提分攻略
TIFENGONGLUE

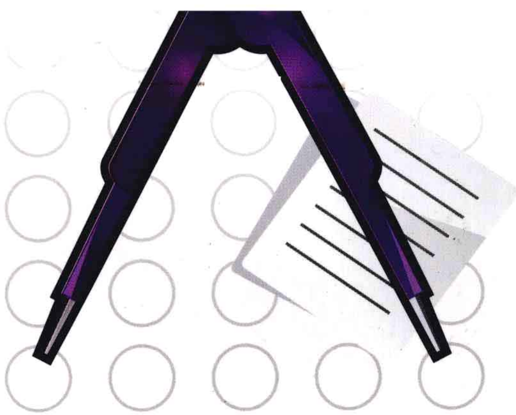
Shu Li Bao Jing Bian
数理报精编

疑难与规律详解

YINAN YU GUILÜ XIANGJIE

☆修订版☆

全国百位名师联合编写



八年级数学

主编　蔡晔

龍門書局
www.longmenbooks.com

提分攻略
T·I·F·E·N·G·O·N·G·L·U·E

Shu Li Bao Jing Bian
数理报精编

疑难与规律详解

AN YU GUILÜ XIANGJIE

修订版

八年级数学

主编　蔡　晔

编委　赵振红　杨传彬　李学镇　陈晓钟

《数理报》优秀作者编写

龍門書局

北京

图书在版编目(CIP)数据

提分攻略:疑难与规律详解. 八年级数学/蔡晔主编. 北京:龙门书局,2009
ISBN 978-7-5088-2085-9

Ⅰ. 提… Ⅱ. 蔡… Ⅲ. 数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ. G634.73

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 107148 号

责任编辑:潘恭华　黄　利/封面设计:艺和天下

龍　門　書　局 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码:100717
www.longmenbooks.com
北京一二零一工厂 印刷
科学出版社总发行　各地书店经销
*

2009 年 7 月第　一　版	开本:B5
2010 年 5 月修　订　版	印张:12 3/4
2010 年 5 月第五次印刷	字数:255 000

定　价:23.00 元

目录 CONTENTS

第一章　全等三角形

第一节　全等三角形　三角形全等的判定

知识疑难解读

给全等三角形找对应元素支招

（四川　侯国兴）

两个三角形全等时，互相重合的边叫对应边，互相重合的角叫对应角. 由此可知，全等三角形的对应元素是按“重合”这个标准来规定的. 但是，同学们所看到的图形一般都无法从直观上确定两条边或两个角是否重合，所以往往会张冠李戴. 那么，如何准确、迅速地找出两个全等三角形的对应边与对应角呢？现总结规律如下：

1. 若全等三角形中有对顶角，则对顶角是对应角

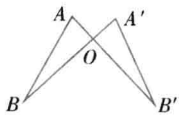


图 1-1

如图 1-1，$\triangle AOB \cong \triangle A'OB'$，则 $\angle AOB$ 与 $\angle A'OB'$ 是对应角.

2. 若全等三角形中有公共角，则公共角是对应角

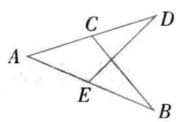


图 1-2

如图 1-2，$\triangle ABC \cong \triangle ADE$，则 $\angle BAC$ 与 $\angle DAE$ 是对应角.

3. 若已知两个全等三角形的对应顶点，则对应顶点所在位置的角是对应角

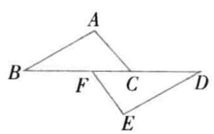


图 1-3

如图 1-3，$\triangle ABC \cong \triangle EDF$，已知 A 和 E，B 和 D 分别是对应顶点，则 $\angle ABC$ 和 $\angle EDF$、$\angle BAC$ 和 $\angle DEF$ 分别是对应角.

4. 若已知两个全等三角形中有最大（或最小）角，则一对最大（或最小）的角是对应角

5. 若全等三角形中有公共边，则公共边是对应边

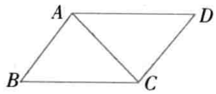


图 1-4

如图 1-4，$\triangle ABC \cong \triangle CDA$，则 AC 与 CA 是对应边.

6. 若已知两个全等三角形中有最大（或最小）边，则一对最大（或最小）的边是对应边

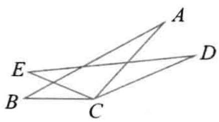


图 1-5

如图 1-5，$\triangle ABC \cong \triangle DEC$，则 AB 与 DE 是对应边.

7. 全等三角形的对应角所对的边是对应边

图 1-1 中的 AB 与 $A'B'$，图 1-2 中 BC 与 DE，图 1-3 中的 AC 与 EF 是对应边.

8. 全等三角形的对应边所对的角是对应角

图 1-4 中的 $\angle B$ 与 $\angle D$，图 1-5 中的 $\angle ACB$ 与 $\angle DCE$ 是对应角.

