



**ADVANCED
MATHEMATICS**

GUIDE

高等数学学习指导

——主讲教材《高等数学》（同济·第五版）

（下 册）

孙法国 主编

西北工业大学出版社

高等数学学习指导

主讲教材《高等数学》(同济·第五版)

(下册)

主 编	孙法国			
副主编	韦奉岐	胡新利	王晓东	
编 者	孙法国	韦奉岐	胡新利	王晓东
	王彩霞	王姗姗	孙 娜	李巧艳
	杨阿莉	赵宁波	张娟娟	贾悦利

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书是作者根据多年的教学经验,在对教学大纲和课程内容进行深入研究和理解的基础上编写而成的.全书分上、下册,共二十四讲,每讲有九个板块:重点内容提要,重点知识结构图,释疑解惑,考点及典型例题分析,课后习题选解,学习效果测试题,学习效果测试题答案与提示,考研模拟训练题,考研模拟训练题答案与提示.

本书通过“重点知识结构图”,理顺了各知识点之间的关系;通过“释疑解惑”,对重点概念及容易混乱的问题进行了诠释及辨析;通过对典型例题的分析和解答,揭示了高等数学的解题方法、解题规律和解题技巧.

本书是理工科院校本科生学习高等数学的同步辅导资料,也可以作为研究生入学考试的参考资料.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导/孙法国主编. —西安:西北工业大学出版社,2010.9

ISBN 978-7-5612-2898-2

I. ①高… II. ①孙… III. ①高等数学-高等学校-教材参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 168722 号

出版发行:西北工业大学出版社

通信地址:西安市友谊西路 127 号 邮编:710072

电话:(029)88493844 88491757

网址:www.nwpup.com

印刷者:陕西向阳印务有限公司

开本:787 mm×1 092 mm 1/16

印张:40.75

字数:1 256 千字

版次:2010 年 9 月第 1 版 2010 年 9 月第 1 次印刷

定价:59.80 元(上册:29.80 元,下册:30.00 元)

前言

高等数学是理工科院校的一门重要基础课. 为帮助读者学好高等数学, 我们根据多年的教学经验, 在对教学大纲和课程内容进行深入研究和理解的基础上编写了本书. 本书是理工科院校本科生学习高等数学的同步辅导资料, 也可以作为研究生入学考试的参考资料.

本书按照同济大学数学教研室编的《高等数学》(第五版)的章节顺序分上、下册, 共二十四讲, 每讲分为九个部分:

- 一、重点内容提要;
- 二、重点知识结构图;
- 三、释疑解惑;
- 四、考点及典型例题分析;
- 五、课后习题选解;
- 六、学习效果测试题;
- 七、学习效果测试题答案与提示;
- 八、考研模拟训练题;
- 九、考研模拟训练题答案与提示.

本书有以下几个特点:

- (1) 对每讲的内容及方法作了小结, 并指出了课程考试重点和考研重点.
- (2) 给出了重点知识结构图, 理顺了各知识点之间的关系.
- (3) 通过“释疑解惑”, 对初学者难以理解、不易掌握以及容易混淆的各种问题, 进行分析、推理和演算, 力求使读者建立起准确无误的概念.
- (4) 通过典型例题介绍方法, 注重分析和一题多解.
- (5) 对课后习题做了选解, 以方便读者参考.
- (6) 精心设计学习效果测试题, 以方便初学者检测所学之用.
- (7) 根据大纲编写了考研模拟训练题, 兼顾了考研者复习的需要.
- (8) 在同济大学《高等数学》(第五版)内容的基础上, 增加了“定积分的经济学应用”内容.

本书第 1, 2 讲由韦奉岐编写, 第 3, 4 讲由贾悦利编写, 第 5, 6 讲由孙法国编写, 第 7, 12 讲由王晓东编写, 第 8, 9 讲由王彩霞编写, 第 10, 11 讲由孙娜编写, 第 13, 14 讲由杨阿莉编写, 第 15, 16 讲由赵宁波编写, 第 17, 18 讲由张娟娟编写, 第 19, 20 讲由王姗姗编写, 第 21, 22 讲由李巧艳编写, 第 23, 24 讲由胡新利编写. 全书由孙法国统稿并担任主编.

限于编者水平, 书中若有疏漏之处, 敬请读者批评指正.

