高中数学竞赛专题讲座

PINGMIAN JIHE JIETI SIXIANG YU CELUE

平面几何解题思想与策略

过伯祥 编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

高中数学竞赛专题讲座

平面几何解题思想与策略

过伯祥　编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学竞赛专题讲座. 平面几何解题思想与策略/过伯祥编著. —杭州：浙江大学出版社，2011.1
ISBN 978-7-308-08387-4

Ⅰ.①高… Ⅱ.①过… Ⅲ.①几何课—高中—教学参考资料 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 013598 号

高中数学竞赛专题讲座
平面几何解题思想与策略
过伯祥 编著

责任编辑 杨晓鸣 吴慧(特邀)
封面设计 刘依群
出版发行 浙江大学出版社
（杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007）
（网址：http://www.zjupress.com）
排　　版 杭州大漠照排印刷有限公司
印　　刷 德清县第二印刷厂
开　　本 787mm×960mm 1/16
印　　张 13.75
字　　数 295 千
版 印 次 2011 年 2 月第 1 版 2011 年 2 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-308-08387-4
定　　价 25.00 元

浙江大学出版社发行部邮购电话（0571）88925591

目录 CONTENTS

引言：作为中学数学学科之一的“平面几何”的特殊性

平面几何是颇为特殊的一门中学数学学科！

平面几何是上帝赐予人类的，训练逻辑思维的极好素材. 一些著名科学家在回忆起自己的青少年时期的学习生活时，都说：平面几何学科的学习带给他们的终生印象深刻；对平几训练为他以后的个人发展所奠定的良好基础与影响，言谈之中都是青睐有加的.

平面几何在数学发展史上，也有着它独特的地位：欧几里得的《几何原本》，开创了数学公理化；由为证明与平行公理等价的著名的欧几里得第五公设导引出的（罗巴切夫斯基的）非欧几何，则把人类对数学的认识提高到了又一个新境界.

中学的教改，一次次喊出过“打倒欧几里得！”的口号，又一次次几乎回复到了它的本原——虽然随着时代的发展，内容上总会有所变化与发展的，但借助基本图形训练逻辑思维的特色却依然如故. 它啊，就是在那一盆“脏水”中的，人们不可也不能一起泼出去的“孩子”.

平面几何在数学奥林匹克中的特殊地位更是人所共见的：由于它对逻辑思维的独特的考查功能；由于它作为试题，在内容上的层出无穷的创新性；更由于许多几何试题客观存在的多种解法，总能借鉴、涉及与运用到中学数学中的几乎每一个数学方法，……，而成为各级数学奥林匹克的必考内容之一.

眼前的这本奥林匹克平面几何，有如下三大特点：

双基 —— 每个平几题，都可以拆解成一个个基本图形. 它的综合解法，就是运用一个个基本结论来完成的. 本书特意将一大批基本结论，用粗体字加方括号的方式予以突出；

种种解法 —— 本书介绍了平面几何的几乎所有重要的解法；

探索分析法 —— 本书重视平几题的解法思路的探索发现. 非但特辟专章，给予探讨研究. 多个例题的“分析”中，也力求有所体现。本书的“分析”是与众不同的.

平面几何新题真是千变万化、变幻无穷的，这也是它被确定为各届奥林匹克竞赛必考的一类试题的一个背景. 但在这千变背后不变的要素，就是

基本图形，基本结论；种种解法与常用的探索分析方法.

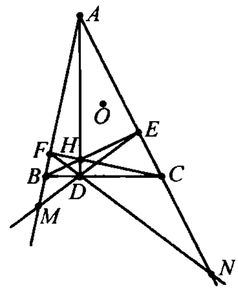
要提高平面几何的学习水平与学习效率，宜注意以下这三个要点：

(1) 要熟悉较多的几何定理 —— 这些内容，亦即上文所说的基本图形与基本结论

之一.

在一个几何的体系中,定理是已经获得了证明的命题,它可以用来证明其他的几何结论. 列为教本上的定理的,都是关于基本图形性质的重要结果. 为减轻学生的负担,当今的中学教材,已减少了许多定理,与奥数几何的解题需要已经离开得越来越大了.

定理对于解题的重要性是不言而喻的. 解某题时,恰好可以应用某个重要的定理或某基本结论,你当然直接就拿来应用了. 否则,你必然要多费许多的周折呢!



例 1 (联赛 2001)$\triangle ABC$ 中,O 为外心,三条高 AD、BE、CF 交于点 H,直线 ED 和 AB 交于点 M,FD 和 AC 交于点 N,求证: $OH \perp MN$.

分析 除了常规的证两线垂直的方法,还可以用定理"两圆的等幂轴垂直于连心线"来证明两线垂直. 那么,是哪两个圆呢? 哪一条是连心线?另一条又为什么是这两圆的等幂轴?