9. 全等三角形的两对应边（角）所夹的角（边）是对应角（边）

图 1-5 中，$\triangle ABC \cong \triangle DEC$，由方法 6

可知:AB与DE是对应边,BC与EC是对应边,则AB与BC的夹角$\angle B$及DE与EC的夹角$\angle E$是对应角.

10. 由全等三角形的记法确定对应边和对应角

若$\triangle ABC \cong \triangle DEF$,则对应边为:$AB \leftrightarrow DE$,$BC \leftrightarrow EF$,$AC \leftrightarrow DF$,对应角是:$\angle B \leftrightarrow \angle E$,$\angle C \leftrightarrow \angle F$,$\angle A \leftrightarrow \angle D$(请同学们仔细观察各字母在原三角形全等记法中的位置,就很容易发现其规律).

判定三角形全等的注意事项

(山东　康凤星)

三角形全等是几何的基础知识,判定三角形全等应注意以下几点:

1. 注意“SAS”公理中的角是指两条对应边的夹角

如图 1-6,$BC=CD$,$\angle B=\angle ACD$,试问$\triangle ABC$和$\triangle ACD$是否全等.有些同学说是全等并这样证明:

在$\triangle ABC$和$\triangle ACD$中,$\because AC=AC$(公共边),$\angle B=\angle ACD$(已知),$BC=CD$(已知),$\therefore \triangle ABC \cong \triangle ACD$.

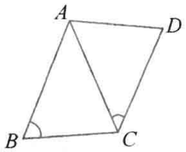


图 1-6

上述证明是错误的,因为$\angle B$与$\angle ACD$不是对应角,即$\angle B$不是AC和BC的夹角,故这两个三角形不一定全等.

2. 注意分清“ASA”和“AAS”判定条件

在证明中要注意是用到两角一夹边还是两角一对边,正确书写证明过程和填写理由,不要将“ASA”与“AAS”混淆.

3. 注意没有“SSA”判定条件

我们知道,两个三角形有两条边和一个角对应相等,它们不一定全等.如图 1-7,在$\triangle ABC$和$\triangle ABD$中,$AB=AB$,$AC=AD$,$\angle ABC=\angle ABD$,但这两个三角形显然不全等.

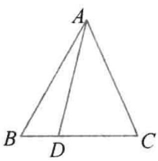


图 1-7

4. 注意没有“AAA”判定条件

我们可以利用“SSS”判定条件证明三角形全等,但是两个三角形三个角对应相等,它们不一定全等.如图 1-8,在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中,$\angle A=\angle A'$,$\angle B=\angle B'$,$\angle C=\angle C'$,但这两个三角形显然不全等.

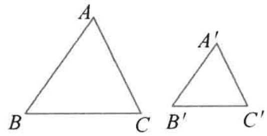


图 1-8

5. 掌握证明三角形全等的基本思路

证明三角形全等的基本思路是:(1)已知有两个角对应相等,证它们任意一边对应相等;(2)已知有两边对应相等,证它们的夹角对应相等或证第三边对应相等;(3)已知有一角和一邻边对应相等,证这个角的另一边对应相等或证另一角对应相等;(4)已知有一角和其对边对应相等,证另一角对应相等.在证题时,要认真审题,弄清已知条件,看已知条件符合基本思路的哪种情况,再寻求解题途径.

6. 注意寻找或构造全等三角形证题

在解题中,往往有两种情况:一种是已知图形中存在全等三角形,这时要善于把它们找出来,并根据已知条件证明它们全等;另一种情况是已知图形中不存在证题所需要的全等三角形,这时我们要注意添加辅助线,构造证题所需要的全等三角形.

思维规律解读

“三步曲”证全等

(山东　李其明)

全等三角形是初中数学的重要内容,它为解决线段和角的相等问题提供了重要工具,也为后面的学习奠定了基础.那么,怎样证明三角形全等呢?为了正确使用三角形全等的判定定理,根据题目中的条件,要谱好以下“三步曲”.

第一步:看图形

首先由题设和结论认真分析图形,准确、迅速地找出所证全等三角形的对应边、对应角,如果遇到复杂的图形,可从中分离出“基本图形”加以研究,全等三角形的基本图形大致有平移型、对称型和旋转型.

第二步:看条件

一般地,题设中总有一两个可以利用的条件,如果条件不够,则应先看是否隐含可用条件,如对顶角、公共边、公共角等,如果条件还不够,则应确定还要找出哪些条件.

第三步:创条件

如果条件和结论之间的联系不明显,直接证明难度较大,那么可考虑添加适当的辅助线,构造全等三角形.