编者

2010 年 7 月于西安

目 录

第 15 讲 多元函数微分学	1
15.1 重点内容提要	1
15.2 重点知识结构图	5
15.3 释疑解惑	5
15.4 考点及典型例题分析	8
15.5 课后习题选解	17
15.6 学习效果测试题	28
15.7 学习效果测试题答案与提示	29
15.8 考研模拟训练题	30
15.9 考研模拟训练题答案与提示	31
第 16 讲 偏导数的应用	34
16.1 重点内容提要	34
16.2 重点知识结构图	36
16.3 释疑解惑	36
16.4 考点及典型例题分析	39
16.5 课后习题选解	50
16.6 学习效果测试题	61
16.7 学习效果测试题答案与提示	62
16.8 考研模拟训练题	63
16.9 考研模拟训练题答案与提示	64
第 17 讲 二重积分及其应用	66
17.1 重点内容提要	66
17.2 重点知识结构图	69
17.3 释疑解惑	70
17.4 考点及典型例题分析	73
17.5 课后习题选解	88
17.6 学习效果测试题	97
17.7 学习效果测试题答案与提示	99
17.8 考研模拟训练题	100
17.9 考研模拟训练题答案与提示	102
第 18 讲 三重积分及其应用	106
18.1 重点内容提要	106

18.2	重点知识结构图	109
18.3	释疑解惑	109
18.4	考点及典型例题分析	111
18.5	课后习题选解	120
18.6	学习效果测试题	133
18.7	学习效果测试题答案与提示	135
18.8	考研模拟训练题	136
18.9	考研模拟训练题答案与提示	138
第 19 讲	曲线积分	142
19.1	重点内容提要	142
19.2	重点知识结构图	145
19.3	释疑解惑	145
19.4	考点及典型例题分析	148
19.5	课后习题选解	158
19.6	学习效果测试题	164
19.7	学习效果测试题答案与提示	164
19.8	考研模拟训练题	165
19.9	考研模拟训练题答案与提示	166
第 20 讲	曲面积分	168
20.1	重点内容提要	168
20.2	重点知识结构图	171
20.3	释疑解惑	172
20.4	考点及典型例题分析	175
20.5	课后习题选解	184
20.6	学习效果测试题	196
20.7	学习效果测试题答案与提示	196
20.8	考研模拟训练题	197
20.9	考研模拟训练题答案与提示	198
第 21 讲	常数项级数及其审敛法	200
21.1	重点内容提要	200
21.2	重点知识结构图	202
21.3	释疑解惑	202
21.4	考点及典型例题分析	204
21.5	课后习题选解	212
21.6	学习效果测试题	215
21.7	学习效果测试题答案与提示	217
21.8	考研模拟训练题	218
21.9	考研模拟训练题答案与提示	219

第 22 讲 幂级数与傅里叶级数	220
22.1 重点内容提要	220
22.2 重点知识结构图	223
22.3 释疑解惑	224
22.4 考点及典型例题分析	226
22.5 课后习题选解	236
22.6 学习效果测试题	254
22.7 学习效果测试题答案与提示	255
22.8 考研模拟训练题	257
22.9 考研模拟训练题答案与提示	258
第 23 讲 一阶微分方程	259
23.1 重点内容提要	259
23.2 重点知识结构图	260
23.3 释疑解惑	260
23.4 考点及典型例题分析	263
23.5 课后习题选解	268
23.6 学习效果测试题	279
23.7 学习效果测试题答案与提示	279
23.8 考研模拟训练题	280
23.9 考研模拟训练题答案与提示	281
第 24 讲 高阶微分方程	282
24.1 重点内容提要	282
24.2 重点知识结构图	284
24.3 释疑解惑	284
24.4 考点及典型例题分析	285
24.5 课后习题选解	292
24.6 学习效果测试题	309
24.7 学习效果测试题答案与提示	309
24.8 考研模拟训练题	310
24.9 考研模拟训练题答案与提示	310

第 15 讲 多元函数微分学

15.1 重点内容提要

GAODENGSHUXUE

15.1.1 多元函数的基本概念

1. 二元函数

设 D 是 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ 上的一个非空子集, 称映射 $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ 为定义在 D 上的二元函数, 记为 $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$. 其中平面点集 D 称为函数 f 的定义域, z 称为因变量, 集合 $\{z \mid z = f(x, y), (x, y) \in D\}$ 称为函数 f 的值域, 空间点集 $\{(x, y, z) \mid z = f(x, y), (x, y) \in D\}$ 称为函数 f 的图像.

2. 多元函数

设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 上的一个非空子集, 称映射 $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ 为定义在 D 上的 n 元函数, 记为 $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$. 其中点集 D 称为函数 f 的定义域, z 称为因变量, 集合 $\{z \mid z = f(x_1, x_2, \dots, x_n), (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D\}$ 称为函数 f 的值域.

15.1.2 二元函数的极限

1. 二重极限的定义

设 $f(x, y)$ 在区域 D 内有定义, $P_0(x_0, y_0)$ 是 D 的聚点, 若 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当点 $P(x, y)$ 满足 $0 < |PP_0| < \delta$ 时, 总有 $|f(x, y) - A| < \epsilon$ 成立, 则称函数 $f(x, y)$ 当 (x, y) 趋向 (x_0, y_0) 时以 A 为极限, 记做 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$ 或 $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A$.