证明 D'、E'、F' 为 $\triangle ABC$ 的三边中点,则过 D、D'、E、E'、F、F' 的圆即为三角形的九点圆. OH 的中点 O' 为九点圆心.

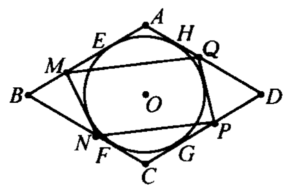
$\because$ A、B、D、E 四点共圆,$\therefore$ $MA \cdot MB = MD \cdot ME$

$\because$ F、F'、E、D 为九点圆上的四点,$\therefore$ $MF \cdot MF' = MD \cdot ME$

这就表明 M 对 $\odot O$ 的幂 $=$ M 对 $\odot O'$ 的幂;

同理,N 对 $\odot O$ 的幂 $=$ N 对 $\odot O'$ 的幂,

$\therefore$ MN 为 $\odot O$ 与 $\odot O'$ 的等幂轴,$\therefore$ $OO' \perp MN$,即 $OH \perp MN$.



例 2 (联赛 1995)如图,菱形 $ABCD$ 的内切圆 $\odot O$ 与各边分别切于 E、F、G、H,在弧 EF 与弧 GH 上分别作 $\odot O$ 的切线 MN 与 PQ,交 AB 于 M,交 BC 于 N;交 CD 于 P,交 DA 于 Q. 求证: $MQ \parallel NP$.

分析 显然,六边形 $AMNCPQ$ 外切于圆. 由布利安双定理,"外切于圆(椭圆、或更一般的,一条非退化的二级曲线)的简单六线形的三对对顶点的连线交于同一点." 从而,AC、MP、NQ 交于一点. 这对于推出结论 $MQ \parallel NP$ 究竟有何联系与作用呢?[退化情形: 四边形 $A(E)BC(G)D$ 外切于圆,则由布利安双定理,AC、BD、EG 也交于一点.]

证明 六边形 $AMNCPQ$ 外切于圆,由布利安双定理,AC、MP、NQ 交于一点 O'.

$\because$ $AB \parallel DC$,$BC \parallel AD$,$\therefore$ $\triangle AMO' \backsim \triangle CPO'$,$\triangle AQO' \backsim \triangle CNO'$.

$\therefore$ $MO' : PO' = AO' : CO' = QO' : NO'$,又 $\angle MO'Q = \angle PO'N$,

$\therefore$ $\triangle MO'Q \backsim \triangle PO'N$.

$\therefore$ $\angle O'MQ = \angle O'PN$, $\therefore$ $MQ \parallel NP$.

(2) 要关注一些常有用的几何基本结论 —— 虽然它们不属于定理.

一些几何基本结论，历来就不列为定理，但它们也是图形的重要性质. 有的，解题中也是常用的. 在学习与辅导中，搜集与整理好这些几何基本结论，是提高几何水平的又一条捷径.

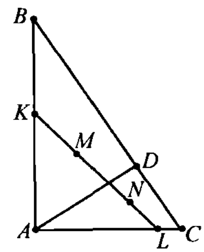
你对于一类基本图形的基本结论，领悟得越深刻，理解得越全面，你对这一类图形处理起来就越能左右逢源，得心应手，解题也就会越有办法了.

本书将把在解题中常用到的一些基本结论，结合例题的讲解，**用粗体字加方括号的形式**，在解答中突出的表示出来.

例 3 （IMO29）在直角 $\triangle ABC$ 中，AD 是斜边 BC 上的高，连结 $\triangle ABD$ 的内心与 $\triangle ACD$ 的内心的直线，分别与边 AB 及边 AC 相交于 K 及 L 两点，$\triangle ABC$ 与 $\triangle AKL$ 的面积分别记为 S 与 T，证明：$S \geqslant 2T$.

分析 相似三角形有什么性质?除了课本上讲到的，还有：**相似三角形的对应线段都成比例；顺位相似的三角形，对应边的交角保持相等**(保角). 在第 29 届 IMO 上，中国选手何宏宇获得了满分. 由于他对全等三角形、相似三角形的深刻理解，这一题他解得特别的漂亮!

证明 设 $\triangle ABD$ 的内心为 M，$\triangle ACD$ 的内心为 N. 由于 $\triangle ADB \backsim \triangle CDA$，$DM$ 与 DN 为对应的角平分线，故 $DM : DN = BD : AD$



[**相似三角形的对应线段的比等于相似比**]

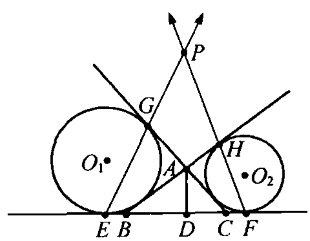
显然 $\angle MDN = 90°$，从而 $\triangle NMD \backsim \triangle ABD$，

因此 $\angle LKA = \angle BDM = 45°$[**顺位相似的两个三角形，对应边的交角保持相等**]. 这样，$\triangle ALK$ 为等腰直角三角形.

