



普通高等教育“十二五”规划教材

数学实验与数学建模

林道荣 秦志林 周伟光 主编



科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

数学实验与数学建模

林道荣 秦志林 周伟光 主 编

刘东生 陆国平 主 审

科 学 出 版 社

北 京

序

在高等学校开设“数学实验”、“数学建模”课程是我国高等教育面向 21 世纪的改革举措,其目的是让大学生学会利用计算机及有关数学软件包,理解数学知识、掌握解决问题的方法、培养创新能力。

我们知道现代数学发展迅速,新的理论和新的方法不仅推动了数学本身及物理学等自然科学的发展,而且在工程技术、经济及社会等方面有广泛的应用。由于高等学校培养的大学生将来从事数学理论研究的是少数,大多数毕业生需要学会运用数学技术解决所从事工作的相关领域的实际问题,而“数学实验”、“数学建模”课程侧重的是让学生从具体的、现实的问题出发来学习和研究数学,进而能够自觉地运用数学理念、数学知识和定量的思维方法来解决实际问题。

教学质量提高依靠教学改革推动,教学改革首先要进行教学内容改革,而教学内容改革势必要求教材现代化。编写一部适合教学的教材是一件困难的事情,林道荣、秦志林、周伟光等多位老师通过教学实践进行了一些有益的探索和尝试,他们编写的《数学实验与数学建模》就是这几年教学改革的实践成果。该书有三个主要特色:一是通过精选反映当代科技进步与社会发展的若干问题作为教学素材,突出主要理论和主要方法,加强数学实验与数学建模的联系与渗透;二是开展研究性学习与课程设计,突出数学实验与数学建模课程和专业课程的联系,加强学生自主学习、小组学习;三是评述历年数学建模竞赛题,突出数学实验与数学建模课程的实用性,努力培养学生的创新能力、合作意识。

我很高兴为该书作序,希望该书能对大学数学教学现代化起到一些推动作用。我期待更多的数学教师能充分利用计算机等信息技术,更好地将数学知识传授给学生;同时期待着学生们能利用计算机等信息技术更加愉快地学习数学,掌握解决问题的方法,为国民经济又好又快发展作出更大的贡献。

秦志林

江苏省数学学会理事长
长江学者奖励计划特聘教授
南京大学数学系教授

2010 年 12 月

前 言

《数学实验与数学建模》是高等院校数学实验与数学建模课的教材,适用于理、工、农、医、文各类高等院校,凡是开设“数学分析”、“高等代数”或“高等数学”、“线性代数”课程的高等院校都可以使用。

在大学中开设“数学实验”课程,是教育部组织的“高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”课题组的重要研究成果。该课程的教学对象是全国所有高校,不分理、工、农、医、文等科类,不分数学与非数学专业的学生。课程目的是使学生掌握数学实验的基本思想和方法,即不把数学看成先验的逻辑体系,而是把它视为一门“实验科学”,从问题出发,借助计算机,通过学生亲自设计和动手,体验解决问题的过程,从实验中去学习、探索和发现数学规律。

“数学建模”课程涉及“数学建模竞赛”。数学建模竞赛 20 世纪 80 年代源于美国。美国数学建模竞赛每年 2 月进行,竞赛用时 4 天;中国大学生数学建模竞赛始于 1992 年的北京、西安等 8 大城市联赛,从 1994 年起,这一竞赛由教育部高教司和中国工业与应用数学学会主办,每年 9 月进行,竞赛用时 3 天。围绕大学生数学建模竞赛开设的“数学建模”课程,将数学方法、知识和一些真实问题联系起来,将大学生的理想与现实世界和数学联系起来。正是数学建模活动的开展,促进了计算机和数学软件在数学教学中的使用,使得数学实验能广泛开展。

我们几所高校都开设了“数学实验”、“数学建模”课程,有必修有选修。学生们不但对于听课很有兴趣,而且主动积极地完成所布置的作业,在作业中表现出了极大的兴趣和创造性,并对教学、教材提出了许多很好的建议,其中之一是清华大学姜启源的《数学模型》教材的部分内容不适合非重点大学的学生。我们也注意到以前所编《数学实验》教材缺乏实验思路方面的内容。基于此,我们对教材从 6 方面加以改革:一是突出主要理论和主要方法,避免理论烦琐、方法零碎,使学生尽快掌握数学实验与数学建模的基本理论和方法,为学生专业课学习打下良好的基础;二是加强数学实验与数学建模

