q$分别表示p和q的否命题. 于是四种命题的形式为：

原命题　若p则q；

逆命题　若q则p；

否命题　若$\neg p$则$\neg q$；

逆否命题 若$\neg q$则$\neg p$.

(2) 四种命题的关系

① 原命题$\Leftrightarrow$逆否命题，它们之间存在逆否关系，且具有相同的真假性.

② 逆命题$\Leftrightarrow$否命题，它们之间也互为逆否关系，且具有相同的真假性.

③ 原命题与逆命题、否命题的真假之间无一定联系，如原命题为真，则其逆命题与否命题未必为真.

思考：你能指出否命题与命题的否定两者的区别吗？并举例说明.

(3) 反证法

① 用反证法证明命题的一般步骤为：

a. 假设命题的结论不成立，即假设命题结论的反面成立；

b. 从这个假设出发，经过推理论证得出矛盾；

c. 由矛盾判断假设不正确，从而肯定命题的结论正确.

思考：你能说出推出矛盾可能出现的几种情况吗？

② 可用反证法证明的几种类型：

a. 结论本身是以否定形式出现的命题；

b. 有关结论是以“至多……”或“至少……”的形式出现的命题；

c. 有关唯一性、存在性的问题；

d. 结论的反面是比原结论更具体、更容易研究的命题.

思考：“至多……”，“至少……”，“都是”的否定形式是什么？

(4) 充分条件和必要条件

① 命题 $A\Rightarrow B$ 成立，则称：

A 是 B 的充分条件；

B 是 A 的必要条件；

A 的必要条件是 B；

B 的充分条件是 A.

② 若 $A\Rightarrow B$ 且 $B\Rightarrow A$，则称 A 是 B 的充分且必要条件，简称充要条件，记作 $A\Leftrightarrow B$.

③ 若 $A\Rightarrow B$, $B\not\Rightarrow A$，称 A 是 B 的充分而不必要条件.

点击：你能说出一些与充要条件同义的词语吗？如：“当且仅当”，“必须且只需”等.

④ 判断所给命题的条件是结论成立的什么条件是常见的一类题型，解决这类问题的常用方法有：

a. 定义法 判断 B 是 A 什么条件，实际上就是判断 $B\Rightarrow A$ 或 $A\Rightarrow B$ 是否成立，只要

把题目中所给条件按逻辑关系画出箭头示意图，再利用定义即可判断.

b. 转换法　当所给命题的充要条件不易判定时，可对命题进行等价转换，例如改用其逆否命题进行判断.

c. 集合法　在命题的条件和结论间的关系判断有困难时，有时可从集合的角度来考虑，记条件 p、q 对应的集合分别为 A、B，则：

若 $A\subseteq B$，则 p 是 q 的充分条件；

若 $A\subsetneqq B$，则 p 是 q 的充分非必要条件；

若 $A=B$，则 p，q 互为充要条件；

若 $A\not\subseteq B$ 且 $B\not\subseteq A$，则 p 是 q 的既非充分也非必要条件.

【分类举例】

例 1　判断下列语句是不是命题，若是，判断其真假；若不是，请说明理由.

(1) 正方形是平行四边形吗？

(2) 求证 $x\in\mathbf{R}$，方程 $x^2+x+1=0$ 无实根；

(3) 大角所对的边大于小角所对的边；

(4) 一个数不是合数就是质数；

(5) $x^2+2x-3>0$；

(6) $5\geqslant 5$.

点击：开语句、祈使句、疑问句、感叹句都不是命题.

解析　判断某一语句是不是命题，应从命题的定义出发，即看其可否判断真假.

(1) 不是命题，因为它并没有对结论作出判断.

(2) 不是命题，它为祈使句.

(3) 是假命题，若在两个不同的三角形中，大角与小角与边之间无必然联系.

(4) 是假命题，数 1 既不是质数也不是合数.

(5) 不是命题，因为语句中含有变量 x，在不给定变量的范围之前，无法判断语句的真假.

(6) 是命题. 且为真命题.

第(5)小题含变量的语句也叫开语句.

例 2　已知 p：方程 $x^2+mx+1=0$ 有两个不等的负根；q：方程 $4x^2+4(m-2)+1=0$ 无实根，若 p 或 q 为真，p 且 q 为假，求实数 m 的取值范围.

解析　由简单命题的真假可根据真值表来判断复合命题的真假，反过来，复合命题的真假亦可断定构成复合命题的简单命题真假的可能情况.

点击：若“p 或 q 为真”，则可判断有“p、q 中一真一假”及“p、q 均为真”两种情况. 又“p 且 q 为假”，则 p、q 必为一真一假.

若方程 $x^2+mx+1=0$ 有两个不等的负根，则

$$\begin{cases}\Delta=m^2-4>0,\\ m>0,\end{cases}$$

解不等式组，得 $m>2$. 即 p：$m>2$.

若方程：$4x^2+4(m-2)x+1=0$ 无实根，则

$$\Delta=16(m-2)^2-16<0,$$

解不等式得 $1<m<3$. 即 q：$1<m<3$.

