按教育部新课程标准编写

奥数典型题举一反三

DIANXINGTI

总主编 单墫

前国家数学奥赛教练组组长

国家数学奥林匹克代表队领队

✓激活思维

✓强化训练

✓拓展提高

八年级

長春出版社

奥数典型题
举一反三

八年级

長春出版社

图书在版编目（CIP）数据

奥数典型题举一反三．八年级/单墫主编．—长春：长春出版社，2006.7
ISBN 7－80664－227－7

Ⅰ．奥...　Ⅱ．单...　Ⅲ．数学—中学—教学参考资料　Ⅳ．G624．234

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 049799 号

责任编辑：杨爱萍
封面设计：郝　威
版式设计：王久慧

出版发行：长春出版社
发行部电话:0431－88561180
总 编 室 电 话:0431－88563443
读者服务部电话:0431－88561177
地　　址：吉林省长春市建设街 1377 号
邮　　编：130061
网　　址：www. cccbs. net
制　　版：吉林省久慧文化有限公司
印　　刷：吉林省吉育印业有限公司
经　　销：新华书店

开　　本：880×1230 毫米　32 开本
字　　数：400 千字
印　　张：14. 25 印张
版　　次：2006 年 7 月第 1 版
印　　次：2008 年 6 月印刷
定　　价：15. 00 元

编写说明

全国中学生数学奥林匹克竞赛是当前我国在青少年中开展素质教育的最高层次的学科知识竞赛。它注重能力的考核，内容广泛，命题新颖，思路开阔，对学生创新能力的培养和发散思维的训练具有极强的指导作用。近几年的全国各省市初中奥数试题，都强调了紧扣新课标要求，与初中教学内容相结合的命题特点。这些试题命题精巧，难度适中，接近中考数学中、高档试题的难度，命题特色也与中考大体相同。因此掌握奥数试题的解题思路和答题技巧，不但对参加奥数，学有余力的同学培养冲刺竞赛奖牌的能力很有帮助，就是对一般学生补充深化课本知识、开拓思维、冲刺中考也大有裨益。

为此我们编写了这套《奥数典型题举一反三》丛书，本书具有以下特点：

1. **权威性**

丛书总主编单墫为国家著名奥赛教练员，南京师范大学教授，博士生导师。曾任国家数学奥赛教练组组长，中国数学奥林匹克代表队领队。全书所有参加编写的人员都是国家、省级奥赛优秀教练员，有着丰富的奥赛指导经验和奥赛图书编写经验，它们指导的学生在国内外各种竞赛中都取得了优异的成绩。

2. **系统性**

本书不同于一般的竞赛试题汇编和单纯的方法讲解，而是将所学内容按知识点结构归纳整理，由浅入深、循序渐进。读者通过对一个个知识点的学习，由点及面即可系

统掌握所学内容。

3. **全面性**

(1) 能力培养全。本书对学生的思维能力、实验能力、观察检测能力、想象能力、自学能力等多方面能力进行培养训练，全面开发学生智力。(2) 题型收录全。本书类型齐全，覆盖面广，全书悉数收入数学奥赛的热点题、开放题、经典题、与STS联系题，以拓宽学生视野，开拓学生思路。(3) 解答提示全。本书不但对精选的典型例题有详尽的分析解答，对一般习题也有详尽的解答提示，便于学生自学、自测。

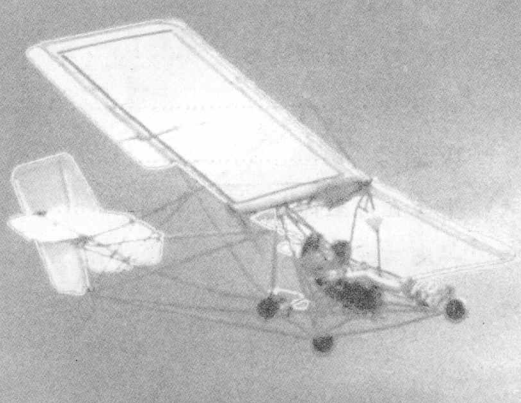
4. **实用性**

本书各章节编排与初中教学内容同步，编排科学、体例新颖。全书均设有 (1) 知识·规律·方法。归纳知识要点，总结一般规律，提炼基本方法。(2) 范例·解析·拓展。精选典型范例，深入分析讲解，纵向思维拓展。(3) 检测·反馈·提高。选编一定量的与本章内容密切相关、难度适中、有较好区分度的习题，检测知识掌握情况，提高解题能力。(4) 思路·点拨·详解。为师、生讲解练习之用，附详细解题过程，点拨思路、指导方法，每份试题实际上就是名师的辅导。书后所附的模拟试题是在认真研究了近几年全国数学奥赛试题的指导思想、命题特点、题型配置的基础上精心设计的，供学生在复习训练结束时自我检测。