例 1　如图 1-9 所示,$\triangle ABC$ 与 $\triangle BDE$ 都是等边三角形,$AB<BD$,若 $\triangle ABC$ 不动,将 $\triangle BDE$ 绕 B 点旋转,则旋转过程中,AE 与 CD 的大小关系为　(　　)

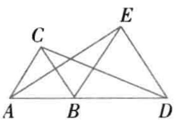


图 1-9

A. $AE=CD$　　B. $AE>CD$

C. $AE<CD$　　D. 无法确定

解析:因为 AE 是 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ADE$ 的边,CD 是 $\triangle CBD$ 和 $\triangle ACD$ 的边,显然,$\triangle ABE$ 和 $\triangle ACD$ 不全等,故考虑 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CBD$ 是否全等. $\triangle BDE$ 绕 B 点旋转过程中,始终有 $AB=BC$,$BE=BD$,欲证它们全等还缺一个条件,可考虑它们的夹角 $\angle ABE$ 和 $\angle CBD$ 是否相等,而这一点容易从已知条件中得到,问题便得到解决.

答案:A

例 2　如图 1-10,O 为码头,A、B 两个灯塔与码头的距离相等,OA、OB 为海岸线,一轮船从码头开出,计划沿 $\angle AOB$ 的平分线航行,航行途中,测得轮船与灯塔 A、B 的距离相等,此时轮船有没有偏离航线? 画出图形并说明你的理由.

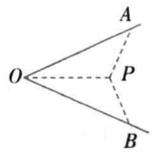


图 1-10

分析:看它是否偏离航线,就是看它航行过程中的路线是否平分 $\angle AOB$,这得构造三角形全等予以解决.

解答:此时轮船没有偏离航线.

假设轮船在 $\angle AOB$ 内的点 P 处,分别连接 OP、AP、BP,如图 1-10,则 $OA=OB$,$AP=BP$,且 $OP=OP$,

$\therefore \triangle AOP\cong\triangle BOP$(SSS).

$\therefore \angle AOP=\angle BOP$.

说明轮船在 $\angle AOB$ 的平分线上航行,没有偏离航线.

识别对应边、对应角的方法例谈

（江苏　李厚明）

一、直接从图形中识别对应边、对应角

1. 从定义出发,识别对应边、对应角

例 3　如图 1-11,$\triangle ABD\cong\triangle CDB$,找出图中的对应边、对应角.

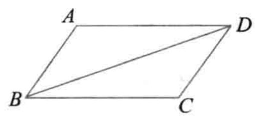


图 1-11

解析:由图中可以看出,$\triangle ABD$ 与 $\triangle CDB$ 重合时,AD 与 CB、AB 与 CD、BD 与 DB 重合,因而它们分别是对应边,而 $\angle A$ 与 $\angle C$、$\angle ABD$ 与 $\angle CDB$、$\angle ADB$ 与 $\angle CBD$ 重合,因而它们分别是对应角.

点评:点 B、D 处的角要用三个字母表示.

2. 从边、角的大小出发,识别对应边、对应角

例 4　如图 1-12,$\triangle EFG\cong\triangle NMH$,$\angle F$ 和 $\angle M$ 是对应角,在 $\triangle EFG$ 中,FG 是最长边,在 $\triangle NMH$ 中,MH 是最长边,$EF=2.1$ cm,$EH=1.1$ cm,$HN=3.3$ cm.

(1)写出其他对应边及对应角；

(2)求线段 NM 及线段 HG 的长度.

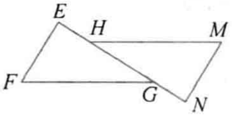


图 1-12

分析：(1)$\triangle EFG$ 和$\triangle NMH$ 中角的大小关系比较明显，据此我们可以找到两个全等三角形的对应角、对应边.

(2)求线段 NM 和 HG 的长度可以用对应边相等的知识求得.

解答：(1)$\because \triangle EFG \cong \triangle NMH$，最长边 FG 和 MH 是对应边，$\therefore$ 其他对应边是 EF 和 NM、EG 和 NH；对应角是$\angle E$ 和$\angle N$、$\angle EGF$ 和$\angle NHM$.

(2)由(1)可知 $NM=EF=2.1\ \text{cm}$，$GE=HN=3.3\ \text{cm}$，

$\therefore HG=GE-EH=3.3-1.1=2.2\ (\text{cm})$.

点评：三边或三角之间无明显大小关系的题中不能用此方法，图形不准也不能使用此方法.

二、从全等三角形的记法上识别对应边、对应角

例 5 如图 1-13，已知$\triangle ACB \cong \triangle A'CB'$，$\angle BCB'=30^\circ$，则$\angle ACA'$的度数为 ( )

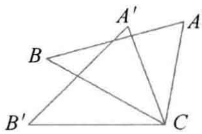


图 1-13

A. 20° B. 30° C. 35° D. 40°

解析：因为$\triangle ACB \cong \triangle A'CB'$，根据记法我们可以得出$\angle ACB$ 与$\angle A'CB'$为对应角，即$\angle ACB=\angle A'CB'$，$\therefore \angle ACA'=\angle BCB'=30^\circ$.

答案：B

三、已知对应边(角)识别对应角(边)

例 6 如图 1-14，$\triangle ACD \cong \triangle ACB$，$AD$ 和 AB，CD 和 CB 是对应边，找出图中的对应角和另一组对应边.

