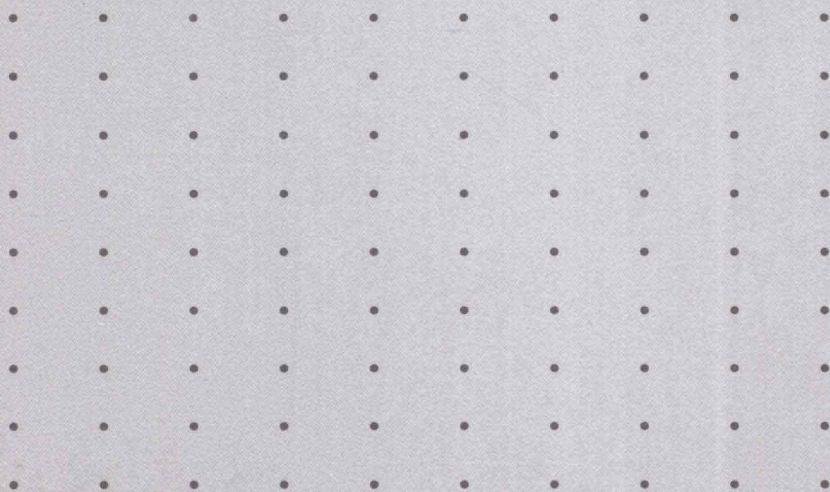


25

现代极小曲面讲义

■ Frederico Xavier · 潮小李



现代数学基础

25

现代极小曲面讲义

XIANDAI JIXIAO QUMIAN JIANGYI

■ Frederico Xavier · 潮小李



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

图书在版编目 (CIP) 数据

现代极小曲面讲义 / (巴西) 泽维尔 (Xavier, F.), 潮小李编著. — 北京 : 高等教育出版社, 2011.6

ISBN 978-7-04-032281-1

I. ①现… II. ①泽… ②潮… III. ①极小曲面 IV. ①O176.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 099910 号

策划编辑 王丽萍 责任编辑 王丽萍 封面设计 张楠 责任印制 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	网 址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印 刷	涿州市星河印刷有限公司	网上订购	http://www.landaco.com
并 本	787×1092 1/16		http://www.landaco.com.cn
印 张	10.5	版 次	2011 年 6 月第 1 版
字 数	140 000	印 次	2011 年 6 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	32.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物 料 号 32281-00

中文序言

极小曲面广泛存在于自然界当中,很多问题也源于自然界,这就促使我们更好地去了解极小曲面的性质,所以极小曲面理论是近年来发展较快的一个数学分支. 极小曲面是平均曲率处处为零的曲面,局部地,可视为某平面区域上的图,它是所有具有相同边界的曲面当中面积最小的曲面,可以利用由闭曲线张成的肥皂膜来物理实现.

1744 年, Euler 开始寻找具有极小面积的旋转曲面并证明了悬链面具有这种性质, 大约 11 年后, Lagrange 和 Euler 开始寻找平面上某区域上给定边界值的极小图 (面积泛函的临界点), 并给出了解所满足的 Euler-Lagrange 方程 (二阶拟线性椭圆型偏微分方程), 但没有给出任何新的解, 原因是他们当时不太关心具体的例子, 而是致力于说明他们的方法 (变分方法) 的一般性. 1776 年, Meusnier 得到了新的解——螺旋面, 同样重要的是, 他给出了 Euler-Lagrange 方程的几何描述, 即利用主曲率的平均值 (即平均曲率) 消失来刻画. 随后, G. Monge, A. Legendre, S. -F. Lacroix 和 A. -M. Ampère 等人开始积分 Euler-Lagrange 方程, 得到用解析函数表

示的极小曲面的坐标满足的一些公式, 1816 年, J. -D. Gergonne 提出的一系列问题又引起数学家们再次关注极小曲面. 1831–1835 年, H. F. Scherk 利用 Monge-Legendre 表示公式和一些允许变量可以分离的假设, 给出了另外 5 个极小曲面; 1850 年, M. Roberts 利用与 Scherk 类似的方法又得到一些新的例子. 这以后, 更多的发现涌现了, 是极小曲面理论的第一个黄金时代 (约 1855–1890 年), 代表性人物有: E. Catalan, O. Bonnet, J. A. Serret, B. Riemann, K. Weierstrass, A. Enneper, H. A. Schwarz, J. Weingarten, E. Beltrami, A. Ribaucour, E. R. Neovius, G. Darboux, L. Bianchi, S. Lie, A. Schoenflies 等. 第二个黄金时代大约是 1930–1940 年, 这期间出现了许多可与以前媲美的开创性工作, 代表性人物有: R. Courant, J. Douglas, E. J. McShane, C. B. Morrey, M. Morse, T. Rado, M. Shiffman, C. Tompkins, L. Tonelli 等. 在这个时期的伟大工作中, Jesse Douglas 凭借着他对 Plateau 问题^①的工作获得了第一届 (1936 年) 的 Fields 奖 (当年, 另一个 Fields 奖获得者是 Lars V. Ahlfors, 获奖工作是其对复分析和 Nevanlinna 理论的贡献).