限于我们的水平，书中疏漏之处恐难避免，恳请各位读者批评指正。

编　者

目录



第一章　实数

第一单元　无理数

知识·规律·方法

有理数和无理数统称实数. 实数有无穷多个,既没有最大的实数,也没有最小的实数.

全体实数和数轴上所有点一一对应. 实数 a 的绝对值即在数轴上表示数 a 的点到原点的距离. 在实数范围内,任一实数都可以开奇次方,但只有非负数才能开偶次方.

有理数都可以写成有限小数(包括整数)或循环小数的形式,都可以表示成分数$\frac{q}{p}$(p,q 是互质的整数,$p\neq0$);反过来,能写成$\frac{q}{p}$(p,q 是互质的整数,$p\neq0$)形式的数都是有理数. 无理数是无限不循环小数,不能表示成分数$\frac{q}{p}$(p,q 是互质的整数,$p\neq0$);无理数对四则运算不具有封闭性,即两个无理数的和、差、积、商不一定是无理数.

无理数的表现形式有:无限不循环小数,与 π 相关的数,开方开不尽得到的数,一些有规律的特殊数等. 如果对无理数的概念不清楚,解题方法使用不当,常会感到束手无策.

设 a 为有理数,b 为无理数,则(1)$a+b$,$a-b$ 是无理数;

(2)当 $a \neq 0$ 时,$a \cdot b$,$\dfrac{a}{b}$是无理数.

有理数和无理数统称为实数,即

$$\text{实数(小数)}\begin{cases}\text{有限小数}\\[2em] \text{无限小数}\begin{cases}\text{循环小数}\\ \text{不循环小数——无理数}\end{cases}\end{cases}$$

有理数

范例·解析·拓展

例 1　下列各命题中,其中是假命题的有　　　　(　　)

(1)两个无理数之和是无理数

(2)两个无理数之积是无理数

(3)一个有理数与一个无理数之和是无理数

(4)一个有理数与一个无理数之积是无理数

A. 4 个　　B. 3 个　　C. 2 个　　D. 1 个

解析　解决此类题目适合用特殊值法.

解　用特殊值$\sqrt{3}$代入(1)、(2)、(4)可知是假命题. 下面证明(3)是真命题.

假设一个有理数 a 与一个无理数 b 之和是有理数,记为 c,则 $a+b=c$,也就是 $b = c-a$.

$\because$ a,c 为有理数,$\therefore$ $c-a$ 为有理数,$\therefore$ b 一定为有理数.

这与题设 b 为无理数矛盾,$\therefore$ (3)是真命题. $\therefore$ 选择 B.

拓展　设 x,y 都是有理数,且满足方程$\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)x+\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{\pi}{2}\right)y-4-\pi=0$,求 $x-y$ 的值.

答案提示　将等式整理成有理数、无理数两部分,运用相关性质挖掘隐含的 x,y 的值.

即整理得$\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y-4\right)+\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y-1\right)\pi=0$,解得$\begin{cases}x=12\\y=-6\end{cases}$,故$x-y=18$.

例 2　设$\sqrt{M}$是无理数,a,b是有理数,$b\neq0$,试证:$a+b\sqrt{M}$是无理数.

解析　要证明一个实数为无限不循环小数是一件极难办到的事.由于有理数与无理数共同组成了实数集,且二者是矛盾的两个对立面,所以,判定一个实数是无理数时,常常采用反证法.

证明　设$a+b\sqrt{M}$是有理数,则$a+b\sqrt{M}=c$是有理数($b\neq0$).

$\because b\neq0$,$\therefore \sqrt{M}=\frac{c-a}{b}$.因为上式右边是有理数相减和相除($b\neq0$),其结果仍是有理数,则与左边$\sqrt{M}$是无理数矛盾.所以$a+b\sqrt{M}$不是有理数,即$a+b\sqrt{M}$是无理数.