解析：显然，另一组对应边是 AC 和 AC. 根据对应边所对的角是对应角，因为 AD 和 AB 是对应边，且 AD 对$\angle DCA$，AB 对$\angle BCA$，所以得出$\angle DCA$ 与$\angle BCA$ 是对应角. 同理$\angle DAC$ 与$\angle BAC$、$\angle D$ 与$\angle B$ 也分别是对应角.

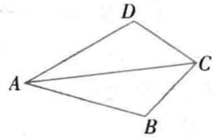


图 1-14

四、掌握全等变换是识别对应边(角)的捷径

例 7 一张矩形纸片沿对角线剪开，得到两张三角形纸片，再将这两张三角形纸片摆成如图 1-15 形式，使点 B、F、C、D 在同一条直线上.

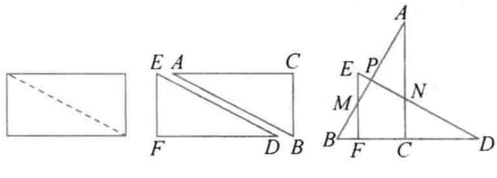


图 1-15

(1)求证：$AB \perp ED$；

(2)若 $PB=BC$，请找出图中与此条件有关的一对全等三角形，并给予证明.

解析：(1)$\triangle ABC$ 与$\triangle DEF$ 是一张矩形纸片沿对角线剪开而得到两张三角形，所以$\triangle ABC \cong \triangle DEF$，所以$\angle A=\angle D$，在$\triangle ANP$ 和$\triangle DNC$ 中，因为$\angle ANP=\angle DNC$，所以$\angle APN=\angle DCN$，又$\angle DCN=90^\circ$，所以$\angle APN=90^\circ$，故 $AB \perp ED$.

(2)答案不唯一，$\triangle ABC \cong \triangle DBP$；$\triangle ANP \cong \triangle DNC$. 以$\triangle ABC \cong \triangle DBP$ 为例证明如下：在$\triangle ABC$ 与$\triangle DBP$ 中，因为$\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle B$，$PB=BC$，所以$\triangle ABC \cong \triangle DBP$.

点评：本题利用全等变换的知识来快速识图. 全等变换包括平移、旋转、翻折，以及由这几个变换组合而成的变换. 利用这个方法找对应角、对应边可以事半功倍.

全等三角形性质的应用　（陕西　呈健）

一、通过全等三角形解决线段问题

例 8　已知$\triangle ABC\cong\triangle DEF$，$\triangle DEF$的周长为32 cm，$DE=9$ cm，$EF=12$ cm，求$\triangle ABC$各边的长.

分析：由$\triangle ABC\cong\triangle DEF$可知两三角形的三边对应相等，可以在另一三角形中找出三边的长，所以根据已知只需求出$\triangle DEF$的边DF的长度即可得到$\triangle ABC$三边的长.

解答：由题意知$DE+EF+DF=32$ cm.

$\because DE=9$ cm，$EF=12$ cm，

$\therefore DF=11$ cm.

$\because \triangle ABC\cong\triangle DEF$，

$\therefore AB=DE=9$ cm，

$BC=EF=12$ cm，

$AC=DF=11$ cm.

答：$\triangle ABC$三边的长分别为9 cm，12 cm，11 cm.

点评：证明线段相等的方法有：

(1)全等三角形的对应边相等；

(2)等角对等边(后面将学到)；

(3)线段中点的定义；

(4)借用第三边，使第三边等于所证的两线段，即$a=c$，$b=c$，则$a=b$.

二、通过全等三角形解决角度问题

例 9　已知$\triangle ABC\cong\triangle DEF$，且$\angle A=52°$，$\angle B=71°31'$，$DE=8.5$ cm，求$\angle F$的度数.

分析：由三角形的内角和可求出$\angle C$的度数，根据两全等三角形对应角相等，即可求出$\angle F$的度数.

解答：在$\triangle ABC$中，$\angle A+\angle B+\angle C=180°$(三角形的内角和等于180°)，

$\therefore \angle C=180°-(\angle A+\angle B)=180°-(52°+71°31')=56°29'$.

$\because \triangle ABC\cong\triangle DEF$，$\therefore \angle F=\angle C=56°29'$.

点评：证明角相等常用的方法：

(1) 对顶角相等；

(2) 同角(或等角)的余角(或补角)相等；

(3) 两直线平行，同位角相等，内错角相等；

(4) 角平分线的定义；

(5) 等式性质；

(6) 全等三角形的对应角相等.

三、通过全等三角形解决面积问题

例 10　如图1-16，四边形$ABCD$是梯形，$AD\parallel BC$. 若$DE\parallel AC$交BC的延长线于点E，且$\triangle ADC\cong\triangle ECD$，试问：梯形$ABCD$的面积和$\triangle BDE$的面积相等吗？谈谈你的看法.