又由 $\triangle AMK \cong \triangle AMD$，故 $AK = AD = AL$，于是

$S : 2T = \frac{1}{2}AB \cdot AC : 2 \cdot \frac{1}{2}AK \cdot AL = AB \cdot AC : 2AD^2 = AB \cdot AC : (2AB^2 \cdot AC^2 : AB^2 + AC^2) = AB^2 + AC^2 : 2AB \cdot AC \geqslant 1$，即 $S \geqslant 2T$.

例 4 （联赛 1996）如图，$\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 与 $\triangle ABC$ 的三边所在直线均相切，E、F、G、H 为切点，并且 EG、FH 的延长线交于点 P. 求证：直线 PA 与 BC 垂直.



分析 作 $AD \perp BC$ 于 D，反向延长 AD 分别交 EG、FH 于点 P_1、P_2. 以下只要用同一法证明 P_1 与 P_2 点重合.

要证 P_1 与 P_2 同一 $\Longleftrightarrow$ 只要证 $P_1D = P_2D \Longleftrightarrow ED\tan\angle GEC = DF\tan\angle HFB \Longleftrightarrow ED\cot C/2 = DF\cot B/2 \Longleftrightarrow$ 只要证 $DE : DF = \cot B/2 : \cot C/2$

由切线长定理易证 $EC = GC = BH = BF$，

而 $\cot \frac{B}{2} : \cot \frac{C}{2} = \frac{BF}{O_2F} : \frac{CE}{O_1E} = O_1E : O_2F = r_1 : r_2$

至此 只要证 $DE : DF = r_1 : r_2$ 就可以了.

证明 作 $AD \perp BC$ 于 D，反向延长 AD 分别交 EG、FH 于点 P_1、P_2.

则有 $P_1D = ED\tan\angle GEC = ED\cot C/2$，

同理 $$P_2D = DF\cot B/2. \qquad ①$$

设 GG'、HH' 为两圆的内公切线，它们相交于一点 A. 由切线长定理

$EF = CE + CF = CG + CF = GG' + 2CF$，同理 $EF = HH' + 2BE$.

$\because GG' = HH'$，$\therefore CF = BE, BF = CE$.

而 $\cot\dfrac{B}{2} : \cot\dfrac{C}{2} = \dfrac{BF}{O_2F} : \dfrac{CE}{O_1E} = O_1E : O_2F = r_1 : r_2$

A 点在连心线 O_1O_2 上，在直角梯形 O_1O_2FE 中，有

$$DE : DF = AO_1 : AO_2 = r_1 : r_2 = \cot\frac{B}{2} : \cot\frac{C}{2}.$$

[过外离两圆两内公切线的交点引外公切线的垂线，则垂足内分外公切线所得两线段的比，等于两圆半径之比.]

于是，由 ① 式即得 $P_1D = P_2D$.

$\therefore P_1$ 与 P_2 点同一，$\therefore$ 直线 PA 与 BC 垂直.

例 5 (IMO 3) 设 $\triangle ABC$ 的三边为 a、b、c，其面积为 S，则 $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4\sqrt{3}S$，当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时，等号成立.

分析 从三角形的一顶点引向对边的线段(比如中线；角平分线等)分原三角形为两个小三角形，这时，两次运用余弦定理，可推出一个**斯特瓦尔特定理**：

$$AD^2 = AB^2 \cdot \frac{DC}{BC} + AC^2 \cdot \frac{BD}{BC} - BC^2 \cdot \frac{BD}{BC} \cdot \frac{DC}{BC}$$

它在三角形问题中很有用.

证明 取 BC 边的中点 D，对 $\triangle ABC$ 及 BC 边上的点 D，

应用斯特瓦尔特定理得：

$$AD^2 = AB^2 \cdot \frac{DC}{BC} + AC^2 \cdot \frac{BD}{BC} - BC^2 \cdot \frac{BD}{BC} \cdot \frac{DC}{BC}$$

$$= \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}a^2.$$

从而有 $a^2 + b^2 + c^2 = 2AD^2 + \dfrac{3}{2}a^2 \geqslant 2\sqrt{2AD^2 \cdot \dfrac{3}{2}a^2} = 2\sqrt{3} \cdot AD \cdot a$.

因为，$AD \geqslant h$，于是就有 $2\sqrt{3}AD \cdot a \geqslant 2\sqrt{3}ah = 4\sqrt{3}S$.

(3) 要探索并积累各种几何证题法，重视证题术的及时的归纳整理

证题法是对于一类定理与基本结论(比如证两线垂直的定理与基本结论)的应用的

理解.学几何的人与人之间的积累与整理,更会有很多的不同.但到了某个试题的解答,往往又是决定性的.这就是各种考试的现实!