拓展　试证明:$\sqrt{2}$是无理数.

答案提示　要证明一个数是无理数,常用反证法,也就是设这个数不是无理数,然后再推出矛盾的结论.

$\because 1<\sqrt{2}<2$,

$\therefore \sqrt{2}$不是整数.设$\sqrt{2}$是一个分数,则$\sqrt{2}=\frac{p}{q}$(p、q是互质的自然数,$q\neq0$).

$\therefore 2=\frac{p^2}{q^2}$,$2q^2=p^2$,

$\therefore p^2$是偶数,p也是偶数.令$p=2a$(a为自然数),则$2q^2=p^2=4a^2$,即$q^2=2a^2$,$\therefore q$也是偶数.$\therefore p$、q就有公约数2,这与p和q互质矛盾.

$\therefore \sqrt{2}$也不是分数,$\therefore \sqrt{2}$是无理数.

例 3　设a,b,c,d是有理数,$\sqrt{p}$是无理数,$a\neq0$,求等式$\frac{a+c\sqrt{p}}{a+b\sqrt{p}}=\frac{a+d\sqrt{p}}{a+c\sqrt{p}}$成立的条件.

解析　将等式整理成有理数、无理数两部分,两边对应相等.

如果等式成立,去分母,得$(a+c\sqrt{p})^2=(a+b\sqrt{p})(a+d\sqrt{p})$

展开整理得$2ac\sqrt{p}+c^2p=(ab+ad)\sqrt{p}+bdp$

$\because a,b,c,d$是有理数,$\sqrt{p}$是无理数

$\therefore \begin{cases}2ac=ab+ad\\ c^2=bd\end{cases}$　　即$\begin{cases}2c=b+d\\ c^2=bd\end{cases}$

于是可得$\left(\dfrac{b+d}{2}\right)^2=bd,b^2+2bd+d^2=4bd,b^2-2bd+d^2=0.$

$\therefore (b-d)^2=0,\therefore b=d.$

把$b=d$代入$2c=b+d$,得到$b=c=d$,反之,当$c=b=d$时,等式显然成立.

$\therefore$ 等式成立的条件是$c=b=d$.

拓展　已知在等式$\dfrac{ax+b}{cx+d}=s$中,a,b,c,d都是有理数,x是无理数,解答:

(1)当a,b,c,d满足什么条件时,s是有理数;

(2)当a,b,c,d满足什么条件时,s是无理数.

答案提示　(1)用只含有a,b,c,d的代数式表示;

(2)从以下基本性质思考:设q是有理数,r是无理数,那么①$q+r$是无理数;②若$q\neq 0$,则qr也是无理数;③r的倒数$\dfrac{1}{r}$也是无理数.解此题的关键之一还要运用分式的性质,对a,b,c,d的取值进行讨论.

例4　设a,b分别表示$\dfrac{1}{3-\sqrt{7}}$的整数部分与小数部分.求$a^2+(1+\sqrt{7})ab$的值.

解析　把$\dfrac{1}{3-\sqrt{7}}$分母有理化,确定整数部分,然后再确定小数部分.

解　$\because \dfrac{1}{3-\sqrt{7}}=\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}=2+\dfrac{\sqrt{7}-1}{2}$,又$2<\sqrt{7}<3$,

$\therefore \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{7}-1}{2} < 1.$

$\therefore a = 2, b = \frac{\sqrt{7}-1}{2}.$

$\therefore a^2 + (1+\sqrt{7})ab = 4 + (1+\sqrt{7})(\sqrt{7}-1) = 4 + 7 - 1 = 10.$

拓展 求不超过$(\sqrt{7}+\sqrt{5})^6$的值的最大整数.

答案提示 设$a=\sqrt{7}+\sqrt{5}, b=\sqrt{7}-\sqrt{5}$,于是

$a^6+b^6=(a^2+b^2)^3-2a^2b^2(a^2+b^2)=24^3-2\times4\times24=13632,$

即$(\sqrt{7}+\sqrt{5})^6+(\sqrt{7}-\sqrt{5})^6=13632, 0<(\sqrt{7}-\sqrt{5})^6<1,$

从而$(\sqrt{7}+\sqrt{5})^6$的整数部分为13631,即不超过$(\sqrt{7}+\sqrt{5})^6$的值的最大整数为13631.