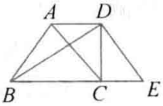


图 1-16

分析：此题可以根据面积的“割补法”来考虑梯形$ABCD$和$\triangle BDE$的面积关系.

解答：$\because \triangle ADC\cong\triangle ECD$，

$\therefore S_{\triangle ADC}=S_{\triangle ECD}$.

又$\because \triangle ABD$和$\triangle ADC$等底等高，

$\therefore S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ADC}$，$\therefore S_{\triangle ABD}=S_{\triangle EDC}$.

$\therefore S_{梯形ABCD}=S_{\triangle BDE}$.

点评：利用全等三角形的面积相等及割补法是一种非常简便的方法.

三角形全等的实际应用　（湖北　孙红强）

例 11　如图1-17，一块三角形模具的阴影部分已破损，只要从残留的模具片中度量出哪些边、角，就可以不带残留的模具片到店铺加工一块与原来的模具ABC的形状和大小完全相同的模具$A'B'C'$？请简要说明理由.

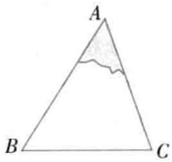


图 1-17

分析：到店铺加工一块与原来的模具ABC的形状和大小完全相同的模具$A'B'C'$，说明$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

解答：只要度量残留的三角形模具片的$\angle B$、$\angle C$的度数和边BC的长即可.

理由：两角及其夹边对应相等的两个三角形全等.

例12 如图1-18，A、B两点被池塘隔开，为测量A、B两点的距离，可由三角形全等的知识来设计测量方案. 请在图1-18中画出图形，并叙述你的测量方案.

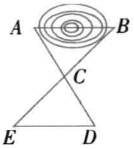


图1-18

解析：利用全等三角形来测量A、B两点的距离，其关键是建立三角形全等的数学模型. 如图1-18，先在地面上取一个可以直接到达A点和B点的点C，连接AC并延长到D，使$CD=AC$；连接BC并延长到E，使$CE=BC$，连接DE，那么量出DE的长，就知道A、B两点间的距离.

点评：利用全等三角形测距离，体现了数学知识在现实生活中的应用，本题用到的测量工具比较简单，易于操作.

例13 “三月三，放风筝”，如图1-19是小明制作的风筝，他根据$DE=DF$，$EH=FH$，不用度量，就知道$\angle DEH=\angle DFH$，请你用所学知识给予证明.

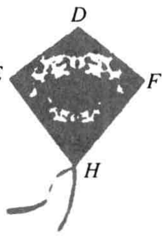


图1-19

分析：连接DH，把四边形分成两个三角形，由SSS可证明这两个三角形全等，从而$\angle DEH=\angle DFH$.

证明：连接DH，在$\triangle DEH$和$\triangle DFH$中，

$$\begin{cases} DE=DF, \\ EH=FH, \\ DH=DH, \end{cases}$$

$\therefore \triangle DEH \cong \triangle DFH$(SSS)，

$\therefore \angle DEH=\angle DFH$.

点评：将实际问题转化为数学问题，建立数学模型——全等三角形来解决问题是近几年中考命题的重点，平时应多训练，提高建模能力.

全等图形的分割与拼凑 （四川 刘顿）

全等图形和其他几何图形一样，也很优美. 在生活中，我们可以利用全等图形设计出许多美丽的图案，如图1-20，奥运会的会徽就是利用五个全等的圆形两两相联组成的五环图案.

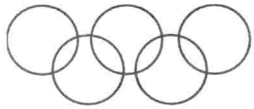


图1-20

由此，假如有人让你按全等图形的要求设计图案，你会不会把已知图形分割成几个全等的部分，从而使你的设计变得简单呢？

例14 如图1-21所示，请你把给定的梯形分成四个全等的四边形.

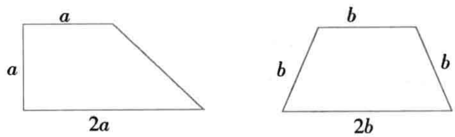


图1-21

解析：已知图中标有一定的大小，要把给定的梯形分成四个全等的四边形得按照图中规定的大小进行分割，于是可以得到如图1-22所示的分割方法.

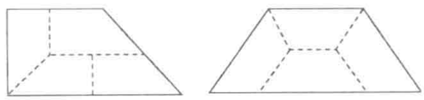


图1-22

点评：这是一道有一定难度的全等图形的分割问题，不过求解时只要能充分利用全等图形的知识，结合图形的特点，发挥想像力，问题就能简捷获解.

