普通高等教育"十二五"电子信息类规划教材

数字信号处理

尹为民　欧阳华　钱美　编

免费
电子课件

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育“十二五”电子信息类规划教材

数字信号处理

尹为民　欧阳华　钱　美　编

机　械　工　业　出　版　社

本书讨论数字信号处理的基本理论、基本算法和基本实现方法。全书共7章，包括离散时间信号与系统的基础理论，离散傅里叶变换及其快速算法，数字滤波器的结构及其设计方法，数字信号处理中的有限字长效应等内容。

本书内容丰富，强调基本理论、基本概念和基本方法，注重内容的时代性和前沿性，将计算机仿真工具MATLAB与教材内容紧密配合，并增设了相应的例题与习题，充分体现了经典与现代相结合、基本理论与工程技术相结合、解析方法与计算机辅助分析相结合的特点。全书条理清楚，深入浅出，有实例，便于自学。

本书适于高等院校自动化、电子信息、通信及计算机等专业本科生学习阅读，也可供从事数字信号处理工作的工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

数字信号处理/尹为民等编. —北京：机械工业出版社，2011.3
普通高等教育“十二五”电子信息类规划教材
ISBN 978-7-111-33204-6

Ⅰ.①数… Ⅱ.①尹… Ⅲ.①数字信号－信号处理－高等学校－教材
Ⅳ.①TN911.72

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第012754号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）
策划编辑：于苏华 责任编辑：于苏华
版式设计：霍永明 责任校对：樊钟英
封面设计：张 静 责任印制：乔 宇
三河市国英印务有限公司印刷
2011年5月第1版第1次印刷
184mm×260mm·20.25印张·498千字
标准书号：ISBN 978-7-111-33204-6
定价：39.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
社服务中心：（010）88361066	门户网：http://www.cmpbook.com
销售一部：（010）68326294	教材网：http://www.cmpedu.com
销售二部：（010）88379649	
读者购书热线：（010）88379203	**封面无防伪标均为盗版**

前 言

本书是编者结合多年来从事有关数字信号处理科研和教学工作实践，在参考国内外相关优秀教材的基础上，为自动化、电子信息通信及计算机等专业本科生编写的“数字信号处理”课程教材。

本书共7章，第1章介绍了离散时间信号与系统的概念、描述和分类方法，并讨论了线性移不变（LSI）系统的特性，简明介绍了LSI离散时间系统的时域描述方法和分析方法。第2章讨论了信号的四大变换：连续时间信号的傅里叶变换（CTFT）和拉普拉斯变换（LT）；离散时间信号的傅里叶变换（DTFT）和z变换（ZT）。同一信号的频域变换和变换域变换的关系可以认为是频域到复频域的推广，连续与离散之间的关系则通过抽样定理来联系。这四类变换是信号的频域分析和系统的变换域分析的基础。第3章重点讨论了有限长离散傅里叶变换（DFT）的定义及性质、抽样定理，以及利用DFT计算连续信号频谱的过程。本章涉及离散时间信号分析与处理的重要的理论基础，这些理论将贯穿本书的其余各章节。第4章介绍了快速傅里叶变换（FFT）算法，包括经典的针对 $N=2^L$ 点的Cooley-Tukey基-2FFT按频率抽取（DIF）和按时间抽取（DIT）算法和复乘次数量少的分裂基FFT算法，N 为复合数的FFT算法，以及用于计算窄带频谱的Chirp-z变换算法，这些算法是信号处理中对信号做谱分析的重要内容。第5章讨论了离散时间系统分析，包括频域响应和系统函数，全通系统与最小相位系统，线性相位系统。第6章主要讨论了数字滤波器的结构和各种设计方法。第7章分析了使用有限字长时对数字信号处理系统性能的影响。

针对未开设“信号与系统”课程的学科专业，本教材的参考学时为50学时。数字信号处理是技术性较强的课程，本书配备了大量基于MATLAB的例题和习题，以便充分利用MATLAB仿真软件加深对原理与方法的理解，建议增设10学时的实验。

本书的第1、2、5章由欧阳华编写，第3、4章由钱美编写，第6、7章由尹为民编写，全书由尹为民负责统稿。吴正国教授对原稿做了详细的审阅，并提出了许多改进意见，在此表示感谢。

由于作者水平有限，书中难免有欠妥之处，望读者不吝赐教。

编 者

目　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第1章　离散时间信号与系统

信号通常指携带信息的载体。信息是指新的消息，新的知识，是人类对外界事物的感知。信号是信息的物理表现形式，是信息的载体；信息是信号的具体内容。信号可以用随时间（空间、频率或其他物理量）变化的量（电、光、文字、符号、图像、数据等）来描述。在数学上，信号可以表示为一个或多个独立变量的函数。如果仅有一个独立变量，则称为一维信号；如果有两个以上的独立变量，则称为多维信号。本书仅研究一维信号处理的理论与技术。在信号处理中，信号与函数是通用的。例如，一个语音信号数学上可以表示为时间的函数，一幅照片可以表示为两个空间变量的亮度函数。不同的物理信号，如温度、压力、流量等，在实际应用中都要把它们转变成电信号，这一转变可以通过不同的传感器来实现。因此，可以将信号的数学表达式中的独立变量看做时间，将信号视为随时间变化的电信号（电压或电流）。