很多数学家相信, 从 20 世纪 80 年代早期开始, 我们已经步入了极小曲面发展的第三个黄金时代. 很多新的嵌入极小曲面的例子在计算机的帮助下被找到, 这使我们能够对那些有趣的极小曲面有更直观的认识. 在这期间, 几何测度论, 共形几何, 泛函分析, 可积系统和其他的数学分支都给极小曲面理论提供了新方法, 带来了新的技术, 产生了新的结论, 与此同时, 极小曲面理论的发展也推动了这些学科的进步. 极小子流形在更加一般的几何模型中被研究, 而且部分结论极大地推动了一些著名数学问题的发展, 例如数学物理中的正质量猜想 (Schoen, Yau) 和 Penrose 猜想 (Bray), Smith 猜想 (Meeks, Yau) 和 Poincaré 猜想 (Colding, Minicozzi).

^① 这个问题最简单的提法是对于 $\mathbb{R}^3$ 上的任何光滑 Jordan 闭曲线, 是否存在以该闭曲线为边界且面积极小的曲面, 这是由比利时物理学家 J. Plateau (1801–1883) 在 1870 年提出的.

极小曲面也许是微分几何中研究最多的曲面, 其理论已经发展成为微分几何的一个内容十分丰富的分支, 其中一些有趣和著名的问题一直是人们研究的对象. 极小曲面和其他漂亮的理论一样具有迷人的性质: 它的结论易于见到和想象, 却难以证明.

本书主要是强调用复分析的方法来讨论极小曲面, 重点讨论了浸入极小曲面的 Gauss 映射 (第三章) 以及 Calabi 猜想 (第四章), 同时在第五章说明了 Calabi 猜想成立的一个充分条件 (即曲率有界), 并讨论了具有有界曲率的嵌入极小曲面的特征. 关于嵌入的单连通极小曲面的新结果均不是利用极小曲面和复分析之间的经典联系来处理的, 而这种联系曾被成功地用于极小曲面的其他一些基本问题的研究. 如果能从复分析的角度来理解 Colding 和 Minicozzi 的理论, 那我们就可以更好地揭示嵌入极小圆盘. 为此, 我们在第六章给出 Catalan 定理的复分析证明, 这是我们利用经典的工具来认识嵌入极小圆盘的第一步. 同时, 有很多迹象表明, 单值函数理论中的另一个强有力的工具——Lowner 理论——也很有希望拿来考虑共形调和嵌入, 期待以后能有所突破. 第七章提出了我们比较关心且与复分析相关的一些问题和想法. 另外, 我们在附录中也介绍了近年来 Colding 和 Minicozzi 发展起来的一些新理论和方法, 这些是对本书的重要补充.

本书的主要内容曾经在 2005 年由南京大学主办的暑期班上由 Xavier 教授报告过, 后来经过不断的补充和完善才完成. 这期间, 作者得到了很多朋友的关心和支持, 尤其是美国圣母大学的曹建国教授长期以来给予了热情帮助和鼓励, 在此一并致谢.

鉴于水平有限, 出现错误在所难免, 作者热忱欢迎广大同行和读者提供宝贵意见. 也希望本书能帮助大家初步了解极小曲面.

Frederico Xavier, 潮小李

2010 年 6 月于美国圣母大学

英文序言

This book is primarily based on a course of ten lectures taught by Prof. F. Xavier at the Nanjing University in the summer of 2005, on the interaction between minimal surfaces and classical complex analysis. The original set of notes was greatly enhanced by Prof. Chao, who added new material, most notably a short introduction to the Colding-Minicozzi theory. Both authors are indebted to Prof. F. Fontenele for allowing the inclusion in this book of his previously unpublished joint work with Xavier. Finally, F. Xavier would like to record his gratitude to the students who attended the course, as well as to the Mathematics Department at the Nanjing University, for their warm support and hospitality.

