中国计算机学会学术著作丛书

计算几何

——算法设计与分析(第4版)

周培德 著

清华大学出版社

中国计算机学会学术著作丛书

计算几何

——算法设计与分析(第4版)

Computational Geometry

Algorithm Design and Analysis

Analysis dition)

清华大学出版社

北京

内 容 简 介

本书系统地介绍了计算几何中的基本概念、求解诸多问题的算法及复杂性分析，概括了求解几何问题所特有的许多思想方法、几何结构与数据结构。全书共分 10 章，包括：预备知识，几何查找(检索)，多边形，凸壳及其应用，Voronoi 图、三角剖分及其应用，交与并及其应用，多边形的获取及相关问题，几何体的划分与等分，路径与回路，几何拓扑网络设计等。

本书可作为高等院校计算机、自动化等专业研究生或本科高年级学生的教材或教学参考书，也可供软件开发人员、相关专业科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

计算几何：算法设计与分析/周培德著. --4 版. --北京：清华大学出版社，2011.9
(中国计算机学会学术著作丛书)
ISBN 978-7-302-25997-8

Ⅰ. ①计…　Ⅱ. ①周…　Ⅲ. ①电子计算机—算法设计 ②电子计算机—算法分析
Ⅳ. ①TP301.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 129753 号

责任编辑：薛　慧
责任校对：赵丽敏
责任印制：王秀菊
出版发行：清华大学出版社　　**地　址**：北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn　　**邮　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者：清华大学印刷厂
装 订 者：三河市金元印装有限公司
经　销：全国新华书店
开　本：175×245　**印 张**：39　**字 数**：761 千字
版　次：2011 年 9 月第 4 版　　**印　次**：2011 年 9 月第1 次印刷
印　数：1～3000
定　价：82.00 元

产品编号：040599-01

清华大学出版社计算机学术著作出版基金

评审委员会

中国计算机学会学术著作丛书

第4版前言

Foreword

第4版对第3版的补充与修改如下：

1. 增加了作者于2008年1月至2010年2月发明的118个计算机算法。全书303个(其中232个已编码,71个未编码)计算机算法均为作者所发明。

2. 删去第3版中的第10章及所有他人发明的47个计算机算法,这是由于作者难以征得这些算法发明人的同意(避免引起不必要的纠纷),故将此删去。

3. 对4.2.2节等作了必要的修改。

本书是作者长期从事计算几何领域研究所取得的成果的汇总,它不是一部入门的教材。在内容叙述方面(第4版新增部分),力求简要,因此不适合初学者阅读。此外,有一定基础的读者阅读本书,特别是需要使用其中的某些算法时,应仔细进行研究,可能还需要作些补充与修改。

美国Smith College计算机科学系Joseph O'Rourke教授于2009年6月1日给作者发来一封电子邮件:"Your list of open problems shows you are talented and creative."由此可见,作者提出的待解决问题具有重要意义。期盼国内同行能给予适当关注。

虽然平面点集最小权三角剖分问题已经被证明是NP-难的,但由于平面线段集最小权三角剖分问题与平面点线集最小权三角剖分问题等均为平面点集最小权三角剖分

问题的子问题，故后者的问题性质有待证明。也就是说，平面线段集及平面点线集最小权三角剖分问题属于P类还是NP-难？事实上，这是两个新的悬而未决的问题。

作者提出的待解决问题6，其意义是，如果长时间找不到反例，那么就增加了对“P＝NP”的信念。此外，如果能将货郎担问题输入点的分布与问题性质的关系确定下来，那么对货郎担问题的研究将取得重要进展。这是待解决问题9的意义。事实上，$Z_{4\text{-}13}$算法中“点团”划入哪个区域是至关重要的，它直接影响解的质量。

作者的水平十分有限，书中的缺点和错误在所难免，敬请读者批评指正。

周培德

2010.12

E-mail：zhou-pd@sina.com

第1版前言

Foreword

1975年，Shamos（沙莫斯）和Hoey（霍伊）利用计算机有效地计算平面点集的Voronoi图，并发表了一篇著名论文，从此计算几何诞生了。自那时以来该研究领域取得了辉煌的成果，使得计算几何成为理论计算机科学领域中一个新的极有生命力的子领域，并且，计算几何中的研究成果已在计算机图形学、化学、统计分析、模式识别、地理数据库以及其他许多领域中得到了广泛的应用。

计算几何研究的典型问题由几何基元（geometric primitives）、查找、优化等问题类组成。

首先，几何基元包括凸壳和Voronoi图、多边形的三角剖分、划分问题（partition problems）与相交问题。E^{d+1}中点集S的下凸壳在E^d中的投影恰好是点集S在E^d中投影点的Delaunay三角剖分，然后由Delaunay三角剖分可以容易地得到Voronoi图。换言之，Voronoi图是凸壳的特例，因此构造E^{d+1}中点集凸壳的算法也可以用于构造E^d中点集的Voronoi图。对多边形的三角剖分问题可以提出如下要求：设计复杂度低的算法构造多边形三角剖分以及设计三角形最小角最大化的三角剖分算法；分割线段长度之和最小的三角剖分算法。前者已有线性时间的算法。划分问题是多边形三角剖分的推广，它要求把几何体划分成若干好的部分。所谓好的部分通常是指下述两个目标之一：