在信号的数学表达式中，独立变量可以是连续的，也可以是离散的。在连续时间范围内有定义的信号称为连续时间信号。仅在一些离散的瞬时才有定义的信号称为离散时间信号，离散时间信号可以表示成数值的序列。上述信号的分类是从定义域来界定的。信号的独立变量的取值可以是连续的或离散的，同样，信号的幅度（函数值）也可以是连续或离散的。时间和幅值均为连续的信号称为模拟信号，时间和幅值均为离散的信号称为数字信号。在实际应用中，连续信号与模拟信号两个词常常不予区分，离散信号与数字信号两个词也常互相通用。

系统是指由若干个相互关联、相互作用的事物按照一定规律组合而成的具有某种功能的整体。信号的概念与系统的概念是紧密相连的。信号在系统中按一定规律运动、变化，系统在输入信号的驱动下对它进行“加工”、“处理”并发送输出信号，如图1-0-1所示。输入信号常称为激励，输出信号常称为响应。信号处理系统是处理信号的物理设备，即对信号加以变换从信号中提取信息的各种设备。

图1-0-1　信号与系统

信号处理系统也可以像信号一样来分类。系统的激励和响应都是连续时间信号的系统称为连续时间系统；系统的激励和响应都是离散时间信号的系统称为离散时间系统。若系统的激励和响应一个是连续时间信号，一个是离散时间信号，则称为混合系统。

1.1　离散时间信号

仅在一些离散的瞬间才有定义的信号称为离散时间信号，简称离散信号。这里“离散”是指信号的定义域——时间是离散的，它只在离散时刻 t_n（$n=0，\pm1，\pm2，\cdots$）有定义，在其余的时间不予定义。时刻 t_n 与 t_{n+1} 之间的间隔 $T_n=t_{n+1}-t_n$ 可以是常数，也可以随 n 而变化。本书只讨论 T_n 等于常数的情况。若令相邻时刻 t_{n+1} 与 t_n 之间的间隔为常数 T，则离散

信号只在均匀离散时刻 $t = \cdots, -2T, -T, 0, T, 2T, \cdots$ 时有定义，它可以表示成 $x(nT)$。为了简便，不妨把 $x(nT)$ 简记为 $x(n)$。这样离散信号在数学上可以表示为数的序列，故离散信号也常称为序列。

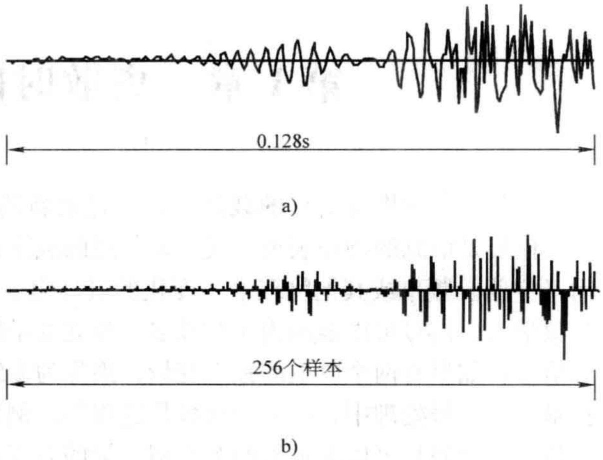

图 1-1-1 模拟信号的离散化

a）一段连续时间语音信号

b）用 $T=0.5\mathrm{ms}$ 从图 a 获得的样本序列

离散信号常可以对模拟信号（如语音）进行等间隔采样而得到，如图1-1-1所示。例如，对于一个连续时间信号 $x_a(t)$，以每秒 $f_s = 1/T$ 个采样的速率抽样而产生离散信号，它与 $x_a(t)$ 的关系如下：

$$x(n) = x_a(nT) \tag{1-1-1}$$

然而，并不是所有的离散信号都是由模拟信号抽样获得的。一些信号可以认为是自然产生的离散信号，如每日股票市场价格、人口统计数和仓库存量等，例如道琼斯工业指数，如图 1-1-2 所示。还有一些离散信号是由计算机仿真产生的。