例15　将图 1-23 所示的小“L”形的纸片拼成一个大“L”形的图案，有多少种不同的拼图方案？试画出其中最简单的拼图方案，此时需要几张小“L”形的纸片？

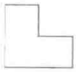


图 1-23

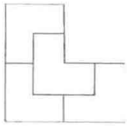


图 1-24

解析：依据题意，本题的拼图方案有无数种，如图 1-24 所示的是其中最简单的一种，此时需要 4 张小“L”形纸片．

点评：拼图只要能拼出符合题意的图案即可．

“三角形全等的条件”考点例析

（山东　李殿起）

全等三角形是几何论证的工具，在以后的学习中经常用到．利用全等三角形可以解决线段相等、角相等以及直线平行等问题，也经常出现在各地的试题中．

考点一：利用“SSS”证明三角形全等

例16　如图 1-25，点 E 在 AB 上，$AC=AD$，请你添加一个条件，使图中存在全等三角形，并给予证明．

所添条件为______，

你得到一对全等三角形是__________≌______．

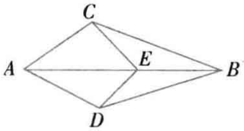


图 1-25

解析：充分利用 $AE=AE$，$AB=AB$，结合所给条件 $AC=AD$，只要再选择 $CE=DE$、$\angle CAB=\angle DAB$、$BC=BD$ 等条件中的一个，就可以得到 $\triangle ACE\cong\triangle ADE$ 或 $\triangle ACB\cong\triangle ADB$．利用“SSS”，由 $CE=DE$，$AC=AD$，$AE=AE$，即可证明 $\triangle ACE\cong\triangle ADE$．由 $AC=AD$，$AB=AB$，$BC=BD$ 可得 $\triangle ACB\cong\triangle ADB$．

点评：本题是一道条件、结论都开放的题目，要充分利用已知条件，善于添加利于解决问题的条件．这类题目在中考中经常出现，应引起同学们的重视．

考点二：利用“SAS”证明三角形全等

例17　已知：如图 1-26，$AB\parallel ED$，点 F、C 在 AD 上，$AB=DE$，$AF=DC$．求证：$BC=EF$．

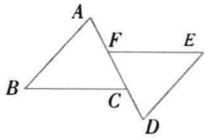


图 1-26

证明：在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中，由 $AB=DE$，$\angle A=\angle D$，$AF+FC=FC+CD$，即 $AC=DF$．可得 $\triangle ABC\cong\triangle DEF$，则 $BC=EF$．

点评：解这类题目思路比较直接，但体现了三角形全等是证明线段相等的基本方法．

考点三：利用“ASA”或“AAS”判定三角形全等

例18　如图 1-27，已知 $\angle 1=\angle 2$，$AC=AD$，增加下列条件：① $AB=AE$；② $BC=ED$；③ $\angle C=\angle D$；④ $\angle B=\angle E$．其中，能使 $\triangle ABC\cong\triangle AED$ 的条件有　　（　　）

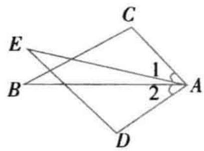


图 1-27

A. 4 个　　B. 3 个

C. 2 个　　D. 1 个

解析：已知 $\angle 1=\angle 2$，$AC=AD$，也就是已知 $\triangle ABC$ 和 $\triangle AED$ 的一个角和一条边对应相等，若增加③或④，则可以用“ASA”或“AAS”来判定，若增加一条边对应相等，如增加①，就可以用“SAS”来判定．因此，能使 $\triangle ABC\cong\triangle AED$ 的条件有 3 个．

答案：B

点评：本题是开放性试题，增加的条件已经给出，要求找出能够使三角形全等的所有条件. 解这类问题应熟练掌握三角形全等的判定方法.

考点四：利用“HL”证明直角三角形全等

例19 如图 1-28，在 $\triangle ABC$ 中，D 是 BC 的中点，$DE\perp AB$，$DF\perp AC$，垂足分别是 E、F，$BE=CF$.

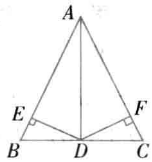


图 1-28

(1)图中有几对全等的三角形？请一一列出；

(2)选择一对你认为全等的三角形进行证明.

分析：(1) 利用已学知识可得，$\triangle BDE\cong\triangle CDF$，$\triangle AED\cong\triangle AFD$，$\triangle ABD\cong\triangle ACD$；

(2)不唯一，可选择任意一对全等三角形来证.

解答：(1)图中有三对全等三角形，分别是 $\triangle BDE\cong\triangle CDF$，$\triangle AED\cong\triangle AFD$，$\triangle ABD\cong\triangle ACD$；

(2)选择 $\triangle BDE\cong\triangle CDF$.

证明：$\because DE\perp AB$，$DF\perp AC$，

$\therefore \angle BED=\angle CFD=90°$.

$\because D$ 是 BC 的中点，$\therefore BD=CD$.

又 $\because BE=CF$，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle BDE\cong\mathrm{Rt}\triangle CDF$(HL).

点评：在解题时，也不能一遇到直角三角形就去寻找 HL 证明问题，而是要根据已知条件和图形的特征，灵活选用判定方法.

例20 如图 1-29 所示，有两个长度相等的滑梯(即 $BC=EF$)，左边滑梯的高度 AC 与右边滑梯的水平方向的长度 DF 相等，则 $\angle ABC+\angle DFE=$ ________.