现在的课堂上,常规的几何证题法的整理也少了;那些特殊一点的几何证题术(比如:证一点在某个图形内),更是只有等待奥数辅导教师来启示学生了.

前述例1,还有一种证垂直的新法:**“平面上四点 M、N、O、H 之间,若 $OH \perp MN$(O 在 MN 外,H 不一定在 MN 上),则有 $NH^2-MH^2=NO^2-MO^2$;**

反之,若有关系 $NH^2-MH^2=NO^2-MO^2$,则 $OH\perp MN$.”这恰是本例当年的标准解答的依据呢!

证明 $\because CF\perp MA$,$\therefore MC^2-MH^2=AC^2-AH^2$ ①

$\because BE\perp NA$,$\therefore NB^2-NH^2=AB^2-AH^2$ ②

$\because DA\perp BC$,$\therefore BD^2-CD^2=BA^2-CA^2$ ③

$\because OB\perp DF$,$\therefore BN^2-BD^2=ON^2-OD^2$ ④

$\because OC\perp DE$,$\therefore CM^2-CD^2=OM^2-OD^2$ ⑤

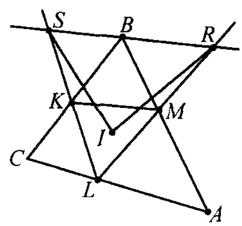
①－②＋③＋④－⑤得:$NH^2-MH^2=NO^2-MO^2$,

即 $MO^2-MH^2=NO^2-NH^2$,所以 $OH\perp MN$.

说明:$\angle DFB=\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB$,$\therefore OB\perp DF$.

例6 (IMO 39)I 是 $\triangle ABC$ 的内心,K、L、M 是内切圆与三边的切点.过 B 点平行于 MK 的直线分别交 LM、LK 于点 R、S.证明:$\angle RIS$ 是锐角.

分析 怎样证明一只角是锐角?可以用解析法(比如证明 $\tan\angle RIS>0$);用余弦定理.还有一种证一角为锐角、直角或钝角的较好的方法是:



D 在线段 AB 上,$CD\perp AB$,则有

$$\left.\begin{array}{l} CD^2<AD\cdot DB \\ CD^2=AD\cdot DB \\ CD^2>AD\cdot DB \end{array}\right. \iff \begin{array}{l} \angle ACB>90^\circ, \\ \angle ACB=90^\circ, \\ \angle ACB<90^\circ. \end{array}$$

于是,要证 $\angle RIS$ 是锐角,因为有 $IB\perp SR$,只要证 $BR\cdot BS<IB^2$ 就可以了.

这是射影定理的逆定理($CD\perp AB$,$CD^2=AD\cdot DB$ 时,有 $\angle ACB=90^\circ$)的副产品,恰是一般学几何的人的一种盲区呢!

证明 由 $RS\parallel MK$,有 $\angle MBR=\angle KMB$,$\angle KBS=\angle MKB$.

$\because BM$、BK 是两条切线,$\therefore BM=BK$,$\angle KMB=\angle MKB$,$\therefore \angle MBR=\angle KBS$.

连 IB,则 $IB\perp RS$.而 $\angle BRM=\angle LMK=\angle LKC=\angle BKS$,从而 $\triangle BMR\backsim\triangle BSK$,$BR:BM=BK:BS$,$\therefore BM\cdot BK=BR\cdot BS$,

$\therefore BR\cdot BS=BM^2=IB^2-r^2<IB^2$,故 $\angle RIS$ 是锐角.

练习一

1.1 张角定理(参第三章,其实只是三角形面积关系的一个推论). 试用张角定理证明斯坦纳定理: 在 $\triangle ABC$ 中, BD、CE 分别是 $\angle ABC$、$\angle ACB$ 的平分线,若 $BD = CE$,证明 $AB = AC$.

1.2 (CMO 14) 在锐角 $\triangle ABC$ 中, $\angle C > \angle B$,点 D 是边 BC 上一点,使得 $\angle ADB$ 是钝角. H 是 $\triangle ABD$ 的垂心,点 F 在 $\triangle ABC$ 内部且在 $\triangle ABD$ 的外接圆周上. 求证: 点 F 是 $\triangle ABC$ 的垂心的充分必要条件是, HD 平行于 CF,且在 $\triangle ABC$ 的外接圆上.

1.3 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 30°$, O 为外心, I 为内心,边 AC 上的点 D 与边 BC 上的点 E,使得 $AD = BE = AB$. 求证: $OI \perp DE$, $OI = DE$.

1.4 (集训选拔 1999) 锐角 $\triangle ABC$ 中, $\angle C > \angle B > \angle A$, H、O、I 分别是它的垂心、外心、内心,求证: I 在 $\triangle BOH$ 的内部.