序列 $x(n)$ 可以用图形表示，如图 1-1-3 所示。若序列 $x(n)$ 随 n 的变化规律可以用公式表示，则其数学表达式可以写成闭合形式，例如

$$x(n) = A\cos(\omega_0 n + \phi) \tag{1-1-2}$$

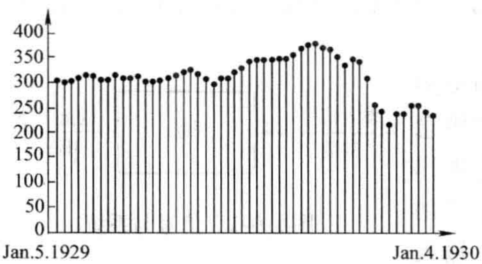

图 1-1-2 道琼斯工业指数

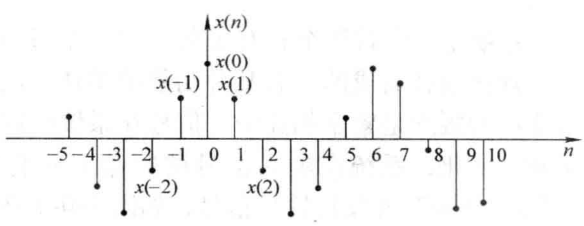

图 1-1-3 序列的图形表示

如果 $x(n)$ 是通过观测得到的一组离散数据，也可以逐个列出序列 $x(n)$ 的值，用集合的形式给出，例如

$$x(n) = \{-0.42 \quad 0.54 \quad \underset{\uparrow}{1.00} \quad 0.54 \quad -0.42 \quad -0.99\} \tag{1-1-3}$$

序列 $x(n)$ 中，数字 1.00 下面的箭头↑表示与 $n=0$ 对应，左右两侧依次是 n 取负整数和 n 取正整数时相对应的 $x(n)$ 的值。通常把对应某序号 m 的序列值称为第 m 个样本点的样本值，如上述用集合表示的序列 $x(n)$ 的第 3 个样本点的样本值为 -0.99。

1.1.1 序列的基本运算

1. 加法和乘法

信号 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 之和是指同一样本点（序号）的样本值对应相加所构成的“和信

号”。即

$$x(n) = x_1(n) + x_2(n) \tag{1-1-4}$$

调音台是信号相加的一个实际例子，它将音乐和语言混合到一起。

信号 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 之积是指同一样本点（序号）的样本值对应相乘所构成的“积信号”。即

$$x(n) = x_1(n)x_2(n) \tag{1-1-5}$$

收音机的调幅信号是信号相乘的一个实际例子，它将音频信号加载到被称为载波的正弦信号上。

加法和乘法都是“点对点”的运算。

【例 1-1-1】　已知序列

$$x_1(n) = \begin{cases} 2^n, & n < 0 \\ n+1, & n \geqslant 0 \end{cases}$$

$$x_2(n) = \begin{cases} 0, & n < -2 \\ 2^{-n}, & n \geqslant -2 \end{cases}$$

求 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 之和，$x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 之积。

【解】　$x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 之和为

$$x_1(n) + x_2(n) = \begin{cases} 2^n, & n < -2 \\ 2^n + 2^{-n}, & n = -2, -1 \\ n+1+2^{-n}, & n \geqslant 0 \end{cases}$$

$x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 之积为

$$x_1(n)x_2(n) = \begin{cases} 2^n \times 0 \\ 2^n \times 2^{-n} \\ (n+1) \times 2^{-n} \end{cases} = \begin{cases} 0, & n < -2 \\ 1, & n = -2, -1 \\ (n+1) \times 2^{-n}, & n \geqslant 0 \end{cases}$$

序列的加法和乘法如图 1-1-4 所示。

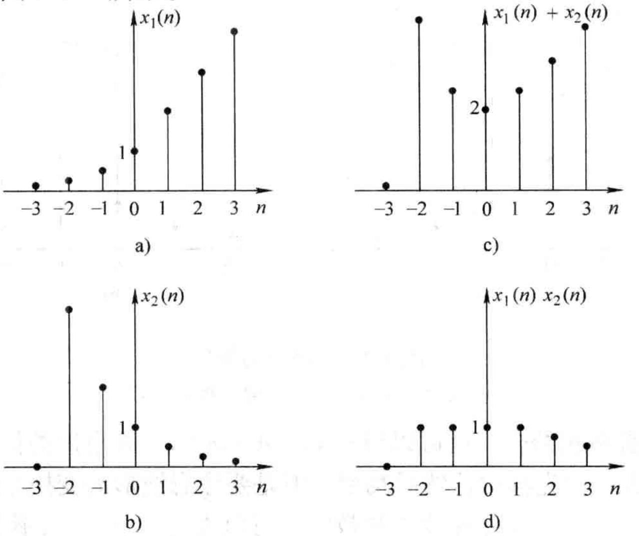

图 1-1-4　序列的加法和乘法

a) $x_1(n)$　b) $x_2(n)$　c) $x_1(n)+x_2(n)$　d) $x_1(n)x_2(n)$

2. 移位

给定序列 $x(n)$，若有正整数 m，序列 $x(n-m)$ 是将原序列沿 n 轴正方向平移 m 单位，即向右移位（延时序列），而序列 $x(n+m)$ 是将原序列沿 n 轴负方向平移 m 单位，即向左移位（超前序列），如图 1-1-5 所示，图中 $m=2$。雷达系统中，雷达接收到的目标回波信号就是延时信号。在数字信号处理的硬件设备中，移位实际上是由一系列的移位寄存器来实现的。