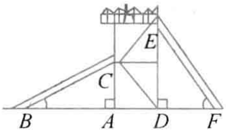


图 1-29

分析：由“HL”可得两个直角三角形全等，把要求的两角之和转化为一个直角三角形的两锐角之和.

解答：由现实意义及图形提示可知 $CA\perp BF$，$ED\perp BF$，即 $\angle BAC=\angle EDF=90°$. 又 $\because BC=EF$，$AC=DF$，$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ABC\cong\mathrm{Rt}\triangle DEF$，$\therefore \angle DFE=\angle ACB$. $\because \angle ACB+\angle ABC=90°$，$\therefore \angle ABC+\angle DFE=90°$.

点评：解决本题的关键是通过证明 $\mathrm{Rt}\triangle ABC\cong\mathrm{Rt}\triangle DEF$，将两角之和转化为一个直角三角形的两锐角之和. 由此，我们也知道三角形全等是解决问题的有利工具.

考点五：三角形全等的阅读理解题

例21 我们知道，两边及其中一边的对角分别对应相等的两个三角形不一定全等，那么在什么情况下，它们会全等？

(1)阅读与证明：

对于这两个三角形均为直角三角形，显然它们全等；

对于这两个三角形均为钝角三角形，可证它们全等；

对于这两个三角形均为锐角三角形，它们也全等，可证明如下：

已知：$\triangle ABC$、$\triangle A_1B_1C_1$ 均为锐角三角形，$AB=A_1B_1$，$BC=B_1C_1$，$\angle C=\angle C_1$，

求证：$\triangle ABC\cong\triangle A_1B_1C_1$(请你将下列证明过程补充完整).

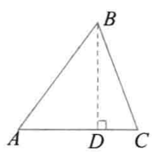


图 1-30

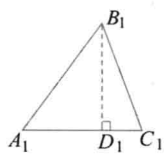


图 1-31

证明：如图 1-30，图 1-31，分别过点 B、B_1 作 $BD\perp AC$ 于 D，$B_1D_1\perp A_1C_1$ 于 D_1，则 $\angle BDC=\angle B_1D_1C_1=90°$. ∵ $BC=B_1C_1$，$\angle C=\angle C_1$，

∴ $\triangle BCD\cong\triangle B_1C_1D_1$，$BD=B_1D_1$.

(2)归纳与叙述：由(1)可得到一个正确结论，请你写出这个结论.

解析：(1)又∵ $AB=A_1B_1$

∴ $\mathrm{Rt}\triangle BDA\cong\mathrm{Rt}\triangle B_1D_1A_1$

∴ $AD=A_1D_1$

∴ $AD+DC=A_1D_1+D_1C_1$

∴ $AC=A_1C_1$

∴ $\triangle ABC\cong\triangle A_1B_1C_1$(SSS)

(2)若 $\triangle ABC$、$\triangle A_1B_1C_1$ 均为锐角三角形或均为直角三角形或均为钝角三角形，且 $AB=A_1B_1$，$BC=B_1C_1$，$\angle C=\angle C_1$，则 $\triangle ABC\cong\triangle A_1B_1C_1$.

点评：本题是阅读理解型试题，通过本题进一步加深对三角形全等的理解，切记一般情况下两边及其中一边的对角分别对应相等的两个三角形不一定全等.

思维误区破解

三角形全等易错点扫描

（山东 王道魁 江苏 胡怀志）

误区一：混淆全等三角形的对应元素

例 1 如图 1-32 所示，$\triangle ABD\cong\triangle CAE$，$\angle BAD=\angle ACE$，$\angle D=\angle E$，请写出全等三角形的其他对应元素.

错解：对应角为 $\angle B$ 和 $\angle CAE$，对应边为 BD 和 CE，AD 和 AE，AB 和 AC.

剖析：全等三角形的对应角所对的边是对应边；对应边所对的角是对应角.

正解： 对应角是 $\angle B$ 和 $\angle CAE$；对应边是 BD 与 AE，AD 与 CE，AB 与 CA.

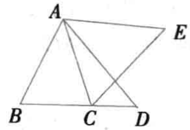


图 1-32

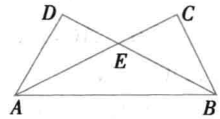


图 1-33

误区二：误用三个角对应相等证明全等

例 2 如图 1-33，$\angle CAB=\angle DBA$，$\angle C=\angle D$，E 为 AC 和 BD 的交点，$\triangle ADB$ 与 $\triangle BCA$ 全等吗？说明理由.

错解：$\triangle ADB\cong\triangle BCA$. 理由如下：

因为 $\angle C=\angle D$，$\angle CAB=\angle DBA$，则 $\angle CBA=\angle DAB$，所以 $\triangle BCA\cong\triangle ADB$ (AAA).

剖析：两个三角形全等是对的，但说明的理由不正确. 三个角对应相等不能作为三角形全等的判定方法. 因为三个角对应相等的两个三角形不一定全等.