由已知可判定 p、q 为一真一假两命题，即：p 真 q 假，或 p 假 q 真两种情况. 故：

$$\begin{cases}m>2,\\ m\leqslant 1 \text{ 或 } m\geqslant 3;\end{cases}\quad \text{或} \begin{cases}m\leqslant 2,\\ 1<m<3.\end{cases}$$

故 m 的取值范围为　$m\geqslant 3$ 或 $1<m\leqslant 2$.

例 3　写出以下原命题的逆命题、否命题、逆否命题，并判断其真假.

(1) 若 $x=3$ 或 $x=7$，则 $x^2-10x+21=0$；

(2) 若 $m<0$，则关于 x 的方程 $x^2+x+m=0$ 有实根.

解析　写出一个命题的逆命题、否命题及逆否命题的关键是正确找出原命题的大前提、条件和结论，然后依照定义来写. 判断命题的真假可用互为逆否的两命题同真同假来判断.

点击：逆命题与否命题亦是互为逆否命题，它们同真或同假.

(1) 逆命题：若 $x^2-10x+21=0$，则 $x=3$ 或 $x=7$.（真命题）

否命题：若 $x\neq 3$ 且 $x\neq 7$，则 $x^2-10x+21\neq 0$.（真命题）

逆否命题：若 $x^2-10x+21\neq 0$，则 $x\neq 3$ 且 $x\neq 7$.（真命题）

(2) 逆命题：若关于 x 的方程 $x^2+x+m=0$ 有实根，则 $m<0$.（假命题）

否命题：若 $m\geqslant 0$，则关于 x 的方程 $x^2+x+m=0$ 没有实根.（假命题）

逆否命题：若关于 x 的方程 $x^2+x+m=0$ 没有实根，则 $m\geqslant 0$.（真命题）

点击：$x=3$ 或 $x=7$ 的否定为：$x\neq 3$ 且 $x\neq 7$，这可借助集合思想来理解：$\complement_I(A\cup B)=(\complement_I A)\cap(\complement_I B)$

例 4　(2010 · 北京) $\vec{a}$、$\vec{b}$ 为非零向量. “$\vec{a}\perp\vec{b}$” 是“函数 $f(x)=(x\vec{a}+\vec{b})\cdot(x\vec{b}-\vec{a})$ 为一次函数”的（　　）.

(A) 充分而不必要条件

(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件

(D) 既不充分也不必要条件

解析 $f(x)=(x\vec{a}+\vec{b})\cdot(x\vec{b}-\vec{a})=(\vec{a}\cdot\vec{b})x^2+(|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2)x-\vec{a}\cdot\vec{b}$. 若$\vec{a}\perp\vec{b}$,则有$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$;如果同时有$|\vec{b}|=|\vec{a}|$,则函数恒为0,不是一次函数,因此不是充分条件. 而如果$f(x)$为一次函数,则$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$,因此可得$\vec{a}\perp\vec{b}$,故该条件是必要条件. 选 B.

例 5 (2010·湖北)设实数$x_1, x_2, \cdots, x_n$中的最大数为$\max\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$,最小数为$\min\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$. 已知$\triangle ABC$的三边边长为$a$、$b$、$c$($a\leqslant b\leqslant c$),定义它的倾斜度为$l=\max\left\{\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}\right\}\cdot\min\left\{\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}\right\}$,则“$l=1$”是“$\triangle ABC$为等边三角形”的(　　).

(A) 必要而不充分条件

(B) 充分而不必要条件

(C) 充要条件

(D) 既不充分也不必要条件

解析 由$l=1$得不到$\triangle ABC$为等边三角形,如三角形三边为1, 2, 2时,$l=2\times\frac{1}{2}=1$;反之,若$\triangle ABC$为等边三角形,则易得$l=1$. 故选 A.

例 6 若a、b、c均为实数,且$a=x^2-2y+\frac{\pi}{2}$, $b=y^2-2z+\frac{\pi}{3}$, $c=z^2-2x+\frac{\pi}{6}$. 求证:a、b、c中至少有一个大于零.

解析 显然由条件不易直接推出结论. 而且对结论中对某种数量用“唯一”、“至少”、“至多”、“不超过”、“不少于”等词加以限制或结论是否定性的,可考虑用反证法.

假设a、b、c都不大于零,即$a\leqslant 0$, $b\leqslant 0$, $c\leqslant 0$,则有:$a+b+c\leqslant 0$,

又
$$\begin{aligned}&a+b+c\\&=\left(x^2-2y+\frac{\pi}{2}\right)+\left(y^2-2z+\frac{\pi}{3}\right)+\left(z^2-2x+\frac{\pi}{6}\right)\\&=(x^2-2x)+(y^2-2y)+(z^2-2z)+\pi\\&=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+(\pi-3).\end{aligned}$$

点击:在代数式变形与零比较大小时,常用因式分解或配方.

因为　　$\pi>3$, $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\geqslant 0$,