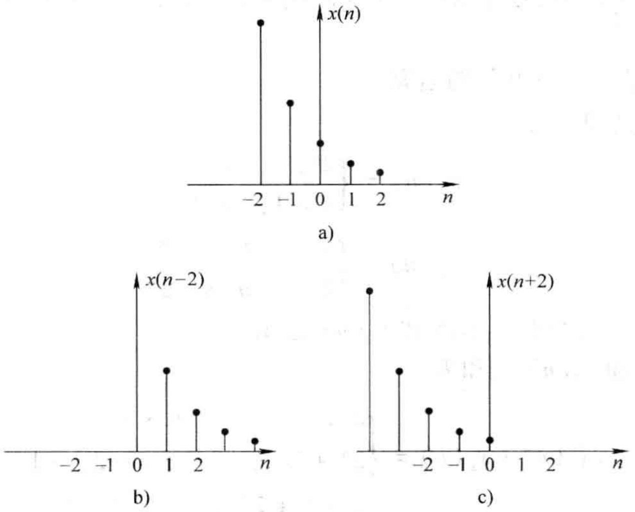

图 1-1-5　序列的移位

a）原序列 $x(n)$　b）延时序列 $x(n-2)$　c）超前序列 $x(n+2)$

3. 翻褶

给定序列 $x(n)$，序列 $x(-n)$ 就是将 $x(n)$ 以 $n=0$ 的纵轴为对称轴进行翻褶，如图 1-1-6所示。

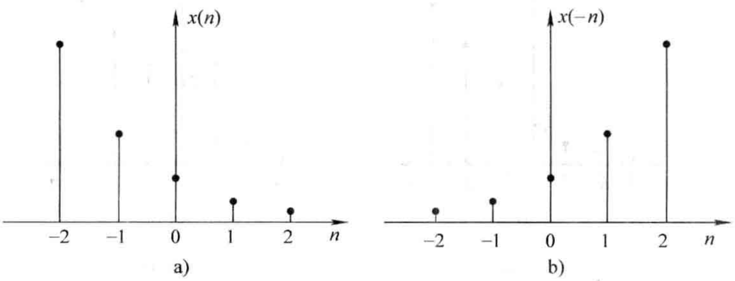

图 1-1-6　序列的翻褶

a）原序列 $x(n)$　b）翻褶序列 $x(-n)$

如果将移位和翻褶相结合，就可以得到 $x(-n\pm m)$。在画出这类信号的波形时，可以先翻褶，然后移位，也可以先移位，然后翻褶，但是要注意波形的变换始终是针对序号 n 进行的。例如，画信号 $x(-n+m)$，m 取正整数时，可以先将 $x(n)$ 向左移位得到 $x(n+m)$，然后将 $x(n+m)$ 翻褶得到 $x(-n+m)$；或者可以先将 $x(n)$ 翻褶得到 $x(-n)$，然后将 $x(-n)$

向右移位得到 $x[-(n-m)]=x(-n+m)$，注意这时移位的方向与前述相反了。移位和翻褶相结合如图 1-1-7 所示。

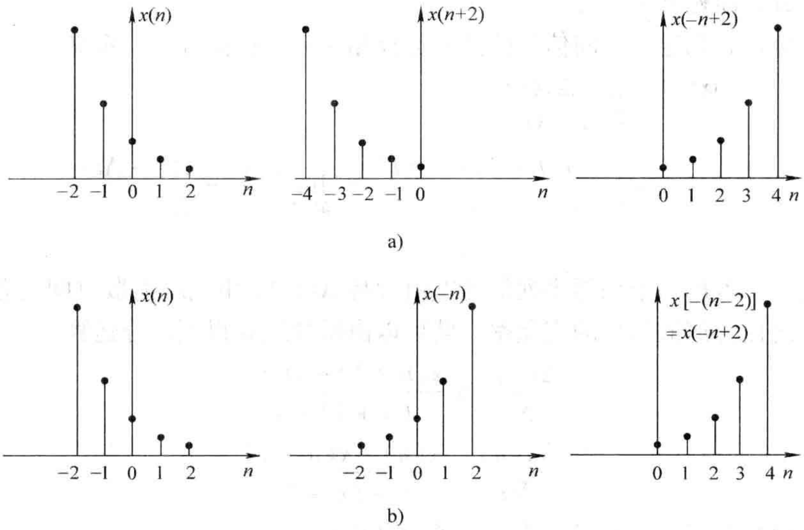

图 1-1-7　移位和翻褶相结合

a）先移位后翻褶　b）先翻褶后移位

4. 累加

设某序列为 $x(n)$，则 $x(n)$ 的累加序列 $y(n)$ 定义为

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{n} x(m) \tag{1-1-6}$$

式（1-1-6）表示，$y(n)$ 在时刻 n 上的值等于该时刻以及其之前所有时刻的 $x(n)$ 值之和。求和是在虚设的变量 m 下进行的，m 为哑变量，n 为参变量。结果仍为 n 的函数。