1.5 (IMO 35 预) 一直线 l 与以 O 为圆心的圆 ω 不相交. E 是 l 上的一点,使 $OE \perp l$; M 是 l 上的任意点,自 M 到圆 ω 的切线切它于点 A 与 B. C 是 MA 上使 $EC \perp MA$ 的一点, D 是 MB 上使 $ED \perp MB$ 的一点. 直线 CD 交 OE 于 F. 证明: 点 F 的位置与点 M 的选择无关.

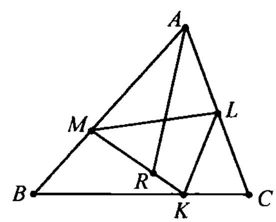
1.6 (IMO 27) 以点 O 为中心的正 n 边形 ($n \geqslant 5$) 的两个相邻顶点记为 A、B, $\triangle XYZ$ 与 $\triangle ABC$ 全等. 最初令 $\triangle XYZ$ 重叠于 $\triangle OAB$,然后,在平面上移动 $\triangle XYZ$,使点 Y 和 Z 都沿着多边形的周界移动一周,而点 X 保持在多边形内移动. 求 X 点的轨迹.

1.7 (IMO 41 预) 设 AH_1、AH_2、AH_3 是锐角 $\triangle ABC$ 的三条高线, $\triangle ABC$ 的内切圆与边 BC、CA、AB 分别相切于点 T_1、T_2、T_3. 设直线 l_1、l_2、l_3 分别是直线 H_2H_3、H_3H_1、H_1H_2 关于直线 T_2T_3、T_3T_1、T_1T_2 的对称直线. 证明: l_1、l_2、l_3 所确定的三角形,其顶点都在 $\triangle ABC$ 的内切圆上.

第一章　奥林匹克平几的探索分析法

几何的题目只是一个个图形问题的载体. 平面几何中最有教育意义的，往往是它的那种独特的探索法，也就是"怎样去想?""你是怎样想到的?"的那个探索分析的过程. 只可惜在考试中，人们总是只考查(也会有人说，只能考查)那个解题的结果，觉得无法去考查那个思考的过程. 致使一些平面几何的参考书，也多是重在资料的搜集与解答的提供，较少去关注分析探索过程的安排. 如下引例，既见证了不同的分析讲解法，是否也多少透露了不同一般的命拟试题的一种新方式.

引例　(IMO 29 预) 在 $\triangle ABC$ 中，任取点 $K \in BC$, $L \in AC$, $M \in AB$, $N \in LM$, $R \in MK$, $F \in KL$. 如果 E_1、E_2、E_3、E_4、E_5、E_6 和 E 分别表示三角形 AMR、CKR、BKF、ALF、BMN、CLN 和 ABC 的面积.



证明：$E \geqslant 8(E_1E_2E_3E_4E_5E_6)^{\frac{1}{6}}$.

分析　考虑到它的图形与结论形式的轮换对称性：$E^6 \geqslant 8^6(E_1E_2E_3E_4E_5E_6)$，可以归结为，只要去证明：$E^2 \geqslant 8^2(E_1E_2)$. 或者只要去证明：$E^{\frac{1}{3}} \geqslant 2(E_1E_2)^{\frac{1}{6}}$. 因为，可以同理证明另外的两个类似式子.

注意到 $E_1^{\frac{1}{3}} + E_2^{\frac{1}{3}} \geqslant 2(E_1E_2)^{\frac{1}{6}}$，就可以归结为只要去证明加强不等式：

$E^{\frac{1}{3}} \geqslant E_1^{\frac{1}{3}} + E_2^{\frac{1}{3}}$，即 $\left(\frac{E_1}{E}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{E_2}{E}\right)^{\frac{1}{3}} \leqslant 1$. 这就是基本问题：

命题 1　在 $\triangle ABC$ 中，任取点 $K \in BC$, $M \in AB$, $R \in MK$，如果 E_1、E_2 和 E 分别表示三角形 AMR、CKR 和 ABC 的面积. 证明：$\left(\frac{E_1}{E}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{E_2}{E}\right)^{\frac{1}{3}} \leqslant 1$.

证明　以 $E(ABC)$ 表示 $\triangle ABC$ 的面积，则由面积关系推出对应的线段关系，有：

$$\frac{E_1}{E} = \frac{E_1}{E(AMK)} \cdot \frac{E(AMK)}{E(AKB)} \cdot \frac{E(AKB)}{E} = \frac{MR}{MK} \cdot \frac{AM}{AB} \cdot \frac{BK}{BC},$$

从而，由平均不等式

$$\left(\frac{E_1}{E}\right)^{\frac{1}{3}} \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{MR}{MK} + \frac{AM}{AB} + \frac{BK}{BC}\right),$$

同理可证 $\left(\dfrac{E_2}{E}\right)^{\frac{1}{3}} \leqslant \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{RK}{MK}+\dfrac{KC}{BC}+\dfrac{MB}{AB}\right)$.