划分成尽量少的凸部分；各凸部分最小角最大化。另外，在几何体中可以加入 Steiner 点(新的顶点)，然后再进行划分，使得划分线段长度之和最小化或者提出其他要求。二维中的典型相交问题是：给定平面上 n 条直线段，确定所有的相交线对。三维中的相交问题一般考虑两个凸多面体的交以及两个多面体的交。

其次，几何查找包括点定位、可视化、区域查找等问题。计算机图形学、数据库中的区域查找及地理图形中的点定位等都是几何查找中的典型例子。在平面细分(planar subdivision)中定位一个询问点或者在 $E^d(d \geqslant 3)$ 内由 n 个超平面构成的结构中定位询问点的问题是一个典型问题，现在不仅有解决这个问题的确定型算法，而且设计了动态随机增量算法。给定平面上 n 个顶点的简单多边形 P，由点 q 向任一方向引射线 l，确定 l 与 P 相交的第一条边，这个问题的解决为可视化问题的求解提供了前提。E^d 中给定点集 S 及区域集合 B，$b \in B$，要求在 b 中查找 S 中的点，这是区域查找问题。

再次，几何优化包括参数查找和线性规划。参数查找技术是将一个优化问题的检验算法变成寻找解的算法，它必须满足某些条件(检验算法是可以并行的)，并且具有广泛的应用性。例如，可用它来求解平面中 2-中心问题，还可以用来完成三维空间中射线的安置。众所周知，有确定变元数目的线性规划问题已有线性时间算法求解，但对于广义线性规划是否存在多项式时间算法还有待进一步研究。

此外，计算几何中各种问题的下界的确定、推导下界的方法以及求解各种几何问题的算法的复杂性分析等，也是计算几何研究的重要内容。

计算几何中引入随机化之后，已经设计出非常有效的概率算法求解诸多几何问题。随机化给几何算法设计带来两种新的设计思想：基于随机抽样的分治方法；利用随机顺序插入产生随机增量结构。此外，随机几何算法的复杂性分析以及随机增量结构的非随机化也是重要的研究内容。

计算几何的新近发展包括几何抽样理论、计算实代数几何、计算拓扑、运动规划、并行计算几何、隐藏面的移动、结构和图形、网络生成以及计算机视觉中的几何问题等。计算机在各学科领域深层次的应用将为计算几何提出更多的研究问题；反之，计算几何的研究成果也将促进这些学科的进一步发展。

本书是以上述部分问题的前人研究成果与作者在本领域中所做的工作为基础撰写而成的。书中主要叙述解决某些几何问题的算法并兼顾复杂性分析。书中较详细地陈述了 98 个算法，其中 39 个算法是作者提出的，并编号为 $Z_{1\text{-}1}$ 算法至 $Z_{10\text{-}2}$ 算法。书中的某些 Z 算法是以基本形式出现的，对这些算法可以进行修改并降低复杂性的阶或扩充应用范围，而且实现这些算法的某些步骤需要一些技巧。

全书共分 11 章。第 0 章是预备知识。第 1 章介绍几何查找，包括点和点集的定位、范围查找与平面网络的处理。第 2 章叙述多边形与多边形的划分及

相关问题。第 3、4、7 章分别介绍计算几何中的三个基本结构：凸壳、Voronoi 图与几何体的排列。第 5 章阐述线段、多边形、半平面、凸多面体的交，多边形的并及应用。第 6 章介绍矩形几何。第 8 章叙述算法的运动规划，所讨论的问题源于机器人学。第 9 章的中心论题是几何拓扑网络设计，其内容具有广泛的实用性。第 10 章介绍随机几何算法和并行几何算法。

描述算法有诸多形式。为了便于理解算法又不至于产生二义性，而且利于编制上机程序，本书描述算法就不拘泥于某一种形式，但以步骤、拟 ALGOL 语言、中文语句、数学表达式及逻辑运算符等相结合的描述形式为主。另外，本书以处于一般位置的几何体为讨论对象。对于退化情况，则另行处理。

设计求解几何问题(或能转化为几何问题的问题)的算法应具备两个条件，一是分析并理解问题的几何特征；二是掌握计算几何中的几何结构、特殊的算法设计方法及相应的数据结构。计算几何和计算机科学中的算法设计与分析、数据结构等学科关系密切，它常常要用到这些学科的知识。但由于篇幅有限，本书将重点阐述计算几何学科的思想方法、几何结构、几何问题以及求解这些问题的算法和复杂性分析，而对算法分析、数据结构中的相关知识只简略地回忆。因此，阅读本书的读者应具备算法设计与分析、数据结构、程序设计等领域的知识，并能熟练地掌握某种高级语言，比如 C 语言，以便上机实现书中描述的算法。