累加的概念与连续时间信号中积分的概念是一致的。在积分中，定义信号 $x(t)$ 的积分 $y(t)$ 为

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1-1-7}$$

可以看到，累加运算与积分运算的主要区别是求和和积分符号的不同，它们对信号的作用是一样的。

5. 差分运算

序列的差分可以分为前向差分和后向差分。一阶前向差分定义为

$$\Delta x(n)\overset{\text{def}}{=}x(n+1)-x(n) \tag{1-1-8}$$

一阶后向差分定义为

$$\nabla x(n)\overset{\text{def}}{=}x(n)-x(n-1) \tag{1-1-9}$$

式中，Δ 和 ∇称为差分算子。

由式（1-1-8）和式（1-1-9）可见，前向差分和后向差分的关系为

$$\nabla x(n)=\Delta x(n-1) \tag{1-1-10}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

两者仅移位不同，没有原则上的差别，因而它们的性质也相同。一般地，为方便起见，前向差分方程多用于状态变量分析；后向差分方程多用于因果系统与数字滤波器的分析。本书主要讨论后向差分，简称其为差分。

序列的差分运算和连续时间信号的微分运算相对应。在微分中，定义

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x(t)}{\Delta t}\\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t)-x(t-\Delta t)}{\Delta t}\end{aligned} \tag{1-1-11}$$

对离散信号而言，若用两个相邻序列值的差值代替 $\Delta x(t)$，用相应离散时间之差代替 Δt，并称这两个差值之比为离散信号的变化率，就可以由微分运算得到差分运算

$$\frac{\Delta x(n)}{\Delta n} = \frac{x(n+1)-x(n)}{(n+1)-n} \tag{1-1-12}$$

$$\frac{\nabla x(n)}{\nabla n} = \frac{x(n)-x(n-1)}{n-(n-1)} \tag{1-1-13}$$

式（1-1-12）和式（1-1-13）即前向差分和后向差分的定义。

二阶差分可以定义为

$$\nabla^2 x(n) = \nabla[\nabla x(n)] = x(n)-2x(n-1)+x(n-2) \tag{1-1-14}$$

类似地，可定义三阶、四阶、…、m 阶差分。一般地，m 阶差分为

$$\nabla^m x(n) = \nabla[\nabla^{m-1}x(n)] = \sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}x(n-i) \tag{1-1-15}$$

式中

$$\binom{m}{i} = \frac{m!}{(m-i)!i!},\quad j=0,1,2,\cdots,m \tag{1-1-16}$$

为二项式系数。

6. 尺度变换（抽取与插值）

（1）抽取

给定序列 $x(n)$，令

$$x_{\mathrm{d}}(n) = x(Dn),\quad D\text{ 为正整数} \tag{1-1-17}$$

则 $x_{\mathrm{d}}(n)$ 表示从 $x(n)$ 的每连续 D 个样本值中取出一个组成的新序列，这种运算称为抽取。抽取丢失了原信号的部分信息，它不是简单的时间轴的压缩。若序列 $x(n)$ 是由连续信号 $x_{\mathrm{a}}(t)$ 以 f_{s} 为抽样频率抽样产生的，则可以认为 $x_{\mathrm{d}}(n)$ 是以 $1/D$ 倍的抽样频率（f_{s}/D）对 $x_{\mathrm{a}}(t)$ 抽样产生的，相当于将抽样间隔由 T 变成 DT。当 $D=2$ 时，$x(n)$ 和 $x_{\mathrm{d}}(n)$ 分别如图 1-1-8a、b 所示。

（2）插值

给定序列 $x(n)$，令

$$x_{\mathrm{e}}(n) = \begin{cases}x(n/I), & n=mI, I\text{ 为正整数}, m\text{ 为整数}\\ 0, & \text{其他 } n\end{cases} \tag{1-1-18}$$