将两式相加，即得 $\left(\dfrac{E_1}{E}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\dfrac{E_2}{E}\right)^{\frac{1}{3}} \leqslant 1$. 于是有 $E^{\frac{1}{3}} \geqslant E_1^{\frac{1}{3}}+E_2^{\frac{1}{3}} \geqslant 2(E_1E_2)^{\frac{1}{6}}$[还可得 $E^2 \geqslant 8^2(E_1E_2)$.]

同理可得另两式.三式相乘,即可得 $E \geqslant 8(E_1E_2E_3E_4E_5E_6)^{\frac{1}{6}}$.

1.1　从最简单的情形入手

1. 从粗略的估计开始,从熟悉的地方开始

对于某一个问题情境,总有你比较熟悉的东西(或地方)的;有时也会有一些关于解题方向等的粗略估计的. 一般情况下,你的解题就可以从这里开始!

例 1.1.1　$\triangle ABC$ 的底 $BC=a$ 及 BC 边上的高 h_a 均为定值.什么时候,这个三角形的三条高的乘积 $h_ah_bh_c$ 取最大值?

分析　顶点 A 在与 BC 平行且距离为 h_a 的直线 l 上. 我们可能猜想,在 $AB=AC$;或在 $\angle BAC=90°$ 时,$h_ah_bh_c$ 为最大.

可以从熟悉的面积关系出发,如下作化归分析:在我们的问题中,h_a 已知,只需要求 h_bh_c 的最大值;注意到面积 $S=\dfrac{1}{2}h_aa$ 为已知,及 $bc=\dfrac{4S^2}{h_bh_c}$,问题又可归结为求 bc 的最小值.

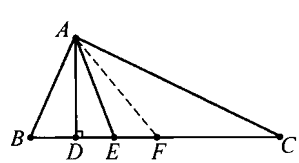
而 $bc=\dfrac{2S}{\sin A}$,则可化归为求 $\sin A$ 的最大值了.

至此,你可以画一、二个图,并作出相应的判断了.

解　如果 $\angle BAC$ 可以为 $90°$ 的角,那么,当 $\angle BAC=90°$ 时,$\sin A$ 最大. $h_ah_bh_c=h_a\cdot\dfrac{4S^2}{bc}=h_a\cdot 2S\cdot\sin A=ah_a^2\cdot\sin A$ 即为最大.这时,以 BC 为直径的圆与直线 l 有公共点,$h_a\leqslant a/2$,$h_ah_bh_c$ 在 $\angle BAC$ 为直角时有最大值 ah_a^2.

如果 $h_a>a/2$,$\angle BAC$ 不可以为 $90°$ 时,A 点在以 BC 为直径的圆的外面,$\angle BAC<90°$. 这时,发现 $\sin A$ 随 $\angle A$ 递增,从而,$h_ah_bh_c=ah_a^2\cdot\sin A$ 当 A 点在 BC 的中垂线上,即 $AB=AC$ 时,$\angle A$ 为最大,$\sin A$ 亦为最大. 即 $h_ah_bh_c$ 在 $AB=AC$ 时为最大.

例 1.1.2　(CMO 1) 在 $\triangle ABC$ 中,BC 边上的高 $AD=12$,$\angle A$ 的平分线 $AE=13$,设 BC 边上的中线 $AF=m$. 问 m 在什么范围内取值时,$\angle A$ 分别为锐角、直角、钝角?



分析　$\text{Rt}\triangle ADE$ 中,$AD=12$,$AE=13$,所以,$DE=5$. 显然,可以先考虑 $\angle A$ 为锐、钝的分界点问题:

问题 1　在 $\triangle ABC$ 中，BC 边上的高 $AD=12$，$\angle A$ 的平分线 $AE=13$. 设 BC 边上的中线 $AF=m$，当 $\angle A$ 为直角时，m 的值为多少？

解　$\angle A=90^\circ$ 时，$\angle BAD=\angle C=\angle CAF$，$\angle DAE=\angle EAF$，$\angle DAF=2\angle DAE$. 这时，

$$m=AF=\frac{AD}{\cos\angle DAF}=\frac{12}{\cos\left[2\arccos\frac{12}{13}\right]}=\frac{12}{2\cdot\left(\frac{12}{13}\right)^2-1}=\frac{2028}{119}.$$

以下，先说明点 D、E、F 在直线 BC 上的位置关系：如果 $AB<AC$，记 $AC=b$，$AB=c$，$AD=h$，$AE=t$，$AF=m$，则有 $\frac{\sqrt{b^2-h^2}}{\sqrt{c^2-h^2}}\geqslant\frac{b}{c}\geqslant 1$，即 $CD:BD\geqslant CE:BE\geqslant CF:BF$. 由此看出，点 D、E、F 在直线 BC 上是沿 B 指往 C 的方向依次排列，且 $AF>AE$，即 $m>13$.