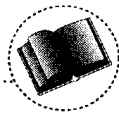


的联系与渗透,避免数学实验与数学建模割裂,使学生能运用数学和计算机解决专业乃至实际问题,为学生毕业设计(论文)工作和参加数学建模等竞赛提供有效手段;三是开展研究性学习,避免学生被动学习,使学生在教师指导下进行专题学习,为提高学生的学习能力另辟蹊径;四是引进课程设计,力求学生主导学习,使学生能够运用所学数学实验与数学建模及其他课程的理论和方法系统地解决专业问题,为学生参加工作和进一步深造提供平台;五是评述历年数学建模竞赛题,使学生拓宽解决实际问题的思路,为学生参加数学建模竞赛取得优异成绩作好准备;六是精选反映当代科技进步与社会发展的问题作为教学素材,弘扬创新与应用的精神,使学生理解所学知识的重要作用,为学生立志献身科学、服务社会树立典范。

我们编写的《数学实验与数学建模》教材,源于教学改革实践,力图从两方面有所体现:一是把“数学实验”与“数学建模”两门课程的教学内容合并为“数学实验与数学建模”课程的教学内容,反映了近几年来我们在“数学实验与数学建模”课程中的教学实践经验;二是首次编写研究性学习与课程设计的教学内容,展示了近几年来我们在“数学实验与数学建模”课程中的教学改革成果。

本书除数学实验、数学建模两篇内容外,另有研究性学习与课程设计、数学建模竞赛活动两篇内容。由于教材内容丰富面广,经全体编写人员讨论,由林道荣、秦志林、周伟光任主编,李苏北、陈荣军、张立、伍鸣、钱黎明、田瀚、周小建、夏海峰、田蓓艺、钱峰、缪雪晴、刘晓惠任副主编,分3组进行教材编写,由林道荣负责全书统稿。数学实验部分由林道荣(统稿,编写第4章、第5章)任主编,刘晓惠(编写第1章、第3章)、周小建(编写2.1节、2.2节)、田瀚(编写2.3节)任副主编;数学建模部分由秦志林(统稿,编写第11章、第12章)任主编,李苏北(编写第6章、第9章)、陈荣军(编写第7章)、田蓓艺(编写第8章)、钱黎明(编写第10章)、钱峰(编写第13章)、夏海峰(编写第14章)任副主编;研究性学习与课程设计和数学建模竞赛活动部分由周伟光(统稿,编写第16章)任主编,缪雪晴(编写第15章)、张立(编写第17章)、伍鸣(编写第18章)任副主编。陆志峰、丁国生、王建宏参加了部分教材内容的编写工作,全书插图由堵军绘制。

本书由南通大学、淮阴师范学院、南京晓庄学院、徐州工程学院、常州工学院、常熟理工学院、金陵科技学院、江苏信息职业技术学院、南通纺织职业技术学院、淮安信息职业技术学院等高校联合编写,得到了各级领导的大力支持和帮助。本书的出版还得



到了南通大学教务处和理学院、淮阴师范学院数学科学学院、南京晓庄学院数学与信息技术学院的资助。英国曼彻斯特大学 (University of Manchester) 数学系教授、南京理工大学理学院应用数学系特聘教授刘东生博士, 江苏信息职业技术学院院长、江南大学博士生导师陆国平教授认真审阅了本书, 并提出了许多宝贵意见。科学出版社的领导和编辑张中兴女士为本书的出版做了大量细致的工作, 在此一并向他们表示感谢! 此外, 在教材编写中我们参考了有关数学实验和数学建模方面的教材、论文, 特此向原作者表示敬意和感谢!

由于编者水平有限, 书中不妥及疏漏之处在所难免, 敬请读者批评指正。

编 者

2010 年 12 月

目 录

序
前言

第一篇 数学实验

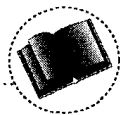
第 1 章 数学实验绪论	3
1.1 数学实验的理解	3
1.2 数学实验的内容与方法	5
第 2 章 常见软件包简介	8
2.1 Mathematica 简介	8
2.2 MATLAB 简介	24
2.3 LINGO 简介	46
第 3 章 基础实验	56
3.1 函数的简单函数表示	56
3.2 初等变换与初等方阵	61
3.3 频率与概率	64
第 4 章 探索实验	69
4.1 π 的计算	69
4.2 最速降线	77
第 5 章 数学建模实验	87
5.1 蚊虫分类问题	87
5.2 追击曲线	91