则 $x_{\mathrm{e}}(n)$ 表示把原序列 $x(n)$ 的两个相邻样本值之间插入（$I-1$）个零值（I 为正整数），故

也称为序列的零值插入。当 $I=2$ 时，$x_e(n)$ 如图 1-1-8c 所示。

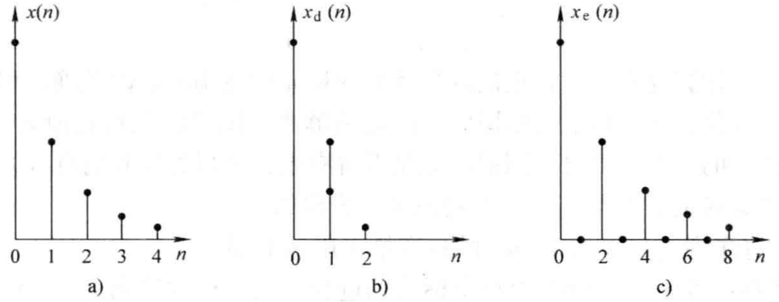

图 1-1-8　序列的抽取与插值

a）序列 $x(n)$　b）序列 $x_d(n)$（$D=2$）　c）序列 $x_e(n)$（$I=2$）

7. 卷积和

若两个序列为 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$，则 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的卷积和定义为

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) \overset{\text{def}}{=} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(n-m) \tag{1-1-19}$$

注意这里求和是在虚设的变量 m 下进行的，m 为求和变量，也称为哑变量，n 为参变量，结果仍为 n 的函数。

在连续时间线性时不变系统分析中，卷积积分是求零状态响应的基本方法。同样的，卷积和是求离散时间线性移不变系统的零状态响应的基本方法。卷积和是数字信号处理最重要的运算之一，这里只讨论卷积和的基本计算，它的性质将在第 2 节详细讨论。

【例 1-1-2】　已知序列

$$x_1(n) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ a^n, & n \geqslant 0 \end{cases}$$

$$x_2(n) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geqslant 0 \end{cases}$$

求 $x(n) = x_1(n) * x_2(n)$。

【解】　由卷积和的定义式，有

$$x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(n-m)$$

对于 $x_1(m)$，考虑仅当 $m \geqslant 0$ 时，序列有非零表达式 $x_1(m) = a^m$，因此求和下限可以改为 $m=0$；对于 $x_2(n-m)$，当 $n-m \geqslant 0$ 时，即 $m \leqslant n$ 时，序列有非零表达式 $x_2(n-m)=1$，因此求和上限可以改为 n，故上式可写为

$$x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=0}^{n} a^n \times 1 = \sum_{m=0}^{n} a^n$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}, & a \neq 1 \\ n+1, & a = 1 \end{cases}$$

显然，上式中 $n \geqslant 0$，因为若求和上限小于求和下限，则求和区间不存在。故最后结果为

$$x(n)=\begin{cases}\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}, & a\neq 1\\ n+1, & a=1\end{cases},\quad n\geqslant 0$$

由上例可知，计算卷积和时，正确的选择参变量 n 的适用区域以及确定相应的求和上下限是十分关键的步骤，这可以借助作图的方法辅助解决。图解法能直观地表明卷积的含义，有助于对卷积概念的理解，同时，图解法也是求解有限长序列卷积和的有效方法。

图解法计算序列 $x_1(n)$ 与 $x_2(n)$ 的卷积和的步骤如下：

1）换元：将序列 $x_1(n)$ 与 $x_2(n)$ 的自变量 n 用 m 代替。

2）反转平移：将序列 $x_2(m)$ 以纵坐标为轴进行反转，得到序列 $x_2(-m)$，然后将序列 $x_2(-m)$ 沿 m 轴正方向平移 n 个单位，成为 $x_2(n-m)$。

3）乘积：求乘积 $x_1(m)x_2(n-m)$。

4）求和：m 从 $-\infty\sim\infty$ 对乘积项求和，得到某一特定点 $x(n)$ 的值。

依次取 $n=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots$，重复步骤3）、4），即得到全部 $x(n)$ 的值。下面举例说明。

【例 1-1-3】 已知序列

$$x_1(n)=\{\underset{\underset{n=0}{\uparrow}}{1},2,3\}$$

$$x_2(n)=\{\underset{\underset{n=0}{\uparrow}}{1},1,1,1\}$$

求 $x(n)=x_1(n)*x_2(n)$。

【解】 将序列 $x_1(n)$ 与 $x_2(n)$ 的自变量换为 m，得到序列 $x_1(m)$ 和 $x_2(m)$ 如图 1-1-9a 和 b 所示。

将 $x_2(m)$ 反转后，得到 $x_2(-m)$ 如图 1-1-9c 所示。

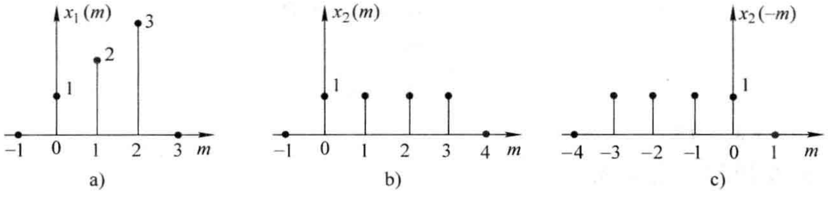

图 1-1-9　例 1-1-3 图

逐次令 $n=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots$，计算乘积并求和，其图示如图 1-1-10 所示。