二元函数的极限要求点 $P(x, y)$ 以任何方式、任何方向、任何路径趋向 $P_0(x_0, y_0)$ 时, 都有 $f(x, y) \rightarrow A$. 如果沿两条不同的路径, $f(x, y)$ 趋于不同的值, 则可断定 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$ 不存在, 这是证明二重极限不存在的有

效办法.

2. 累次极限

$\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow y_0} F(y)$ 称为先 x 后 y 的二次极限; $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow x_0} G(x)$ 称为先 y 后 x 的二次极限.

15.1.3 二元函数的连续性

1. 二元函数连续的定义

(1) 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某个邻域 $U(P_0, \delta)$ 内有定义, 若 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$, 则

称二元函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处连续, 点 $P_0(x_0, y_0)$ 称为 $f(x, y)$ 的连续点.

(2) 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某个邻域 $U(P_0, \delta)$ 内有定义, 分别给自变量 x, y 在 x_0, y_0 处以增量 $\Delta x, \Delta y$, 得到全增量 $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$. 如果极限 $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = 0$, 则称 $z = f(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 处连续.

注 $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0) \Leftrightarrow \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] = 0 \Leftrightarrow \lim_{\rho \rightarrow 0} \Delta z = 0$

其中 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

2. 初等函数的连续性

一切多元初等函数在其定义域内是连续的.

3. 有界闭区域上连续函数的性质

(1) 有界性: 若 $z = f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 则 $z = f(x, y)$ 在 D 上有界, 即 $\exists M > 0, \forall (x, y) \in D$ 有 $|f(x, y)| \leq M$.

(2) 最值定理: 若 $z = f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 则 $z = f(x, y)$ 在 D 上有最大值和最小值, 即存在 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \forall (x, y) \in D$, 有

$$f(x, y) \leq f(x_1, y_1), f(x_2, y_2) \leq f(x, y)$$

(3) 介值定理: 若 $z = f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续, $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2) \in D$, 则对任意的常数 C , 当 $f(x_1, y_1) < C < f(x_2, y_2)$ 时, 存在 $P_0(x_0, y_0) \in D$, 使得 $f(x_0, y_0) = C$.

15.1.4 偏导数

1. 偏导数的定义

设 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某个邻域内有定义, 定义

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

2. 偏导数的几何意义

二元函数 $z = f(x, y)$ 的偏导数 $f'_x(x_0, y_0)$ 为曲面 $z = f(x, y)$ 与平面 $y = y_0$ 的交线在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处的切线关于 x 轴的斜率; $f'_y(x_0, y_0)$ 为曲面 $z = f(x, y)$ 与平面 $x = x_0$ 的交线在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处的切线关于 y 轴的斜率.

3. 偏导函数

如果函数 $z = f(x, y)$ 在区域 D 内任一点都存在偏导数, 则称函数 $z = f(x, y)$ 在 D 内可导, 这个新的函数关系称为 $z = f(x, y)$ 的偏导函数, 记为 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}$ 或 $f'_x(x, y)$.

4. 高阶偏导数

(1) 定义: 设函数 $z = f(x, y)$ 在区域 D 内有偏导函数 $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y), \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$, 如果在 D 内 $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$ 仍可导, 则称它们的偏导数是函数 $z = f(x, y)$ 的二阶偏导数, 分别是

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = f''_{xx}(x, y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = f''_{xy}(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = f''_{yx}(x, y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = f''_{yy}(x, y)$$

其中 $f''_{xy}(x, y), f''_{yx}(x, y)$ 称为 $z = f(x, y)$ 的二阶混合偏导数. 以此类推, 可以定义三阶及三阶以上的偏导数.

(2) 性质: 如果 $z = f(x, y)$ 的两个二阶混合偏导数 $f''_{xy}(x, y), f''_{yx}(x, y)$ 在区域 D 内连续, 则在区域 D

内恒有 $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$.

5. 偏导数计算

(1) 求 $f'_x(x, y)$ 时, 只要把 $z = f(x, y)$ 中的 y 固定(看做常数), 仅对 x 求导; 求 $f'_y(x, y)$ 时, 固定 x , 仅对 y 求导.

(2) $f'_x(x_0, y_0)$ 是一元函数 $z = f(x, y_0)$ 在 x_0 处的导数, $f'_y(x_0, y_0)$ 是一元函数 $z = f(x_0, y)$ 在 y_0 处的导数, 所以偏导数实质上仍是一元函数的求导问题.