Frederico Xavier

Xiaoli Chao

June, 2010

目 录

中文序言	iii
英文序言	vii
第一章 基本知识	1
§1.1 曲线的曲率	1
§1.2 曲面的曲率	4
第二章 极小曲面的 Weierstrass 表示	11
§2.1 等温坐标	11
§2.2 Weierstrass 表示	17
第三章 完备性与极小曲面的 Gauss 映射	25
§3.1 完备极小曲面	25
§3.2 完备极小曲面的 Gauss 映射	29

第四章	Calabi 猜想	45
§4.1	Runge 逼近定理	45
§4.2	Calabi 猜想	52
§4.3	Calabi 猜想的最新进展	59
第五章	Poisson 积分及其在极小曲面理论中的应用	63
§5.1	Poisson 积分	63
§5.2	Poisson 积分的边界行为	70
§5.3	Riesz 定理	73
§5.4	局部 Fatou 定理和 Privalov 唯一性定理	77
§5.5	调和共轭的边界行为	85
§5.6	极小曲面的凸包	87
§5.7	具有有界曲率的嵌入极小曲面	90
第六章	Catalan 定理的复分析证明	99
§6.1	基本知识	100
§6.2	极小曲面的渐近线	102
§6.3	一类螺旋面	109
§6.4	Catalan 定理的证明	111
第七章	未解决的问题	115
附录 A	螺旋面的唯一性	119
附录 B	极小曲面理论在 Poincaré 猜想证明中的应用	129
§B.1	宽度和有限消失定理	130
§B.2	能量减少映射	135

参考文献	143
名词索引	149

第一章 基本知识

§1.1 曲线的曲率

设 $C: \gamma = \gamma(s)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一条曲线, 其中 s 是曲线的弧长参数, 令 $\alpha(s) = \gamma'(s)$ 是曲线 C 的单位切向量场, 用 $\Delta\theta$ 来表示向量 $\alpha(s + \Delta s)$ 与 $\alpha(s)$ 之间的夹角, 如果极限

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s}$$

存在, 则称其为曲线 C 在 $p = \gamma(s)$ 点处的曲率, 记为 $k(p)$. 曲率是曲线在某点附近偏离直线的程度, 曲率越大, 偏离的程度就越大.

例 1.1. (1) 如果 γ 是直线, 则 $\Delta\theta \equiv 0$, 所以 $k \equiv 0$.

(2) 如果 γ 是半径为 R 的圆, 则 $\Delta s = R\Delta\theta$, 所以 $k \equiv 1/R$.

定理 1.1. 设 γ 是 C^2 的正规曲线 (即 $\gamma'(t) \neq 0, \forall t$), 则其在每点处的曲率都存在, 而且

$$k = \frac{|\gamma' \times \gamma''|}{|\gamma'|^3}.$$

证明: 首先设 $\gamma = \gamma(s)$ 是以弧长为参数的曲线, $\alpha(s + \Delta s)$ 与 $\alpha(s)$ 之间

的夹角为 $\Delta\theta$, 因为 $|\alpha(s)| = |\alpha(s+\Delta s)| = 1$, 所以 $2\sin\frac{\Delta\theta}{2} = |\alpha(s+\Delta s) - \alpha(s)|$, 于是

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{2\sin\frac{\Delta\theta}{2}} \cdot \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\alpha(s+\Delta s) - \alpha(s)|}{\Delta s} = |\alpha'(s)| = |\gamma''(s)|.$$

即曲线 γ 在 $\gamma(s)$ 处的曲率存在, 且 $k = |\gamma''(s)|$. 又 $\gamma = \gamma(t)$ 是正规的参数曲线, 故

$$\begin{aligned}\gamma'_s &= \gamma'_t \frac{dt}{ds} = \gamma'_t \frac{1}{|\gamma'_t|}, \\ \gamma''_{ss} &= \gamma''_{tt} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \gamma'_t \frac{d^2t}{ds^2} = \frac{\gamma''_{tt}}{|\gamma'_t|^2} - \gamma'_t \frac{\langle \gamma''_{tt}, \gamma'_t \rangle}{|\gamma'_t|^4},\end{aligned}$$

且

$$k^2 = |\gamma''(s)|^2 = \frac{\langle \gamma''_{tt}, \gamma''_{tt} \rangle}{|\gamma'_t|^4} - 2 \frac{\langle \gamma''_{tt}, \gamma'_t \rangle^2}{|\gamma'_t|^6} + \frac{\langle \gamma''_{tt}, \gamma'_t \rangle^2}{|\gamma'_t|^6} = \frac{|\gamma'_t \times \gamma''_{tt}|^2}{|\gamma'_t|^6},$$

即

$$k = \frac{|\gamma'_t \times \gamma''_{tt}|}{|\gamma'_t|^3}. \quad \square$$

注 1.1. 上式的几何意义: 在曲线上某点处, 如果曲率不为零, 则 γ'_t 与 γ''_{tt} 不共线, 反之亦然; 且与曲线参数的选取无关.