1）当 $n<0$ 时，$x_1(m)$ 和 $x_2(n-m)$ 没有交叠部分，乘积处处为零，故

$$x(n)=0$$

2）当 $n=0$ 时

$$x(0)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_1(m)x_2(0-m)=x_1(0)x_2(0)=1$$

3）当 $n=1$ 时

$$x(1)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_1(m)x_2(1-m)=x_1(0)x_2(1)+x_1(1)x_2(0)=3$$

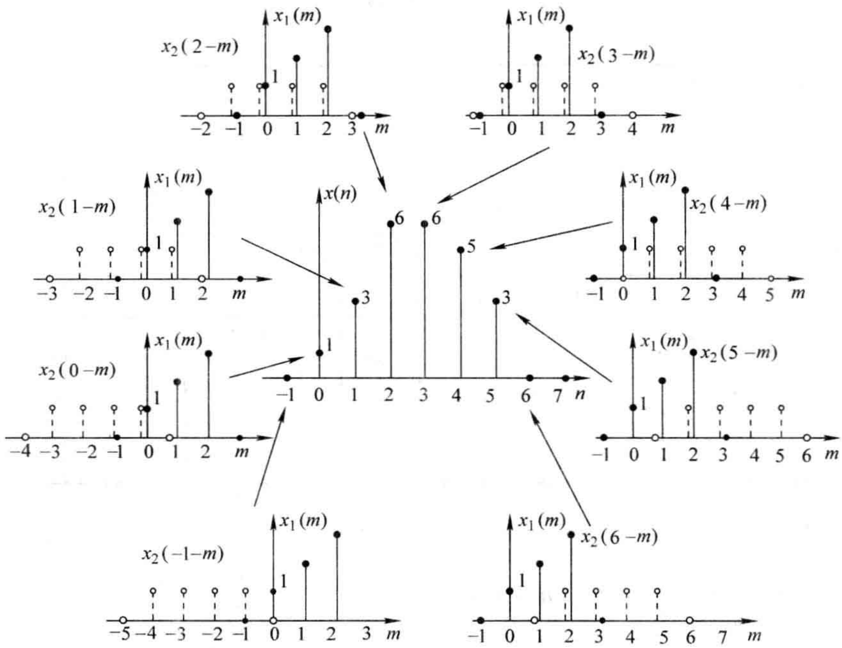

图 1-1-10　例 1-1-3 图卷积和的计算过程

4）当 $n=2$ 时

$$x(2)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_1(m)x_2(2-m)$$
$$=x_1(0)x_2(2)+x_1(1)x_2(1)+x_1(2)x_2(0)=6$$

5）当 $n=3$ 时

$$x(3)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_1(m)x_2(3-m)$$
$$=x_1(0)x_2(3)+x_1(1)x_2(2)+x_1(2)x_2(1)=6$$

6）当 $n=4$ 时

$$x(4)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_1(m)x_2(4-m)=x_1(1)x_2(3)+x_1(2)x_2(2)=5$$

7）当 $n=5$ 时

$$x(5)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_1(m)x_2(5-m)=x_1(2)x_2(3)=3$$

8）当 $n\geqslant 6$ 时，$x_1(m)$ 和 $x_2(n-m)$ 没有交叠部分，乘积处处为零，故

$$x(n)=0$$

综上所述，$x(n)=x_1(n)*x_2(n)=\{\underset{\substack{\uparrow\\ n=0}}{1},3,6,6,5,3\}$。

上述图解过程较为复杂，考虑到有限长序列可以用序列的形式表示，故也可以把图示的过程用序列阵表的形式表示，从而简化求解过程。卷积和的序列阵表见表 1-1-1，可见计算结果同前。

表 1-1-1 卷积和的序列阵表

$\downarrow m=0$

$x_2(n-m)$ \ $x_1(m)$ / n				1	2	3					$x(n)$
0	1	1	1	1							1
1		1	1	1	1						3
2			1	1	1	1					6
3				1	1	1	1				6
4					1	1	1	1			5
5						1	1	1	1		3
6							1	1	1	1	0

观察卷积和

$$
\begin{aligned}
x(n) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(n-m) \\
&= \cdots + x_1(-1)x_2(n+1) + x_1(0)x_2(n) + x_1(1)x_2(n-1) + \cdots
\end{aligned}
$$