第二篇 数学建模

第 6 章 数学建模绪论	99
6.1 数学建模的理解	99



6.2	数学建模的内容与方法	100
6.3	数学建模的意义	102
第 7 章	初等模型	105
7.1	椅子能在不平的地面上放稳吗	105
7.2	学生会代表名额分配	107
7.3	汽车的安全刹车距离	110
7.4	生猪体重的估计	113
7.5	核军备竞赛	115
7.6	使用新材料与新方法的房屋节能效果	118
第 8 章	代数模型	124
8.1	住房贷款利率与还本付息方案	124
8.2	体育竞赛赛程安排	130
8.3	植物基因的分布	134
8.4	城市交通流量	138
第 9 章	微分方程模型	142
9.1	人口模型	142
9.2	SARS 传染病模型	147
9.3	酒精残留模型	154
9.4	微分方程稳定性基本理论介绍	158
第 10 章	差分方程模型	162
10.1	差分方程基本理论介绍	162
10.2	减肥计划——节食与运动	166
10.3	市场经济中的蛛网模型与 Logistic 模型	169
第 11 章	静态优化模型	175
11.1	贮存模型	175
11.2	森林救火	178
11.3	生猪的出栏时机	181
11.4	商品销售的最优价格	184
11.5	通信基站的选址与移动电话网络设计	187



第 12 章	动态优化模型	193
12.1	帆船海上航行时船的方向与帆的朝向	193
12.2	捕鱼业的持续收获与休渔政策	197
12.3	商人安全渡河	203
12.4	经济计划制订与国民收入增长	205
第 13 章	随机模型	210
13.1	传送系统的效率	210
13.2	轧钢中的浪费	212
13.3	航空公司的预订票策略	216
13.4	教学评估	222
13.5	保险公司人寿险设计	225
第 14 章	离散数学模型	229
14.1	层次分析法与就业单位选择	229
14.2	篮球单循环比赛的排名	236
14.3	多阶段生产计划	240
14.4	灾区慰问路线确定	245
第三篇 研究性学习与课程设计		
第 15 章	研究性学习	255
15.1	研究性学习概述	255
15.2	艾滋病的疗效	257
15.3	一元三次方程的实根个数	270
第 16 章	课程设计	275
16.1	生产函数	275
16.2	城市公交乘坐路线选择	283
第四篇 数学建模竞赛活动		
第 17 章	中国大学生数学建模竞赛	293
17.1	中国大学生数学建模竞赛简介	293
17.2	历年部分竞赛题评述	294



第 18 章 美国大学生数学建模竞赛	299
18.1 美国大学生数学建模竞赛简介	299
18.2 历年部分竞赛题评述	300
参考文献	303

第一篇 数学实验

第 1 章

数学实验绪论

在大学中开设“数学实验”课,是教育部组织的“高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”课题组的重要研究成果.该课程的教学目的是使学生掌握数学实验的基本思想和方法,即不把数学看成先验的逻辑体系,而是把它视为一门“实验科学”,从问题出发,借助计算机,通过学生亲自设计和动手,体验解决问题的过程,从实验中去学习、探索和发现数学规律.

本章首先解释数学实验,其次介绍数学实验课程的内容与方法.

1.1 数学实验的理解

实验是科学研究的基本方法之一,数学也不例外.但是,传统数学教学常常把数学过分形式化,忽视探索重要数学知识形成过程的实践活动.在高校的基础课中,数学只有习题课,而没有实验课.数学的习题课,对于巩固课堂教学一直起着重要的作用.然而,习题课不能解决数学教学和计算机的信息技术的结合问题,也就难以将培养学生数学素质的任务落到实处.数学实验课是改革数学教育的一门新课程,其目的是让学生利用计算机的信息技术理解数学问题、探索数学问题、解决数学问题,培养学生的创新能力.

数学实验首先是一种教学模式,是大学数学课程的重要组成部分,是与“微积分”、“线性代数”、“概率统计与数理统计”等课程同步开设的重要教学环节,它将数学知识、数学建模与计算机应用三种有机融为一体.通过数学实验,学生能深入理解数学基本概念和基本理论,熟悉常用数学软件,进而培养其运用所学知识建立数学模型,使用计算机解决实际问题的能力.