例5 已知a、b是两个任意有理数,且$a<b$,求证:a与b之间存在着无穷多个有理数(即有理数集具有稠密性).

解析 构造具有某种性质的一个数,或一个式子,以达到解题和证明的目的,是经常运用的一种数学建模的思想方法.只要构造出符合条件的有理数,题目即可被证明.

证明 $\because a<b$,所以$2a<a+b<2b$,

$\therefore a<\frac{a+b}{2}<b.$

设$a_1=\frac{a+b}{2}$,a_1显然是有理数(因为a,b为有理数).因为$a_1<b$,所以,同理可证$a_1<\frac{a_1+b}{2}<b$.设$a_2=\frac{a_1+b}{2}$,a_2显然也是有理数.依此类推,设$a_{n+1}=\frac{a_n+b}{2}$,n为任意自然数,则有$a<a_1<a_2<\cdots<a_2<\cdots<b$,且$a_n$为有理数,所以在$a$和$b$之间存在无穷多个有理数.

拓展 设a,b都是正实数,且$a\neq\sqrt{2}b$,

(1)证明:$\sqrt{2}$必在$\frac{a}{b}$和$\frac{a+2b}{a+b}$之间;

(2)试说明这两个数中,哪一个更接近$\sqrt{2}$?

答案提示　要证明(1),可证这两数与$\sqrt{2}$之差的乘积为负;要证明(2)可比较这两数与$\sqrt{2}$之差的绝对值的大小;或者用赋值法,令 $a=b=1$,代入得$\frac{a}{b}=1$,$\frac{a+2b}{a+b}=1.5$,所以$\frac{a+2b}{a+b}$更接近$\sqrt{2}$.

例6　求证 $\sqrt{\frac{1}{\underbrace{11\cdots1}_{(n-1)个}\underbrace{22\cdots2}_{n个}5}}$是有理数.

解析　要证明所给的数能表示成$\frac{m}{n}$(m,n 为整数,$n\neq0$)的形式,关键是要证明$\underbrace{11\cdots1}_{(n-1)个}\underbrace{22\cdots2}_{n个}5$ 是完全平方数.

$$\begin{aligned}&\underbrace{11\cdots1}_{(n-1)个}\underbrace{22\cdots2}_{n个}5\\&=\underbrace{11\cdots1}_{(n-1)个}\times10^{n+1}+\underbrace{22\cdots2}_{n个}\times10+5\\&=\frac{10^{n-1}-1}{9}\times10^{n+1}+2\times\frac{10^{n}-1}{9}\times10+5\\&=\frac{1}{9}(10^{2n}-10^{n+1}+2\times10^{n+1}-20+45)\\&=\frac{1}{9}(10^{2n}+10\times10^{n}+25)=\frac{1}{9}(10^{n}+5)^{2}\end{aligned}$$

$$\therefore\ \sqrt{\frac{1}{\underbrace{11\cdots1}_{(n-1)个}\underbrace{22\cdots2}_{n个}5}}=\frac{3}{10^{n}+5}$$

因为 10^n+5 与 3 均为整数,所以$\sqrt{\frac{1}{\underbrace{11\cdots1}_{(n-1)个}\underbrace{22\cdots2}_{n个}5}}$是有理数.

拓展　设 a_n是 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$的个位数字,$n=1,2,3,\cdots$,求证:$0.a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots$是有理数.

答案提示　有理数的另一个定义是循环小数,即凡是有理数都是循环小数,反之循环小数必为有理数. 所以,要证 $0.a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots$是有理数,只要证它为循环小数. 因此本题我们从寻找它的循环节入手.

证明　计算 a_n的前若干个值,寻找规律:1,5,4,0,5,1,0,4,5,5,6,0,9,5,0,6,5,9,0,0,1,5,4,0,5,1,0,4,…发现:$a_{20}=0$,$a_{21}=a_1$,

$a_{22}=a_2, a_{23}=a_3, \cdots$，于是猜想：$a_{k+20}=a_k$，若此式成立，说明 $0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 是由 20 个数字组成循环节的循环小数，即

$$0.a_1a_2\cdots a_n\cdots=0.\dot{1}540510455609506590\dot{0}.$$

下面证明 $a_{k+20}=a_k$.