对于平面曲线, 我们还可以定义曲率的正负号如下: 设 $\gamma = \gamma(s)$ 是一条平面曲线, 如果 $k(p) \neq 0$, 则曲线局部地落在 p 点处的切线的一侧, 故可将 $\alpha(s)$ 沿逆时针方向旋转 $\pi/2$ 得到唯一的一个与 $\alpha(s)$ 正交的单位向量场 $\beta(s)$, 这样, 沿 $\gamma(s)$ 就建立了一个右手单位正交标架场 $\{\gamma(s); \alpha(s), \beta(s)\}$. 若 $\beta(s)$ 正好指向曲线弯曲的一侧, 则取 $k(p) > 0$; 若 $-\beta(s)$ 正好指向曲线弯曲的一侧, 则取 $k(p) < 0$. 于是我们知道平面上闭的凸曲线在每点处就有非负的曲率.

若平面曲线表示为 $y = f(x)$, 选取自然定向 (即变量 x 增加的方向), 则曲率 k 与 $f''(x)$ 的符号一致, 且 $k = f''/(1+f'^2)^{3/2}$; 如果曲线是以弧长为参数的, 则 $k = d\gamma/ds$. 如果曲线上某点处的曲率不为零, 则称 $1/|k|$ 为该点处的曲率半径, 记为 R ; 如果曲率在某点处为零, 则该点处的曲率半径为 ∞ , 所以也有 $R = 1/|k|$.

我们也可以从变分的角度来理解平面曲线的曲率. 设

$$C_\varepsilon: p_\varepsilon = p + \varepsilon f(p)\beta(p), \quad p \in C,$$

其中 $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ 是任意光滑函数, C_ε 称为 C 的平行曲线. 当 $|\varepsilon|$ 很小时, C_ε 也是光滑的, 设 $L(\varepsilon)$ 是 C_ε 的长度, 则有

$$L'(0) = - \int_C k f ds, \quad -k(p) = \lim_{C \rightarrow p} \frac{L'(0)}{\Delta s}.$$

另外, 平面曲线是由其曲率唯一决定的, 即

定理 1.2. 设 $h(s) \in C^1[a, b]$, 则 (在相差一个刚性运动下) 存在唯一的曲线 γ , 使得 $h(s)$ 是 γ 的曲率函数, 且 s 是曲线 γ 的弧长参数.

证明: 令

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= \alpha_0 + \int_0^s h(s) ds, \\ x(s) &= x_0 + \int_0^s \cos \alpha(s) ds, \quad y(s) = y_0 + \int_0^s \sin \alpha(s) ds, \end{aligned}$$

则 $x(s)$, $y(s)$ 和 $\alpha(s)$ 满足

$$\frac{dx}{ds} = \cos \alpha(s), \quad \frac{dy}{ds} = \sin \alpha(s), \quad \frac{d\alpha}{ds} = h(s).$$

令 $\gamma(s) = (x(s), y(s))$, 则

$$l = \int_a^s \sqrt{x'^2 + y'^2} ds = \int_a^s ds = s - a,$$

即 γ 是以弧长为参数的, 而且

$$|k(s)| = |\sqrt{(x'')^2 + (y'')^2}| = \sqrt{|\alpha'|^2} = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right| = |h(s)|,$$

于是 $k(s) = \frac{d\alpha}{ds} = h(s)$. 如果两条曲线有相同的曲率, 则这两条曲线相差一个刚性运动 (因为作一个平移和旋转后, 它们的坐标函数满足相同初值的微分方程). □

§1.2 曲面的曲率

用 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 来表示 $\mathbb{R}^3$ 中标准的数量积, $\mathbb{R}^3$ 中的曲面 Σ 是由光滑映射 $X: \Omega (\subset \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^3$ 给出的, 若映射的微分在每个点处的秩都是 2, 则称曲面 Σ 是正规的.