数学实验课与其他课程是既有区别又有联系的.① 数学实验课程与“计算方法”、



“概率统计”、“最优化理论”等课程密切相关,但又存在着明显的差别.数学实验课尽管也要介绍和使用数值计算方法、统计方法、优化方法等课程,但是不应取代这些课程.否则,学生会失去兴趣,认为反正还要上这些课程,何必上数学实验课呢?为划清这一界限,数学实验课所用到的方法应当比较简单和浅显,由“微积分”和“线性代数”课程中的内容能很快推出来(其推导难度只应相当于微积分习题),而不需要花时间和精力作专门的讲解.而关于专门的、比较精细的专门方法的讲解,则留给这些课程去完成.当然,这些课程本身也应改革,不能纸上谈兵,也应以学生自己动手实践作为重要环节,像工科专业课程的课程设计那样.② 数学实验与数学建模在一定程度上是相似的,以至于人们经常混淆这两门课程,甚至将数学实验当作数学建模.数学建模与数学实验课都要用到计算机.但数学建模是让学生学会利用数学知识和计算机为手段来解决实际问题,而数学实验课侧重于在计算机的帮助下学习数学知识.一个是用,一个是学.两者的目标不同.数学建模强调问题的实用性而不强调普遍意义,解决问题本身就是目的;数学实验课可以从理论问题出发,也可由实际问题出发,但这个理论问题或实际问题最好是比较经典的、具有普遍意义,让学生以解决问题为线索总结规律,学到知识.当然,数学实验课可以作为数学建模课的预备课程,使学生可以更快地掌握数学建模的基本方法和能力.③ 数学实验课程以计算机为工具,与计算机课程也密切联系.对于非计算机专业的学生来说,计算机知识(计算机语言以及软件的使用等)只是一种工具.好比学语言,不能只停留一个个的单词和一条条的语法规则,而必须通过阅读课文来学并且要达到学以致用,就要读报纸、读小说等.学计算机语言也是这样,应当结合解决一定的问题来学,学了就要用来解决问题,才使学生有兴趣学,才能学得会,才不会忘记.在大学里的计算机语言课有时和其他课程(特别是数学课程)脱节,导致学生学习计算机语言也只是为了学分,考过了就忘了,到高年级真需要用时又得复习.开设数学实验课有利于计算机课程的学习,迫使学生学好计算机知识来学习数学,从而解决实际问题.另一方面,数学实验课又为计算机课程提供了大量练习机会,提高计算机课程的教学效果.

其次,数学实验也是一种实验,是用实验的方法来解决实际问题.它与物理实验、化学实验有相通的地方,但又有所区别.物理、化学实验课往往是把实验的每个步骤都给学生规定得很详细,学生只需按部就班完成这些步骤,而实验的结果也是预先就知道了的,留给学生探索的余地不多.数学实验课只是把实验的背景和相关理论知识教给学生,要求学生自己制订实验计划,设计实验思路,实验的结果也是未知的,需要学生自己动手,通过大量实验发现实验结论.



最后, 数学实验还是科学研究方法. 波利亚 (Polya) 曾经指出: “数学有两个侧面, 一方面是欧几里得式的严谨科学, 从这个方面看, 数学是一门系统的演绎科学, 另一方面, 创造过程中的数学, 看起来更像一门实验性的归纳科学.” 科学实验是知识的源泉, 是推动科技发展和社会进步的重要动力. 如果在数学的教与学中能运用数学创造过程中使用的实验手段, 在实验中观察、分析、比较、归纳, 通过探索、猜想、验证、处理数据和确立关系来发现规律, 将是更好的选择. 运用现代数学技术在计算机上进行数学实验, 现在已经成为可能. 目前, 现代数学技术的应用已非常广泛, 也产生了较大的影响. 应用现代数学技术进行数学实验, 不仅改变了数学研究方法、应用模式和学习方法等, 更重要的是改变了数学的基本理论, 产生了一些新的数学学科分支和方向, 如符号计算、人工智能、运筹优化等. 在其他学科之中, 应用现代数学技术中的数字模拟和数据处理技术, 使天文学中超新星的爆发、地学中地壳运动、大型综合军事演习、核爆炸等难以进行实验的过程, 可以通过数学模型来模拟, 从而对各种理论进行检验. 不仅如此, 现代数学实验技术还被广泛应用在社会学、文学、美学、考古等的研究和教学中, 使其“数字化”、“理性化”.

1.2 数学实验的内容与方法

数学实验课和传统的数学课程的一个重要区别是, 传统的课程注重知识的传授和逻辑推理能力的培养, 而数学实验课则侧重于将实际问题转化为数学问题, 即数学建模能力的培养. 首要的是培养学生用量的观念去观察和把握现象的能力, 培养学生综合运用数学知识分析和解决实际问题的意识, 即数学素质.

另一个区别是, 传统数学课程的运算能力培养, 主要指的是寻求解析解的能力, 包括许许多多的变换和技巧, 而这些训练势必使课程内容臃肿不堪, 增加学生负担. 数学实验课则更侧重于创新意识和科学计算能力的培养, 也就是运用现代的计算机技术和软件包来取代那些繁杂的推演和复杂的运算技巧. 由于软件包技术的高速发展, 不仅能完成复杂的数值计算, 也能进行符号演算以及机器证明等工作, 因此, 数学实验课是加强实践性的一个重要环节.