本书可作为计算几何、计算理论、计算机图形学、计算机辅助设计、机器人学及相关领域科技工作者的参考书，也可作为计算机科学有关专业研究生或本科高年级学生的教材使用。

本书在撰写中引用了 Preparata F P 和 Shamos M I，O'Rourke J，Mulmuley K，MacGregor Smith J，Mehlhorn K，Chazelle B，Goodrich M T 等诸多专家、学者的文献；清华大学著名教授卢开澄先生仔细审阅了本书底稿，并提出许多宝贵意见；余荣老师提供了大量参考资料，为缩短本书的撰写周期付出了辛勤的劳动，作者在此一并表示衷心的感谢。此外，还要感谢清华大学出版社和广西科学技术出版社的"计算机学术著作出版基金"所给予的资助。

由于作者水平有限，书中定有缺点和错误，恳请广大读者批评指正。

周培德

1999 年 12 月

于北京理工大学计算机系

目录

Contents

第 0 章 预备知识

本书叙述的内容不属于欧几里得的几何证明公理化范畴，而是属于欧几里得的几何构造，即由算法和复杂性分析所组成。欧几里得的几何构造满足算法的所有要求：无二义性、有穷性、确定性、能行性、输入、输出、正确性等。在欧几里得的几何构造中，限定了可允许使用的工具（直尺和圆规）及原始运算（圆规的一个脚置于一个给定点或一条直线上；作一个圆；直尺的边通过一个给定点；作一条直线）。但欧几里得原始运算并不能胜任所有的几何计算（如角的三等分），这一点直到 19 世纪，阿贝尔、伽罗华等数学家才给出了证明。

在一个几何构造过程中，执行原始运算的总次数称为该过程的复杂性度量，这个概念对应于算法的时间复杂度。同样地，还有对应于算法的空间复杂度的概念。这是欧几里得几何构造过程复杂性的定量测度。

称为计算几何的学科大致有下述几种：Forrest 等人依据样条函数处理曲线和曲面（实际上更接近于数值分析）；Minsky 和 Papert 写的一本名为《感知机》的书（副标题为“计算几何”），该书陈述用简单回路构成的网络实现模式识别的可能性（应属于人工神经网络）；计算机图形学是研究用计算机进行图形信息处理（包括表示、输入、输出、存储、显示、检索与变换等）和图形运算（如图的并、交运算）的一门学科，而不

是算法分析；几何定理的机器证明，主要研究定理证明的探索方法及证明过程的推断，而不是几何本身。本书讨论的内容与上述计算几何学科所研究的内容不同，是属于 Shamos 的文章(1975a)中命名的“计算几何”。为了不与上述“计算几何”的命名混淆，并突出 Shamos 的计算几何是研究几何问题的算法及复杂性的，故本书中将 Shamos 的计算几何称为 S 计算几何，而书名仍称为计算几何。

欧几里得货郎担问题、最小生成树问题、隐藏线(面)问题和线性规划问题等许多问题是 S 计算几何研究的基本问题。在 19 世纪的文献中，已经出现了对这些问题的算法研究，但对几何问题进行几何算法的系统研究还是近 20 多年的事情。

本书将通过对几何问题的研究，在以下各章节中给出 S 计算几何的观点、研究方法与几种重要的几何结构。S 计算几何的一个基本观点是，经典的几何对象的表征常常不适合于有效算法的设计。因此有必要建立一些概念及相关的性质，以适应于有效算法的设计。

本章将介绍有关算法与数据结构的一些知识、几何知识及计算模型。这些内容是以后章节所需要的。

0.1 算法与数据结构

0.1.1 算法

众所周知，算法是求解一个问题类的无二义性的有穷过程。这里的过程是指求解问题执行的一步一步动作的集合，每一步动作只需要有限的存储单元和有限的操作时间。另外，如果详细说明一台典型的计算机以及与这种计算机通信的语言，那么凡用这种语言编写的、可以在给定的计算机上执行的过程便称为算法。随机存取机器(RAM)、图灵机等可以作为典型的计算机，拟 ALGOL 语言作为描述算法而非执行的语言。应该指出，算法不等于程序，因此描述算法的方式将是多种形式的，如在拟 ALGOL 语言的描述中可以使用数学记号和自然语言。为了把算法转换成上机程序，还需要进行编程工作。

算法的复杂性包括算法的时间复杂性和算法的空间复杂性。为了说明复杂性的概念，先介绍问题规模的概念。用一个与问题相关的整数量来衡量问题的大小，该整数量表示输入数据量的尺度，称为问题的规模。比如，行列式的规模可以用其阶数 n 来表示，图问题的规模可以用其边数或顶点数来表示，等等。

利用某算法处理一个问题规模为 n 的输入所需要的时间，称为该算法的时间复杂性。它显然是 n 的函数，记为 $T(n)$。

类似地，可以定义算法的空间复杂性 $S(n)$。

下面主要讨论算法的时间复杂性。由于一般不需要知道精确的时间耗费，只