(3) 当函数 $z = f(x, y)$ 在区域 D 内可导时, 有偏导函数 $f'_x(x, y), f'_y(x, y), f'_x(x_0, y_0)$ 是 $f'_x(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处的函数值; $f'_y(x_0, y_0)$ 是 $f'_y(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处的函数值.

15.1.5 全微分的概念

1. 定义与计算

设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内有定义, 如果全增量可以表示成 $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$, 其中 A, B 只与 (x_0, y_0) 有关, 而与 $\Delta x, \Delta y$ 无关, $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, 则称 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微分, 称 $A\Delta x + B\Delta y$ 为 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的全微分, 记为 dz . 若 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微分, 则

$$dz = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy$$

2. 可微的必要条件

若函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 处可微分, 则 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 处必可导, 且全微分

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

3. 可微的充分条件

若函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 处的偏导数存在且连续, 则 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 处必可微.

4. 方向导数与梯度

(1) 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某邻域内有定义, 自点 (x_0, y_0) 引射线 l , 设 x 轴正向到射线 l 的转角为 α , y 轴正向到射线 l 的转角为 β . 该邻域中另一点 $P_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ 在 l 上, 当 P_1 沿 l 趋向于 P_0 时, 极限 $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\rho}$ 存在, 则称此极限值为函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处沿方向 l 的方向导数, 记做 $\frac{\partial z}{\partial l}$, 即 $\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\rho}$. 若函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 可微分, 则 $\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \beta$.

(2) 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 可微分, 则称向量 $\frac{\partial z}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{j}$ 为 $z = f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 处的梯度, 记做 $\text{grad} f(x, y)$, 即

$$\text{grad} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{j} = \left\{ \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right\}$$

梯度的方向是函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 处方向导数取得最大值的方向, 梯度的模 $|\text{grad} f(x, y)|$ 即为方向导数的最大值.

5. 二元函数连续性、可导性、可微性, 以及方向导数之间的关系

$$\text{偏导数存在且连续} \rightarrow \text{可微} \rightarrow \begin{cases} \text{可导, 即 } dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \\ \text{连续} \rightarrow \text{极限存在, 即 } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0) \\ \text{方向导数存在, 即 } \frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \beta \end{cases}$$

15.1.6 多元复合函数的导数

1. 法则一

设 $u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y)$ 在点 (x, y) 处可导, 而函数 $z = f(u, v)$ 在相应点 (u, v) 处可微, 则复合函数 $z = f[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$ 在点 (x, y) 处可导, 且偏导数为

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

此法则是一元复合函数求导法则的推广. 对多元复合函数因变量 z 与自变量 x 或 y 之间可有多条链相连接, 每一条链都遵循求导的链式法则, 然后将各条链叠加即可, 所以也称为链式叠加法则, 此法则可以推广到有限个中间变量或有限个自变量的情形.

2. 法则二

设 $u = \varphi(t), v = \psi(t)$ 在点 t 处可导, 而函数 $z = f(u, v)$ 在相应点 (u, v) 处可微, 则复合函数 $z = f[\varphi(t), \psi(t)]$ 在点 t 处可导, 且全导数为

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt}$$

3. 微分形式不变性

设函数 $z = f(u, v)$ 具有连续的偏导数, 则无论 u, v 是中间变量还是自变量, 微分的形式都不变, 即

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv$$

15.1.7 隐函数求导

1. 一元隐函数存在定理

设函数 $F(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 的某邻域内有连续的偏导数, 且 $F(x_0, y_0) = 0, F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, 则方程 $F(x, y) = 0$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 的某邻域内恒能唯一确定一个单值连续且具有连续导数的一元函数 $y = f(x)$, 满足 $y_0 = f(x_0)$, 并且 $\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$.

2. 二元隐函数存在定理

设函数 $F(x, y, z)$ 在 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的某邻域内有连续的偏导数, 且 $F(x_0, y_0, z_0) = 0, F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, 则方程 $F(x, y, z) = 0$ 在 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的某邻域内恒能唯一确定一个单值连续且具有连续偏导数的函数 $z = f(x, y)$, 满足条件 $z_0 = f(x_0, y_0)$, 并有 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$.