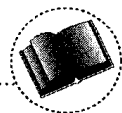
数学实验课程教学内容设计的指导思想是: 从实际问题出发, 借助计算机, 通过亲自设计和动手, 体验解决问题的过程, 从实验中去学习、探索和发现数学规律. 实验内容的设计不在于传授学生多少数学知识, 不追求其系统性、完整性, 而应当激发学生自己



动手和探索的兴趣. 根据上述指导思想, 数学实验可以包括三部分主要内容: 第一部分是基础实验, 重点是微积分和线性代数, 从宏观的角度去学习数学的基本概念, 理解数学的基本原理, 掌握用计算机软件进行直观作图和科学计算的方法, 体验如何发现、总结和应用数学规律. 第二部分是探索实验, 以微积分和线性代数为中心向边缘学科发散, 可能涉及微分几何、数值方法、数理统计、图论与组合、微分方程、运筹与优化等, 也可能涉及现代新兴的学科和方向, 如分形、混沌等. 这部分内容无论是对数学专业还是对非数学专业的学生来说, 都是全新的、困难的. 因此, 不必强调完整性. 教师可以介绍其中的主要的思想, 提出问题和任务, 让学生尝试通过自己动手和观察实验结果发现和总结其中的规律. 即使总结不出来也没有关系, 留待将来再学, 有兴趣的可以自己找参考书寻找答案. 在设计数学实验内容的时候, 要注意有意识的让学生通过实验学会一些基本的方法, 但是我们并不以这些方法为线索组织课程内容. 为此, 可以设计一些能够引起学生兴趣的问题, 每个实验围绕解决一个或几个问题来展开, 教学生使用若干种方法来解解决所给的问题. 在解决问题中学习和熟悉这些方法, 自己观察结果, 得出结论. 例如, 围绕计算圆周率的近似值这一问题学习数值积分法、泰勒 (Taylor) 级数法、蒙特卡罗 (Monte Carlo) 法、分数向无理数的最佳逼近; 围绕最速降线学习各种优化方法等. 第三部分是建模实验, 注重实际问题建模方法和数值计算方法的介绍, 以及运用软件包进行二次开发的能力.

数学实验课程的教学方法可以参考物理实验、化学实验的教学方法, 也可以参考数学教学方法, 甚至采用哲学与社会科学的的教学方法. 像物理实验或化学实验并不需要花多少时间讲解理论和原理, 讲解理论和原理是物理、化学的理论课程的任务. 实验课主要是学生自己做实验, 观察实验过程和分析实验结果. 因此, 不要在数学实验课上讲很多理论, 也不应当花很多时间和精力去教算法. 我们在设计数学实验课的时候尽量留些问题让学生自己去设计方法来解决, 避免把实验课变成单纯传授计算技术的课程. 在每次实验中, 可以先由教师讲两个课时, 主要是提出问题, 适当介绍问题的背景, 介绍主要的实验原理和方法. 然后就让学生自己动手去做、自己去折腾、去观察, 通过实验得出结论. 本来, 实验结果一般都可以用理论推导出来, 但这绝不是本课程的目的, 教师不花时间去作这种理论推导, 也不预先告诉学生实验的结果, 实验结果让学生自己观察得出.

数学实验课采用讲授和上机相结合的方式, 通常分三步进行. 第一步, 由教师讲解实验中问题的具体背景, 相关的建模方法和数值计算的方法. 包括条件的化简、因素的



离和选择变量, 以及建立变量之间关系的数学方法, 并对所建立的数学模型求解的理论和实现计算的计算机指令等. 第二步, 由学生分组在课外进行讨论, 建立模型, 作好解答的准备. 第三步, 上机操作, 用数学软件求出解析解和数值解, 重点在数值解, 最后写出实验报告.

数学实验课平时成绩评定的唯一依据是实验报告. 实验报告评分的最基本标准是评价学生的动手能力. 同学们要写上自己观察到的现象并进行分析, 实话实说、不能造假. 哪怕观察到的现象与预计不一致或者与理论推导的结果不一致, 也不能在实验报告中说假话, 而应当分析其原因, 找出改进的办法、重做实验、重新得出结论. 对实验报告的更高的标准是创造性. 对于有创造性的报告, 应给以高分作为鼓励. 教师批改了实验报告之后, 要安排时间, 对以前的实验中出现的优点和缺点进行评讲, 并让学生参加讨论. 对实验报告, 主要是探索实验和建模实验的实验报告, 一般要求学生完成三个. 数学实验课的考试为开卷考试, 主要考查动手能力.