过 F 点作 BC 的垂线，交 $\triangle ABC$ 的外接圆的不含 A 点的弧于 G，连 AG，AG 即是 $\angle BAC$ 的平分线. 这时，考察圆的任何一个弓形，从弓形弦的中点到弓形弧上各点的距离的最大值与最小值，其一为弓形的高，另一即为弓形的半弦长. 由此容易判断：

$$\angle BAC\ \text{是}\begin{cases}\text{锐角}\\ \text{直角}\\ \text{钝角}\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}FG<AF,\\ FG=AF,\\ FG>AF.\end{cases}$$

接下去，画图作直观考察并做计算：作 $\triangle DAE$，使 $AD=12$，$AE=13$，$\angle ADE=90^\circ$. 在 AE 的两侧，作两射线 AB_K、AC_K，使 $\angle B_KAE=\angle EAC_K=\alpha_K$. 令

$$0<\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_K<\cdots<90^\circ-\angle DAE=90^\circ-\arccos\frac{12}{13}$$

考察 DF_K 及 AF_K 的变化情况. 可知，$\triangle ADE\backsim\triangle GFE$，而 $FG<AF$ 相当于：$\frac{12}{5}(\sqrt{m^2-12^2}-5)<m$ 等. 注意到 $m>13$，解出 m 的范围，便有：

$\angle A$ 为锐角时，$13<m<2028/119$，

$\angle A$ 为直角时，$m=2028/119$，

$\angle A$ 为钝角时，$m>2028/119$.

说明　可以证明：两两互不相等的线段 m、t、h 能作为一个三角形的同一边上的中线、角平分线与高的充要条件是 $m>t>h$. 这时，角平分线必落在中线与高所夹的角的内部.

已知 m、t、h，可以确定一个三角形，从而可以用 m、t、h 表示 BC 边的长；及三角形的外接圆的直径等.

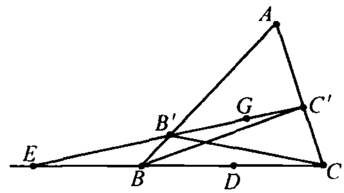
还可以证明，用 m、t、h 给出的 $\angle A$ 为锐角、直角、钝角的充要条件为：

$2mh^2-(m+h)\cdot t^2$ 小于、等于、大于 0.

2. 从特款(特殊情形)入手

一般情形成立的,特殊情形下就一定成立;特殊情形下的解法,常常可以类推到一般的情形中去.正由于此,特款在数学解题过程中是具有较大的启发意义的,这就是一般与特殊的辩证法!

例 1.1.3 重心 G 与 $\triangle ABC$ 的顶点 A 在截线 $B'C'$(B' 在 AB 上,C' 在 AC 上)的同侧.求证:$S_{BC'GB'}+S_{CB'GC'}\geqslant\frac{4}{9}S_{\triangle ABC}$.



分析 可以先考察 $B'C'$ 经过重心 G 时的特款!虽然它不属于本题的范围.延长 $B'C'$ 交直线 CB 于 E.令 $AB':AB=\lambda$,$AC':AC=\mu$,

此图景下容易想到梅涅劳斯定理:D 为 BC 中点.在 $\triangle ABD$ 中,有$\frac{\lambda}{1-\lambda}\cdot\frac{BE}{ED}\cdot\frac{1}{2}=1$,

在 $\triangle ADC$ 中有 $\frac{2}{1}\cdot\frac{DE}{EC}\cdot\frac{1-\mu}{\mu}=1$,

由此两式即可以推出$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=3$.

再考察在此特款下的图形的面积关系:

令 $S_{\triangle ABC}=1$,则有 $S_{BC'GB'}=\mu(1-\lambda)$,$S_{CB'GC'}=\lambda(1-\mu)$,

$\therefore\ S_{\triangle BC'B'}+S_{\triangle CB'C'}=\mu(1-\lambda)+\lambda(1-\mu)=\lambda\mu\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\lambda}-2\right)=\lambda\mu=S_{\triangle AB'C'}$.

$B'C'$ 经过重心 G 时,容易证明 $S_{\triangle AB'C'}\geqslant\frac{4}{9}S_{\triangle ABC}$,即 $\lambda\mu\geqslant\frac{4}{9}$.

余下的,只要再去考察图形的一般情形!