3. 方程组情形

(1) 设函数 $F(x, y, z), G(x, y, z)$ 在 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的某邻域内有对各个变量的连续的偏导数, 又 $F(x_0, y_0, z_0) = 0,$

$G(x_0, y_0, z_0) = 0$, 且雅可比行列式 $J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}$ 在 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 不等于 0, 则方程组 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 在点

$P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的某邻域内恒能唯一确定一组单值连续且具有连续导数的函数 $y = y(x), z = z(x)$, 满足条件 $y_0 = y(x_0), z_0 = z(x_0)$, 并有

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, z)} = -\frac{1}{J} \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}, \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, x)} = -\frac{1}{J} \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix}$$

(2) 设函数 $F(x, y, u, v), G(x, y, u, v)$ 在 $P_0(x_0, y_0, u_0, v_0)$ 点的某邻域内有对各个变量的连续的偏导数,

又 $F(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0, G(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$, 且雅可比行列式 $J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}$ 在 $P_0(x_0, y_0, u_0,$

$v_0)$ 不等于 0, 则方程组 $\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$ 在点 $P_0(x_0, y_0, u_0, v_0)$ 的某邻域内恒能唯一确定一组单值连续且具有连续偏导数的函数 $u = u(x, y), v = v(x, y)$, 满足条件 $u_0 = u(x_0, y_0), v_0 = v(x_0, y_0)$, 并有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)} = -\frac{1}{J} \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, v)} = -\frac{1}{J} \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)} = -\frac{1}{J} \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, y)} = -\frac{1}{J} \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}$$

15.2 重点知识结构图

GAODENGSHUXUE

多元函数微分学 $\left\{ \begin{array}{l} \text{基本概念(区域、定义、极限、连续)} \\ \text{偏导数(定义、计算、高阶偏导数)} \\ \text{全微分(定义、计算、必要条件、充分条件)} \\ \text{多元复合函数的导数(链式法则、全导数)} \\ \text{隐函数求导法(一个方程、方程组)} \end{array} \right.$

15.3 释疑解惑

GAODENGSHUXUE

问题 15.1 当动点 $P(x, y)$ 沿任意直线无限趋于点 (x_0, y_0) 时, 函数 $f(x, y)$ 的极限存在, 且都等于 A , 能否说明 $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A$.

解答 不能确定. 例如极限 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{x^2 + y}$, 对于任意常数 k , 显然有

$$\lim_{\substack{y=kx \\ x \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^2}{x^2 + kx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx}{x + k} = 0$$

即点 $P(x, y)$ 沿任意直线无限趋于点 $(0, 0)$ 时, 极限都为 0, 但是

$$\lim_{\substack{y=-x^2+x^3 \\ x \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(-x^2+x^3)}{x^2 + (-x^2+x^3)} = -1$$

故函数在点 $(0, 0)$ 的极限不存在.

问题 15.2 如果引入极坐标 $\begin{cases} x = x_0 + r \cos \theta \\ y = y_0 + r \sin \theta \end{cases}$, 且对任意的 θ , 都有 $\lim_{r \rightarrow 0} f(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) = A$, 其中 A 是一个与 θ 无关的常数, 是否有 $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A$?

解答 不一定. 例如:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & x^2 + y^2 = 0 \\ \frac{xy^3}{x^2 + y^6}, & x^2 + y^2 \neq 0 \end{cases}$$

当点 (x, y) 沿曲线 $y^3 = kx$ 趋于点 $(0, 0)$ 时, 有 $\lim_{\substack{y^3=kx \\ x \rightarrow 0}} \frac{xy^3}{x^2 + y^6} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^2}{x^2 + k^2 x^2} = \frac{k}{1+k^2}$. 但若用 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, 则有

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^6} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^4 \cos \theta \sin^3 \theta}{r^2 \cos^2 \theta + r^6 \sin^6 \theta} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \cos \theta \sin^3 \theta}{\cos^2 \theta + r^4 \sin^6 \theta} = 0$$

问题 15.3 判定二重极限不存在, 有哪些常用的方法?

解答 依二重极限的定义, $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$ 存在的充分必要条件是 $P(x, y)$ 以任何方式趋于 $P_0(x_0, y_0)$ 时, $f(x, y)$ 有相同的极限, 因此, 判定二重极限不存在, 常用的方法有如下两种:

(1) 选取一种 $P \rightarrow P_0$ 的方式, 记为 $P \in C$, 其中 C 为函数定义域内以 P_0 为聚点的一个点集, 按此特殊方式, $\lim_{P \rightarrow P_0} f(x, y)$ 不存在.

(2) 找出两种 $P \in C_1$ 与 $P \in C_2$ 的方式, 使

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(x, y) = A_1 (P \in C_1), \quad \lim_{P \rightarrow P_0} f(x, y) = A_2 (P \in C_2)$$

且 $A_1 \neq A_2$ 则二重极限不存在.

问题 15.4 二重极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$ 与累次极限 $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ 是否一样?

解答 不一样.