令 $f(n)=1^2+2^2+\cdots+n^2$，当 $f(n+20)-f(n)$ 是 10 的倍数时，表明 $f(n+20)$ 与 $f(n)$ 有相同的个位数，

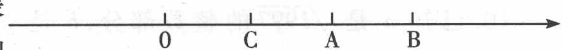
$$\begin{aligned}而 f(n+20)-f(n)&=(n+1)^2+(n+2)^2+\cdots+(n+20)^2\\&=10(2n^2+4^2\cdot n)+(1^2+2^2+\cdots+20^2).\end{aligned}$$

由前面计算的若干值可知：$1^2+2^2+\cdots+20^2$ 是 10 的倍数，故 $a_{k+20}=a_k$ 成立，所以 $0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 是一个有理数.

检测·反馈·应用

一、选择题

1. 如图，数轴上表示 1、$\sqrt{2}$ 的对应点分别为 A、B，点 B 关于点 A 的对称点为点 C，则点 C 所表示的数是（　　）



A. $\sqrt{2}-1$　　B. $1-\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{2}-2$　　D. $2-\sqrt{2}$

2. 已知 x 是实数，则 $\sqrt{x-\pi}+\sqrt{\pi-x}+\dfrac{x-1}{\pi}$ 的值是（　　）

A. $1-\dfrac{1}{\pi}$　　B. $1+\dfrac{1}{\pi}$　　C. $\dfrac{1}{\pi}-1$　　D. 无法确定

3. 已知 $a=2-\sqrt{5}, b=\sqrt{5}-2, c=5-2\sqrt{5}$，则 a,b,c 的大小关系是（　　）

A. $a<c<b$　　B. $b<a<c$　　C. $c<a<b$　　D. $a<b<c$

4. 实数 b 满足 $|b|<5$，并且有实数 a，使 $a<b$ 恒能成立，则 a 的取值范围（　　）

A. 小于或等于 5 的实数　　B. 小于 5 的实数

C. 小于或等于 -5 的实数　　D. 小于 -5 的实数

5. 化简$\sqrt{\frac{1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 4\cdot 6+\cdots+n\cdot 2n\cdot 3n}{1\cdot 5\cdot 10+2\cdot 10\cdot 20+\cdots+n\cdot 5n\cdot 10n}}$得 ( )

A. $\frac{\sqrt{3}}{5}$ B. $\frac{\sqrt{10}}{5}$ C. $\frac{\sqrt{30}}{10}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{10}$

6. $\sqrt{6-\sqrt{35}}+\sqrt{6+\sqrt{35}}$的值是 ( )

A. 1 B. $\sqrt{14}$ C. $\sqrt{7}+\sqrt{5}$ D. $\sqrt{7}-\sqrt{5}$

7. 已知正整数 a,m,n 满足 $\sqrt{a^2-4\sqrt{2}}=\sqrt{m}-\sqrt{n}$,则这样的 a,m,n 的取值 ( )

A. 有一组 B. 有两组 C. 多于一组 D. 多于两组

8. 代数式$\sqrt{x}+\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}$的最小值是 ( )

A. 0 B. $1+\sqrt{2}$ C. 1 D. 不存在

9. 设 a 是一个无理数,且 a,b 满足 $ab-a-b+1=0$,则 b 是一个 ( )

A. 小于 0 的有理数 B. 大于 0 的有理数

C. 小于 0 的无理数 D. 大于 0 的无理数

10. 已知 a 是 $\sqrt{1997}$ 的整数部分,b 是 $\sqrt{1991}$ 的小数部分,则 $\frac{\sqrt{a}}{(\sqrt{181}+4\sqrt{11})b}$的值是 ( )

A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{2}{11}$

二、填空题

11. 已知 x、y 是实数,$\sqrt{3x+4}+y^2-6y+9=0$,若 $axy-3x=y$,则 $a=$________.

12. 一个数的平方根是 a^2+b^2 和 $4a-6b+13$,那么这个数是________.

13. 一个自然数的算术平方根是 x,则它下一个自然数的算术平方根是________.

14. 方程 $\sqrt{|x+y|-5}+\sqrt{y+18}=0$ 的解是________.