证明 当 $B'C'$ 不经过重心 G 时,过 G 点作 $B_1C_1\parallel B'C'$,交 AB、AC 于 B_1、C_1.这时,探讨各图形间的面积关系,易得:

$$S_{BC'GB'}=S_{BC'B'}+S_{B'C'G},\ S_{B'C'G}=S_{B'C'B_1},$$

$\therefore\ S_{BC'GB'}=S_{\triangle BC'B_1}>S_{\triangle BB_1C_1}$.同理 $S_{CB'GC'}=S_{\triangle CB'C_1}>S_{\triangle CC_1B_1}$.

两式相加即得 $S_{BC'GB'}+S_{CB'GC'}>S_{\triangle BB_1C_1}+S_{\triangle CC_1B_1}\geqslant\frac{4}{9}S_{\triangle ABC}$.

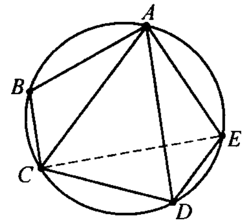
例 1.1.4 Hayashi 的一个几何定理:一内接于圆的凸多边形,从它的一个顶点把它分为许多个三角形,则这些三角形的内切圆的半径之和都是相同的.

1800 年,在日本某庙宇的木板上,就书写着这么一条优美的几何定理.此定理的优美之处在于:剖分方法不尽相同,三角形大小也不一样,各三角形的内切圆半径之和恰不变.

分析　首要的是要先确定，多边形的每一次三角形剖分，能得到多少个三角形？设凸 n 边形的三角形剖分，可得到 x 个三角形．则 $x \cdot 180° = (n-2) \cdot 180°$，$\therefore x = n-2$.

问题的核心部分和困难部分，就是讨论四边形．这是一个重要的特款！

比如，对于五边形，对于从顶点 A 出发，与从顶点 C 出发这两种剖分，如图．



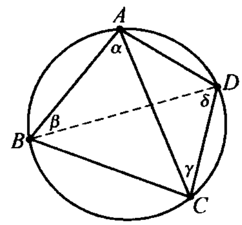
关键就是要看对于四边形 $ACDE$，结论是否能成立．又比如对于六边形 $ABCDEF$，连 AE 就剖出了五边形 $ABCDE$．这时，对于从顶点 A 出发，与从顶点 E 出发，都得到这同一个五边形，已可由归纳法（由结论对四边形成立，推得也能对五边形成立）得到证明了．

证明　**方法一**　可通过三角计算先讨论四边形情形．利用公式，**内切圆半径**

$$\boldsymbol{r_{ABC} = 4R\sin\frac{\angle A}{2}\sin\frac{\angle B}{2}\sin\frac{\angle C}{2}} = 4R\sin\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\gamma_2}{2}\sin\frac{B}{2}.$$

写出 $r_{ABC}, r_{ADC}, r_{BAD}, r_{BCD}$（顺次简设为 r_1, r_2, r_3, r_4）的式子，可以化得：

（图中标有 α 的 $\angle BAC$ 为 α_1，未标的 $\angle CAD$ 为 α_2．余仿此．）



$$\frac{r_1}{4R} = \sin\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\delta_2}{2}\sin\frac{B}{2}, \qquad \frac{r_2}{4R} = \sin\frac{\alpha_2}{2}\sin\frac{\beta_1}{2}\cos\frac{B}{2},$$

$$\frac{r_3}{4R} = \sin\frac{\beta_1}{2}\sin\frac{\delta_2}{2}\sin\frac{A}{2}, \qquad \frac{r_4}{4R} = \sin\frac{\alpha_2}{2}\sin\frac{\alpha_1}{2}\cos\frac{A}{2}.$$

通过三角函数的积化和差，与和差化积，注意到 $A + \beta_1 = 180° - \delta_2 = 180° - r_2 = B + \alpha_1$ 及 $\alpha_2 = \beta_2$ 等，可得

$$\frac{1}{4R}(r_1 - r_3) = \sin\frac{\delta_2}{2}\sin\frac{\alpha_2}{2}\sin\frac{A - B + \alpha_1 - \beta_1}{4},$$

$$\frac{1}{4R}(r_4 - r_2) = \sin\frac{\alpha_2}{2}\sin\frac{\delta_2}{2}\sin\frac{D - C + \delta_1 - \gamma_1}{4}.$$

$\because A + C = B + D$，$\therefore A - B = D - C$．又 $\alpha_1 - \beta_1 = \delta_1 - r_1$，$\therefore r_1 - r_3 = r_4 - r_2$，从而 $r_1 + r_2 = r_3 + r_4$.

于是，利用数学归纳法即可证得，命题对任何圆内接 n 边形成立．

方法二　剖分出的各个三角形的外接圆是共同的，这能否有助于问题的解决？

有一个卡诺定理：**三角形外心到三角形各边的有向距离之和，等于外接圆半径与内切圆半径之和．**它可能对本题有用．

当 O 在形内时，有　$OD + OE + OF = R(\cos A + \cos B + \cos C)$

$$= R\left(1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right) = R + r.$$