(1) 二重极限存在, 但是累次极限不存在. 例如 $f(x, y) = x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x} (xy \neq 0)$, 由于 $\left| x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| + |y| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2}$, 故 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$. 但是 $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{y} = 0$, 而 $\lim_{y \rightarrow 0} y \sin \frac{1}{x}$ 不存在, 于是 $\lim_{x \rightarrow 0} (x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x})$ 不存在, 从而 $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} (x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x})$ 不存在, 同理 $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} (x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x})$ 不存在.

(2) 二重极限不存在, 但是累次极限存在. 例如 $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} (x^2 + y^2 \neq 0)$ 的二重极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ 不存在, 但是 $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 0$.

(3) 若 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 连续, 则 $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

问题 15.5 求一些比较简单的函数的二重极限有哪些方法?

解答 由于在平面上动点 $P(x, y)$ 趋于定点 $P_0(x_0, y_0)$ 的方式多样性, 导致了二重极限的复杂性, 相对一元函数要复杂, 一般求二重极限常用的方法如下:

(1) 利用函数的连续性, 如果 $P_0(x_0, y_0)$ 是函数 $f(x, y)$ 的连续点, 则 $\lim_{P \rightarrow P_0} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

(2) 利用极限的性质(如四则运算性质, 夹逼准则).

(3) 若观察出 $f(x, y)$ 的极限是 A , 利用极限的 $\epsilon - \delta$ 定义去证明 $\lim_{P \rightarrow P_0} f(x, y) = A$.

(4) 消去零因子的方法.

(5) 将二元问题转化为一元问题.

问题 15.6 若一元函数 $f(x_0, y)$ 在 y_0 处连续, 能否断定二元函数 $f(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 连续.

解答 不一定. 例如:

(1) $f(x, y) = |x| + |y|$ 在 $P_0(0, 0)$ 处, 由 $f(0, y) = |y|$, 知 $f(x, y)$ 在 $P_0(0, 0)$ 连续.

(2) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ 处 $P_0(0, 0)$ 上有 $f(0, y), f(x, 0)$ 都连续, 但是 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ 不

存在.

问题 15.7 计算偏导数 $f'_x(x_0, y_0)$ 时, 是否可以将 $y = y_0$ 先代入, 再对 x 求导数?

解答 直接由偏导数的定义可得出, 实际上对 x 求偏导数时, 就是将 y 看做常数, 再对 x 求导数.

问题 15.8 二阶混合偏导数 $f''_{xy}(x, y)$ 与 $f''_{yx}(x, y)$ 是否一定相等?

解答 不一定. 只有两个二阶混合偏导数连续时, 才有 $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$, 例如:

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

(1) 在点 $(0, 0)$ 处有 $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$.

(2) 当 $x^2 + y^2 \neq 0$ 时, 有

$$f'_x(x, y) = y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f'_y(x, y) = x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^3 y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f''_{xy}(x, y) = \frac{(x^2 - y^2)(x^4 + 10x^2 y^2 + y^4)}{(x^2 + y^2)^3}, \quad f''_{yx}(x, y) = \frac{(x^2 - y^2)(x^4 + 10x^2 y^2 + y^4)}{(x^2 + y^2)^3}$$

可见, 当 $x^2 + y^2 \neq 0$ 时, $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$, 但当 $x^2 + y^2 = 0$ 时, 有

$$f''_{xy}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f'_x(0, y) - f'_x(0, 0)}{y} = -1, \quad f''_{yx}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f'_y(x, 0) - f'_y(0, 0)}{x} = 1$$

所以 $f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$.

问题 15.9 在一元函数中, 若 $f(x)$ 满足条件: (1) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续; (2) $f(x)$ 在 (a, b) 上可导, 则 $f'(x) \equiv 0$ 的充要条件是在 $[a, b]$ 上 $f(x) \equiv k$. 多元函数是否也有类似的结果?

解答 若 $z = f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 在 D 内偏导数存在, 则

(1) 在 D 内 $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ (或 $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$) 的充要条件是 $f(x, y) = \varphi(y)$ (或 $f(x, y) = \varphi(x)$).

(2) 在 D 内 $\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ 的充要条件是 $f(x, y) = \text{常数} ((x, y) \in D)$.

问题 15.10 若 $f(x, y)$ 在区域 D 内任一点处可微, 且在沿两个不共线的方向导数皆为零, 则 $f(x, y) = \text{常数}$, 对吗?

解答 对. 设两个不共线的方向余弦分别为 $(\cos \alpha_1, \cos \beta_1)$ 和 $(\cos \alpha_2, \cos \beta_2)$, 由不共线知

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \beta_1 \\ \cos \alpha_2 & \cos \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ 故方程 } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta_1 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha_2 + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta_2 = 0 \end{cases} \text{ 只有零解, 由此知 } \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \text{ 故 } f(x, y) = \text{常数}.$$

问题 15.11 若 $f(x, y)$ 在区域 D 内任一点处有 $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, 则 $f(x, y) = \text{常数} ((x, y) \in D)$. 对吗?