求和符号内 $x_1(m)$ 的序号 m 和 $x_2(n-m)$ 的序号 $n-m$ 之和恰好等于 n。从例 1-1-3 的求解过程也可以看出，$x(n)$ 的某一特定值 $x(n_0)$ 为所有两序列序号之和为 n_0 的那些样本乘积之和。因此，将这些序号和相同的乘积排成一列，用竖式乘法来表示。例 1-1-3 中

$$x_1(n) = \{0, x_1(0), x_1(1), x_1(2), 0\}$$

$$x_2(n) = \{0, x_2(0), x_2(1), x_2(2), x_2(3), 0\}$$

将它们排成乘法

$$
\begin{array}{llllll}
 & & & x_1(0) & x_1(1) & x_1(2) \\
\times & & x_2(0) & x_2(1) & x_2(2) & x_2(3) \\
\hline
 & & & x_1(0)x_2(3) & x_1(1)x_2(3) & x_1(2)x_2(3) \\
 & & x_1(0)x_2(2) & x_1(1)x_2(2) & x_1(2)x_2(2) & \\
 & x_1(0)x_2(1) & x_1(1)x_2(1) & x_1(2)x_2(1) & & \\
x_1(0)x_2(0) & x_1(1)x_2(0) & x_1(2)x_2(0) & & & \\
\hline
x_1(0)x_2(0) & & & & & \\
 & x_1(0)x_2(1)+x_1(1)x_2(0) & & & & \\
 & & x_1(0)x_2(2)+x_1(1)x_2(1)+x_1(2)x_2(0) & & & \\
 & & & x_1(0)x_2(3)+x_1(1)x_2(2)+x_1(1)x_2(2) & & \\
 & & & & x_1(1)x_2(3)+x_1(2)x_2(2) & \\
 & & & & & x_1(2)x_2(3)
\end{array}
$$

由上式可见，将 $x_1(n)$ 作为被乘数，将 $x_2(n)$ 作为乘数，可以简单地列一个竖式乘法求得两序列的卷积和。求卷积和的竖式乘法与乘法的唯一差别是没有进位运算。

从上述竖式乘法中还可以简单地看出两序列卷积后得到的新序列序号范围的长度。若有限长序列 $x_1(n)$ 非零区间为 $M_1 \leqslant n \leqslant M_2$，序列长度为 $N_1 = M_2 - M_1 + 1$；有限长序列 $x_2(n)$

非零区间为 $M_3 \leqslant n \leqslant M_4$，序列长度为 $N_2 = M_4 - M_3 + 1$。则 $x(n) = x_1(n) * x_2(n)$ 的非零区间为 $M_1 + M_3 \leqslant n \leqslant M_2 + M_4$，序列长度为 $N = (M_2 + M_4) - (M_1 + M_3) + 1 = N_1 + N_2 - 1$。可以先做一个竖式乘法，得到一串样本值，然后根据上述规律得到卷积和序列的某一个样本值（一般是第一个）的序号，从而确定整个序列。例 1-1-3 的竖式乘法如下：

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & & & 1 & 2 & 3 \\
\times & & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
 & & & 1 & 2 & 3 \\
 & & 1 & 2 & 3 & \\
 & 1 & 2 & 3 & & \\
1 & 2 & 3 & & & \\
\hline
\underset{\substack{\uparrow \\ n=0+0}}{1} & 3 & 6 & 6 & 5 & 3
\end{array}
$$

于是，可以得到所求卷积和 $x(n) = x_1(n) * x_2(n) = \{\underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{1}, 3, 6, 6, 5, 3\}$，该结果与前面两种方法得到的结果是一致的。

8. 相关

相关函数是鉴别信号的有力工具，它反映了两个信号的相似性，被广泛用于雷达回波的识别、地震源探测、通信同步信号的识别等信号处理领域。

两个实序列为 $x(n)$ 和 $y(n)$，若它们都为能量有限信号，则 $x(n)$ 和 $y(n)$ 的互相关函数定义为

$$r_{xy}(m) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n-m) \tag{1-1-20}$$

式（1-1-20）表明，$r_{xy}(m)$ 在时刻 m 时的值，等于将 $x(n)$ 保持不动而 $y(n)$ 右移 m 位后两序列对应相乘再相加的结果。

令 $n - m = n$，则得到相关函数的另一种定义为

$$r_{xy}(m) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n+m)y(n) \tag{1-1-21}$$

可见，互相关函数是两信号之间时间差（序号差）的函数，$r_{xy}(m)$ 的延时量 m 等于 $x(n)$ 的时间变量减去 $y(n)$ 的时间变量。需要注意，一般 $r_{xy}(m) \neq r_{yx}(m)$。这是因为

$$r_{yx}(m) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)x(n-m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-m)y(n) = r_{xy}(-m) \tag{1-1-22}$$

于是有 $r_{xy}(m)$ 和 $r_{yx}(m)$ 之间的关系

$$r_{xy}(m) = r_{yx}(-m) \tag{1-1-23}$$

如果 $y(n) = x(n)$，则上面定义的互相关函数变成自相关函数 $r_{xx}(m)$，即

$$r_{xx}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x(n-m) \tag{1-1-24}$$

自相关函数 $r_{xx}(m)$ 反映了信号 $x(n)$ 和其自身作了一段延时之后的 $x(n-m)$ 的相似程度。自相关函数 $r_{xx}(m)$ 一般简记为 $r_x(m)$。由

$$r_x(m) = r_x(-m) \tag{1-1-25}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com