在正规点 (u, v) 处, 由于

$$\mathscr{W} \equiv |X_u \wedge X_v| = \sqrt{|X_u|^2 |X_v|^2 - \langle X_u, X_v \rangle^2} \neq 0,$$

所以在点 (u, v) 处的单位法向量可以定义为

$$N = \frac{1}{\mathscr{W}} X_u \wedge X_v.$$

如果法向量可以定义在整个平面上, 则称这个正规曲面是可定向的, 这样的 N 就称为曲面的一个定向.

由于 $|N| = 1$, 我们可以将 N 视为 Ω 到 $\mathbb{R}^3$ 中单位球的映射:

$$N: \Omega \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3,$$

称其为曲面 Σ 的 Gauss 映射(或法映射、球面映射), $N(\Omega)$ 是曲面 Σ 的球面像.

命题 1.1. 高斯映射的切映射是自伴随的线性映射.

证明: 由于 dN 是线性的, 所以我们只需证明

$$\langle dN_p(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, dN_p(w_2) \rangle, \quad \forall p \in \Sigma,$$

其中 w_1, w_2 是 $T_p \Sigma$ 的一组基. 设 $X(u, v)$ 是曲面 Σ 在 p 处的参数化, X_u, X_v 是 $T_p \Sigma$ 的一组基, $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ 是曲面上经过 $p = \alpha(0)$ 的曲线, 则

$$\begin{aligned} dN_p(\alpha'(0)) &= dN_p(X_u u'(0) + X_v v'(0)) \\ &= \frac{d}{dt} N(u(t), v(t))|_{t=0} \\ &= N_u u'(0) + N_v v'(0). \end{aligned}$$

于是得

$$dN_p(X_u) = N_u, \quad dN_p(X_v) = N_v.$$

分别对 $\langle N, X_u \rangle = 0$ 和 $\langle N, X_v \rangle = 0$ 关于 v 和 u 求导, 得

$$\langle N_v, X_u \rangle + \langle N, X_{uv} \rangle = 0,$$

$$\langle N_u, X_v \rangle + \langle N, X_{uv} \rangle = 0.$$

所以

$$\langle dN_p(X_u), X_v \rangle = \langle N_u, X_v \rangle = -\langle N, X_{uv} \rangle = \langle N_v, X_u \rangle = \langle X_u, dN_p(X_v) \rangle,$$

即 dN_p 是伴随的. □

曲面 Σ 的面积定义为

$$A(X) = \int_{\Sigma} dA = \int_{\Omega} \mathscr{W} du dv,$$

其中 $dA = \mathscr{W} du dv = |X_u \wedge X_v| du dv$ 称为 Σ 的面积元.

如何来讨论 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面在 $\mathbb{R}^3$ 中的弯曲程度呢? 一个比较好的办法就是看曲面的法向量 N 是如何改变的, 即法向量沿每个方向的变化程度, 于是我们引入曲面的形状算子: 设 Σ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的浸入曲面, N 是曲面 Σ 的单位法向量, $\forall p \in \Sigma, \forall v \in T_p \Sigma$, 定义 $S(v) = -D_v N$, 则称线性算子 S 为曲面 Σ 的形状算子, 它刻画了曲面在一点处沿每个给定方向的弯曲程度. 如果 Σ 是平面, 则 $S \equiv 0$. 如果 Σ 是可定向的浸入曲面, 在曲面上的每一点处, 单位法向量就有两种选择: N 和 $-N$, 则相应的形状算子就相差一个负号. 如果曲面是不可定向的, 则 N 不能连续地定义在整个曲面上, 但局部地还是可以定义的, 因为 $\forall q \in \Sigma$, 总存在 q 点的邻域 U_q , 使得 $X: U_q \rightarrow \mathbb{R}^3$ 是浸入, 所以形状算子就可以定义在 U_q 上. 另外, 由定义可得

$$S(X_u) = -N_u, \quad S(X_v) = -N_v.$$

尽管形状算子可以刻画曲面在不同方向上的弯曲程度,但我们还是希望能有一个实值的函数来刻画,那就是曲面的法曲率. 设 Σ 是定向曲面, N 是 Σ 的法向量, v 是 Σ 的一个单位切向量, 令 $P_v = \text{span}\{v, N\}$ 是一个法截面, 则 $C_v = P_v \cap \Sigma$ 是一平面曲线, 设其曲率为 $k_v (= S(v) \cdot v)$, 称 $R_v \equiv \pm|k_v|$ 为曲面 Σ 关于方向 v 的 **法曲率**. 当 N 指向曲面的凹侧 (即曲面朝法向 N 弯曲) 时, 取 $R_v > 0$, 否则取 $R_v < 0$. 如果 $k_v = 0$, 则称 v 是渐近方向, 如果曲面上的正规连通曲线其上每一点的切方向都是渐近方向, 则称其为曲面的渐近曲线.