解答 不一定. 例如 $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$ 满足题设条件, 但 $f(x, y) \neq \text{常数}$.

问题 15.12 在一元函数中, 若 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 必有 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 那么多元函数是否也有相同的结果, 即偏导数存在, 是否一定连续?

解答 不一定.

(1) $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ 在 $(0, 0)$ 的偏导数存在, 且 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 连续.

$$(2) f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \text{ 在 } (0, 0) \text{ 的偏导数为}$$

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta y} = 0$$

但 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ 不存在, 事实上, $\lim_{\substack{y=kx \\ x \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k}{1+k^2} = \frac{k}{1+k^2}$, 当 k 取不同值时其极限不同, 所以函数

$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 不连续.

(3) 连续不一定偏导数存在. 例如 $f(x,y) = |x| + |y|$ 在点 $(0,0)$ 连续, 但 $f'_x(0,0)$ 及 $f'_y(0,0)$ 都不存在.

问题 15.13 对于多元函数而言, 全微分存在, 函数必连续, 反之是否成立?

解答 不一定. 例如:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

由于

$$0 < \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{|xy|}$$

因此 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 连续, 且 $f'_x(0,0) = 0, f'_y(0,0) = 0$, 但是

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta z - [f'_x(0,0)\Delta x + f'_y(0,0)\Delta y]}{\rho} = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta x \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

不存在, 由微分的定义知, 函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不可微.

问题 15.14 多元函数的可微性与偏导数之间的关系如何?

解答 对于一元函数而言, 可微性与可导性是等价的, 但对多元函数而言:

(1) 可微 $\Rightarrow$ 偏导数存在.

(2) 偏导数连续 $\Rightarrow$ 可微.

(3) 偏导数存在, 不一定可微 (可见问题 15.12).

问题 15.15 设 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$, 当 $x=t, y=t$ 时, 求 $\left. \frac{df}{dt} \right|_{t=0}$ 有两种解法:

(1) 显然有 $f'_x(0,0) = 0, f'_y(0,0) = 0$, 由复合函数的求导公式得

$$\left. \frac{df}{dt} \right|_{t=0} = f'_x(0,0) \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} + f'_y(0,0) \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = 0 \times 1 + 0 \times 1 = 0$$

(2) 把 $x=t, y=t$ 代入原函数 $z = f(x,y) = \frac{t}{\sqrt{2}}$, 从而 $\left. \frac{df}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

上述两种解法结果不一样, 为什么?

解答 原因在于用了复合函数求导公式, 而用此公式的前提是要求全微分存在, 事实上函数 $z = f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的全微分不存在.

问题 15.16 一阶微分形式不变性在多元函数微分学中起什么作用?

解答 多元函数的一阶微分形式不变性, 给我们提供了一个求偏导数的简便方法, 即不需要区分函数由多少个中间变量复合而成, 变量之间的关系是如何错综复杂, 都不必去辨认区分, 仅分清清楚自变量是什么, 直到出现自变量的微分, 那么自变量微分的系数连同符号在内, 就是要求的对这个变量的偏导数.

15.4 考点及典型例题分析

GAODENGSHUXUE

1. 课程考试重点

- (1) 多元函数的概念、二元函数极限与二元函数的连续性;
- (2) 偏导数的概念、几何意义与计算;
- (3) 全微分的概念与计算;

(4) 多元复合函数偏导数的概念与计算;

(5) 隐函数的偏导数;

(6) 高阶偏导数的概念与计算.

2. 考研重点

(1) 多元函数的连续性;

(2) 偏导数的概念与计算;

(3) 高阶偏导数的概念与计算;

(4) 全微分的概念与计算.

例 15.1 判断 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2}$ 是否存在.

分析 选择直线 $y = kx$, 使得极限与 k 值有关, 从而说明极限不存在. 这是判断二重极限是否存在的一个常用方法.

解 当 (x, y) 沿直线 $y = x$ 趋于 0 时, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4} = 1$.

当 (x, y) 沿直线 $y = 2x$ 趋于 0 时, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^4}{4x^4 + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{4x^2 + 1} = 0$.

因为沿不同路径趋于 0 时, 函数极限不等, 所以原式极限不存在.

评注 二元函数的极限与一元函数的极限不同, 对于一元函数, 动点 $x \rightarrow x_0$ 只能沿直线方向, 而二元函数, 动点 $P(x, y) \rightarrow P_0(x_0, y_0)$ 可以是任意方式. 在证明二元函数极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$ 时, 我们常用的方法是适当放大 $|f(x, y) - A|$, 然后用夹逼准则. 在计算 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$ 时, 可以参照一元函数极限的解题思路, 如

无穷小代换、重要极限、复合函数的极限等变量替换的方法, 也可以采取借助四则运算、连续函数的极限、对函数作恒等变形消去零因子等方法. 在证明 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$ 不存在时, 我们有 3 种办法, 一是沿不同路径极限不相

等; 二是沿某一特殊路径极限不存在; 三是两个二次极限存在但不相等.