正解：$\triangle ADB\cong\triangle BCA$. 理由如下：

∵ $\angle DBA=\angle CAB$，$\angle D=\angle C$，$AB=BA$(公共边)，

∴ $\triangle ADB\cong\triangle BCA$(AAS).

误区三：误用两边及一边的对角对应相等证明全等

例 3 如图 1-34，已知 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，D、E 分别是 AB、AC 的中点，且 $CD=BE$，$\triangle ADC$ 与 $\triangle AEB$ 全等吗？说明理由.

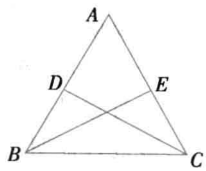


图 1-34

错解：$\triangle ADC\cong\triangle AEB$. 理由如下：

∵ $AB=AC$，$BE=CD$，$\angle BAE=\angle CAD$，

∴ $\triangle AEB\cong\triangle ADC$(SSA).

剖析：上述错解错在把 SSA 作为三角形全等的判定方法，实际上，SSA 不能作为三角形全等的判定方法. 因为两边及一边的对角对应相等的两个三角形不一定全等.

正解：$\triangle ADC\cong\triangle AEB$. 理由如下：

$\because AB=AC$，D、E 分别为 AB、AC 的中点，$\therefore AD=AE$.

又 $\because AC=AB$，$CD=BE$，$\therefore \triangle ADC\cong\triangle AEB$(SSS).

误区四：直观代替推理

例 4 已知，如图 1-35，$\triangle ABD$ 和 $\triangle AEC$ 都是等边三角形. 求证：$BE=DC$.

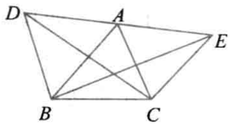


图 1-35

错解：$\because \triangle ABD$ 和 $\triangle AEC$ 都是等边三角形，

$\therefore \angle BAD=60^\circ=\angle CAE$，$\angle CAD=120^\circ=\angle EAB$.

又 $\because AB=AD$，$AE=AC$.

$\therefore \triangle ABE\cong\triangle ADC$. $\therefore BE=DC$.

剖析：主观臆断，错误的原因是仅靠观察就认为 D、A、E 三点共线，实际上由于 $\angle BAC$ 的大小不确定，所以 D、A、E 三点不一定共线，而应该寻找夹角相等.

正解：$\because \triangle ABD$ 和 $\triangle AEC$ 都是等边三角形，

$\therefore \angle BAD=60^\circ=\angle CAE$，

$\therefore \angle BAD+\angle BAC=\angle CAE+\angle BAC$.

即 $\angle DAC=\angle BAE$，

又 $\because AB=AD$，$AE=AC$，

$\therefore \triangle ABE\cong\triangle ADC$(SAS)

$\therefore BE=DC$.

挑战疑难

1. 如图 1-36，$AB\parallel CD$，$AD\parallel BC$，E、F 分别是 BA、DC 延长线上的点，且 $AE=CF$，EF 交 AD 于点 G，交 BC 于点 H.

(1)图中的全等三角形有________对，它们分别是________(不添加任何辅助线)；

(2)请在(1)中选出一对你认为全等的三角形进行证明.

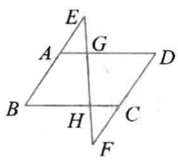


图 1-36

2. 如图 1-37，给出下列论断：①$DE=CE$，②$\angle 1=\angle 2$，③$\angle 3=\angle 4$，请你将其中的两个作为条件，另一个作为结论，构成一个真命题，并加以证明.

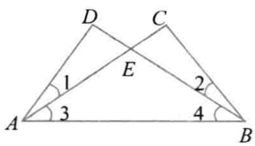


图 1-37

3. 如图 1-38，在正方形 $ABCD$ 中，E 是 AD 的中点，F 是 BA 延长线上一点，$AF=\frac{1}{2}AB$.

(1)求证：$\triangle ABE\cong\triangle ADF$；

(2)在图 1-38 中，可以通过平移、翻折、旋转中哪一种方法，使 $\triangle ABE$ 变到 $\triangle ADF$ 的位置？

(3)线段 BE 与 DF 有什么关系？请证明你的结论.

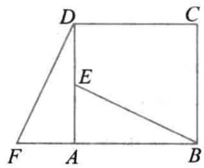


图 1-38

4. 复习"全等三角形"的知识时，老师布置了一道作业题："如图 1-39，已知在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，P 是 $\triangle ABC$ 内部任意一点，将 AP 绕 A 顺时针旋转至 AQ，使 $\angle QAP=\angle BAC$，连接 BQ、CP，则 $BQ=CP$."小亮是个爱动脑筋的同学，他通过对图 1-39 的分析，证明了 $\triangle ABQ\cong\triangle ACP$，从而证得 $BQ=CP$ 之后，将点 P 移到等腰三角形 ABC 之外，