例 1.2. 对任意的单位切向量, 球面 $S^2(r)$ 的法曲率为 $-1/r$.

定义 1.1. 称 $k_1 = \max_{|v|=1} k_v$ 和 $k_2 = \min_{|v|=1} k_v$ 为曲面 Σ 的 **主曲率**, 称 $K = k_1 k_2$, $H = (k_1 + k_2)/2$ 分别为曲面 Σ 的 **Gauss 曲率** 和 **平均曲率**.

取到主曲率的方向称为 **主方向**, 相应的法截面称为 **主法截面**. 由定义可知, 若法截面与某主法截面 (即相对于主曲率 k_1 的法截面) 的夹角为 φ , 则 $k_v = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi$. 另外, 对于平均曲率和 Gauss 曲率总有 $H^2 - K \geq 0$, 曲面上满足 $H^2 - K = 0$ 即 $k_1 = k_2$ 的点称为 **脐点**.

设 $N: \Sigma \rightarrow S^2$ 是 Gauss 映射, $p \in D \subset \Sigma$, 则

$$K(p) = \pm \lim_{D \rightarrow p} \frac{N(D) \text{ 的面积}}{D \text{ 的面积}}$$

(因为 $N_u \wedge N_v = K(X_u \wedge X_v)$), 当 N 保持 ∂D 的定向时取正号 (图 1.2.1).

设 Σ 的变分是 $\Sigma_t: p_t = p + tf(p)N(p)$, $p \in \Sigma$, 当 $|t|$ 很小时, Σ_t 也是光滑的, 设 $A(t)$ 为 Σ_t 的面积, 则

$$A'(0) = -2 \int_{\Sigma} H f dA. \quad (1.2.1)$$

问题 (Lagrange, 1760): 给定 $\mathbb{R}^3$ 中的光滑闭曲线 C , 是否存在以 C 为边界且面积最小的曲面 Σ ?

由 (1.2.1) 易知, 该问题的任意解均满足 $H \equiv 0$. 事实上, 若 Σ 是上述

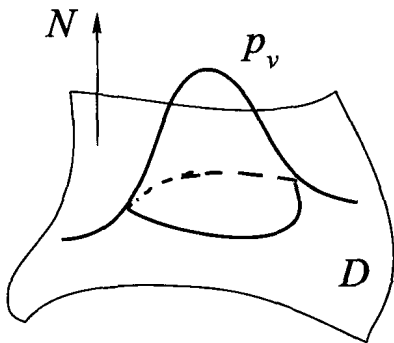


图 1.2.1

问题的解, 则对任意的 f 和任意小的 t , 有

$$\begin{aligned} A(\Sigma_t) \geq A(\Sigma) &\implies \frac{d}{dt} A(\Sigma_t)|_{t=0} = 0 \\ &\implies \int_{\Sigma} H f dA = 0 \\ &\implies H \equiv 0. \end{aligned}$$

在最后一步中, 若在某邻域 U 上 $H > 0$, 取 $f \geq 0$ 使得: $f > 0$, 在 $V \subset U$ 上; $f = 0$, 在 $\Sigma \setminus U$ 上, 则得 $\int_{\Sigma} H f dA > 0$, 矛盾.

定义 1.2. $\mathbb{R}^3$ 中平均曲率 $H \equiv 0$ 的曲面称为 **极小曲面**.

于是我们得到

命题 1.2. 具有相同边界的所有曲面中面积最小的曲面一定是极小曲面.

$\mathbb{R}^3$ 中极小曲面的例子:

1. 平面 (Lagrange, 1760).
2. 两个极小图 $z = f(x, y)$ (Meusnier, 1776):

(1) 悬链面 (图 1.2.2 (a)): 由 yz 坐标面上的曲线 $y = a \cosh \frac{z}{a}$ ($a > 0$) 绕 z 轴旋转得到, 其参数表示为

$$X(u, v) = a(\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u), \quad u \in \mathbb{R}, v \in [0, 2\pi).$$