15. 观察思考下列计算过程:$\because$ $11^2=121$,$\therefore$ $\sqrt{121}=11$;同样:

$\because\ 111^2=12321$，$\therefore\ \sqrt{12321}=111$；…由此猜想：$\sqrt{12345678987654321}$ $=$______.

16. 若 a,b 为有理数，且 $a+b\sqrt{2}=(1-\sqrt{2})^2$，则 a^b 的平方根是______.

17. 计算：$\sqrt{81\cdot 82\cdot 83\cdot 84+1}=$______.

18. 设 $a=\sqrt{1003}+\sqrt{997}$，$b=\sqrt{1001}+\sqrt{999}$，$c=2\sqrt{1001}$，则 a，b，c 的大小关系是______.

19. 观察下列分母有理化运算：

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}=-1+\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=-\sqrt{2}+\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}=-\sqrt{3}+\sqrt{4}$$

……

利用上面的规律计算：

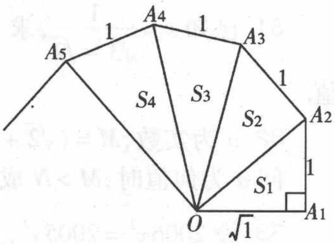
$$\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2004}+\sqrt{2005}}\right)(1+\sqrt{2005})=$$______.

20. 满足 $\sqrt{a-2\sqrt{6}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$ 的自然数 a,x,y 的值为______.

三、解答题

21. 若 $|x-y+3|$ 与 $|x+y-1999|$ 互为相反数，求 $\frac{x+2y}{x-y}$ 的值.

22. 细心观察右边图形，认真分析各式，然后解答问题. $(\sqrt{1})^2+1=2$，$S_1=\frac{\sqrt{1}}{2}$；$(\sqrt{2})^2+1=3$，$S_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$；$(\sqrt{3})^2+1=4$；$S_3=\frac{\sqrt{3}}{2}$；…



题 22

(1)请用含有 n(n 是正整数)的等式表示上述变化规律;

(2)推算出 OA_{10} 的长;

(3)求出 $S_1^2+S_2^2+S_3^2+\cdots+S_{10}^2$ 的值.

23. 已知$\triangle ABC$ 的三边 a,b,c 满足等式:$a^2+b+|\sqrt{c-1}-2|=6a+2\sqrt{b-3}-7$,试判断$\triangle ABC$ 的形状.

24. 证明循环小数 $2.61545454\cdots=2.61\dot{5}\dot{4}$ 是有理数.

25. 设 a,b 是正整数且满足 $\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$,求 a,b 的值.

26. 若 $a_1+b_1a=a_2+b_2a$(其中 a_1,a_2,b_1,b_2 为有理数,a 为无理数),则 $a_1=a_2,b_1=b_2$,反之,亦成立.

27. a、b 是两个不相等的有理数,试判断实数$\dfrac{a+\sqrt{3}}{b+\sqrt{3}}$是有理数还是无理数,并说明理由.

28. 已知数$\sqrt{14}$的小数部分是 b,求 $b^4+12b^3+37b^2+6b-20$ 的值.

29. 观察下面式子,根据你得到的规律回答:$\sqrt{11-2}=$________;$\sqrt{1111-22}=$________;$\sqrt{111111-222}=$________;

…… ……

求 $\sqrt{\underbrace{11\cdots1}_{2n\text{个}}-\underbrace{22\cdots2}_{n\text{个}}}$ 的值(要有过程).

30. 在正方形的棋盘格的平面上,能存在以格点为顶点的等边三角形吗?

31. 已知 $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$,求 $x^6-2\sqrt{2}x^5-x^4+x^3-2\sqrt{3}x^2+2x-\sqrt{2}$的值.

32. a 为实数,$M=(\sqrt{2}+\sqrt{3}-a)^2,N=4(a-1-\sqrt{2}-\sqrt{3})$.
问 a 为何值时,$M>N$ 成立?

33. 设 $2006x^2=2005y^2$,且$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1(x>0,y>0)$.

求证:$\sqrt{2006x+2005y}=\sqrt{2006}+\sqrt{2005}$.

34. 计算$\sqrt{1+2005^2+\dfrac{2005^2}{2006^2}}-\dfrac{1}{2006}$.