例 15.2 判断极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x+y}$ 是否存在.

分析 此题中路径不能全选择直线, 可以选择曲线.

解 当 (x, y) 沿曲线 $y = x^2 - x$ 趋于 0 时, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = x^2 - x}} \frac{xy}{x+y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x^2 - x)}{x^2} = -1$.

当 (x, y) 沿直线 $y = x$ 趋于 0 时, $\lim_{\substack{y=x \\ x \rightarrow 0}} \frac{xy}{x+y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x} = 0$.

因为沿不同路径趋于 0 时, 函数极限不等, 所以原式极限不存在.

评注 函数的分母是代数和的形式, 在选择趋近路径时, 就可以考虑将分母化为 x 的幂函数, 且分子是 x 与 y 的乘积, 故可以选择 $x+y = x^2$, 即 $y = x^2 - x$ 这条路径; 另外一条路径可以考虑低于或高于 2 次幂, 如选择 $x+y = 2x$, 即 $y = x$ 这条路径.

例 15.3 已知 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & x^4 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^4 + y^2 = 0 \end{cases}$,

(1) 讨论函数 $z = f(x, y)$ 的连续性; (2) 求 $f(x, y)$ 的一阶偏导数.

分析 这是多元分段函数. 当 $x^4 + y^2 \neq 0$ 时, 函数 $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ 是初等函数, 在其定义域内各点均连续, 而且可以按照求偏导数的法则求其偏导数. 当 $x^4 + y^2 = 0$ 时, 即在点 $(0, 0)$ 处, 应该按照多元函数在

一点连续、可导的定义进行讨论.

解 (1) 当 $x^4 + y^2 \neq 0$ 时, 函数 $f(x, y)$ 处处连续, 当 $x^4 + y^2 = 0$ 时, 若动点沿直线 $y = kx$ (k 为任意常数) 趋向于点 $(0, 0)$, 则有

$$\lim_{\substack{y=kx \\ x \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^3}{x^4 + k^2 x^2} = 0$$

若动点沿曲线 $y = x^2$ 趋向于点 $(0, 0)$, 则有

$$\lim_{\substack{y=x^2 \\ x \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2} \neq 0$$

所以 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ 不存在, 从而 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处不连续.

(2) 当 $x^4 + y^2 \neq 0$ 时,

$$f'_x(x, y) = \frac{2xy(x^4 + y^2) - 4x^5 y}{(x^4 + y^2)^2} = \frac{2xy(y^2 - x^4)}{(x^4 + y^2)^2}$$

$$f'_y(x, y) = \frac{x^2(x^4 + y^2) - 2x^2 y^2}{(x^4 + y^2)^2} = \frac{x^2(x^4 - y^2)}{(x^4 + y^2)^2}$$

当 $x^4 + y^2 = 0$ 时,

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y} = 0$$

所以一阶偏导数为

$$f'_x(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy(y^2 - x^4)}{(x^4 + y^2)^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

$$f'_y(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2(x^4 - y^2)}{(x^4 + y^2)^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

评注 对于多元分段函数, 在分段点的连续性和可导性必须用定义进行讨论.

例 15.4 设

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

(1) 讨论函数 $z = f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处的连续性;

(2) 求函数 $z = f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处的偏导数;

(3) 讨论函数 $z = f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处的可微性;

(4) 讨论偏导数在点 $(0, 0)$ 处的连续性.

分析 首先, 二元函数在一点处偏导数存在, 在该点处函数可能不连续. 二元函数偏导数存在不是连续的充分条件, 而连续也不是偏导数存在的必要条件. 例如, $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在点 $(0, 0)$ 处是连续的, 但是偏导数 $f'_x(0, 0)$, $f'_y(0, 0)$ 都不存在, 更不可微. 其次, 函数在一点处偏导数存在, 但在该点处不一定可微. 二元函数的两个偏导数存在是全微分存在的必要条件而不是充分条件, 两个偏导数在某一点的邻域内存在而且在该点连续, 才是二元函数在该点全微分存在的充分条件. 最后, 函数在 $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$ 时极限不存在, 从而函数在 (x_0, y_0) 点不连续, 全微分一定不存在; 反之, 若函数在 (x_0, y_0) 点连续, 则在该点极限一定存在.

解 (1) 因为 $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} [f(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - f(0, 0)]$