普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套教辅

线性代数

同步辅导与复习提高

◆ 金 路 编

復旦大學出版社
www.fudanpress.com.cn

线性代数

同步辅导与复习提高

金　路　编

復旦大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数同步辅导与复习提高/金路编.一上海:复旦大学出版社，2011.5
ISBN 978-7-309-08076-6

Ⅰ.线…　Ⅱ.金…　Ⅲ.线性代数-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 061906 号

线性代数同步辅导与复习提高
金　路　编
责任编辑/范仁梅

复旦大学出版社有限公司出版发行
上海市国权路 579 号　邮编:200433
网址:fupnet@fudanpress.com　http://www.fudanpress.com
门市零售:86-21-65642857　团体订购:86-21-65118853
外埠邮购:86-21-65109143
上海崇明南海印刷厂

开本 787×960　1/16　印张 18.5　字数 345 千
2011 年 5 月第 1 版第 1 次印刷
印数 1—4 100

ISBN 978-7-309-08076-6/O·468
定价: 33.00 元

前　言

大学数学教育包括分析、代数、几何和随机数学这几部分内容."线性代数"就是讲授代数学基础知识的数学课程,其内容是关于有限维空间的线性理论.由于线性问题广泛存在于数学、自然科学、工程技术和社会科学等各个领域,许多非线性问题在一定条件下也可以转化为线性问题来处理,尤其是数值分析的飞速发展及计算机的广泛应用,许多实际问题可以通过离散化的数值计算得到定量的解决,因此线性代数的思想与方法在各个领域的应用越来越广泛."线性代数"课程与其他数学课程既有着密切的联系,又有着自身的特点.它既有较强的抽象性和逻辑性,也有着广泛的应用性,同时也有着独特的研究对象和研究方法.

线性代数独特的内容和特点,常常使习惯于分析学习的学生从认知、观念、心理等各个层面感到茫然和不适应,尤其是在解题时感到困惑,觉得无从下手.许多习题貌似平易,但解题时稍有不慎便会陷入困境,要透彻掌握理论知识和解题技巧而达到运用自如的程度并非易事.而教学学时和教材篇幅的限制,使许多内容和方法不能详尽展开,例题也偏少,这也增加了学生学习的困难.为此,我们编写了这本线性代数学习辅导教材,以适应教学需要.

经过长期的教学实践和研究积累,并听取了同行的意见和建议,我们在编写过程中特别注意了以下几点:

一、重视基础知识的学习与基本技能的训练,适当增强基础题目的讲解内容.这是因为只有熟练掌握了基本概念、基本原理和基本方法,才有能力去分析和解决复杂的问题.同时,这也是锻炼逻辑思维、训练数学表达与推理的必要环节.

二、强调教学内容与例题分析的同步衔接,增强典型问题和规律性解答部分的内容,为学生课后复习与练习提供尽可能多的方法、技巧与参照,在开拓读者思路方面提供一把入门的钥匙.

三、系统总结教学内容,注重知识整合,科学地指导学生进行数学解题.在题目的选取与安排上,逐步增加综合型例题,以例题为载体,复习和运用学过的知识,培养学生综合运用数学知识去解决问题的能力.

四、解题训练的根本目的是培养和锻炼学生运用数学知识去解决数学问题的能力,因此在重视基础的同时,我们还选择了许多比较灵活的问题和综合性问题,同时也对一些结论进行引申,它们需要具有一定的解题经验与比较深入的思考才能够解决.通过这些问题,希望引导学生认识到独立思考和独立工作的重要性,体

验分析问题、研究问题、转化问题，进而解决问题的过程.

五、对许多例题给出了多种解法，展示数学方法的灵活性与多样性. 同时，在许多有启示的例题之后给出一些评注，揭示其内在蕴含的规律和可操作的方法，达到举一反三的效果.

六、由于"线性代数"是招收研究生考试中数学内容的一部分，我们对于全国和一些院校的硕士研究生入学考试试题适当地进行选择，有机地穿插在本书的例题和习题之中. 这样，一方面为有志于继续深入学习的学生提供帮助，另一方面也为正在学习线性代数课程的学生提供更多的综合能力训练素材.

七、为使学生能够进一步掌握学习内容和进行自我训练，了解自己的学习状况，在每小节之后都配置了一定量的习题，并附有答案或提示.

在本书的编写过程中，复旦大学数学科学学院童裕孙、陈纪修、吴泉水、朱大训、郭坤宇、陈猛、程晋、楼红卫等教授提供了各种建议、支持和帮助；复旦大学教务处也予以鼓励和支持，在此表示衷心的感谢. 同时，感谢复旦大学出版社范仁梅同志的大力支持和帮助，由于她的辛勤工作，本书才得以与读者见面.

囿于学识，本书错误和不当之处在所难免，殷切期望广大读者和同行提出宝贵的批评和建议.

编者

2011 年 3 月于复旦大学

内 容 提 要

本书是理工科、技术学科、经济与管理等非数学类专业学生学习线性代数课程的学习辅导书.全书共6章:矩阵与行列式、线性方程组、线性空间与线性变换、特征值与特征向量、Euclid空间与酉空间、二次型.本书重视基础知识的学习与基本技能的训练,强调教学内容与习题解析的同步衔接;注重整合知识,科学地指导学生进行解题;书中还选择了许多具有综合性与灵活性的问题,同时也对一些结论进行引申,引导学生独立思考和深入训练;在例题讲解中,适时穿插一些评注,起到画龙点睛的作用.本书还适当地选择了全国和一些院校的硕士研究生入学考试试题,将其有机地穿插在例题和习题之中.本书还在每小节之后都配置了一定量的习题,并附有答案或提示.

本书的深度和广度能适应大多数专业的线性代数知识的学习需要,可作为高等学校理科、工科、技术学科、经济与管理等非数学类专业的学习指导书,并可作为上述各专业的教学参考书.同时,对于有志报考研究生的学生来说,也是一本较全面的复习用书.

目　　录

第一章
矩阵与行列式

§1.1 向量与矩阵

知识要点

一、向量

定义 1.1.1 由 n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的有序数组$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$称为 **n 维向量**,简称**向量**. 数 $a_i(i=1,2,\cdots n)$称为该向量的第 i 个分量. n 维向量也常写成

$$(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n)\text{或}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

称前者为 **n 维行向量**,后者为 **n 维列向量**.

二、矩阵

定义 1.1.2 由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots m;j=1,2,\cdots,n)$排成的 m 个行 n 个列的形式

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 $m\times n$ 的**矩阵**,常简记为$(a_{ij})_{m\times n}$,其中 a_{ij}称为矩阵的(第 i 行第 j 列的)**元素**. 当 $m=n$ 时,也称矩阵为(**n 阶**)**方阵**,或 **n 阶矩阵**. 称 a_{11} 至 a_{nn}所在的位置为**主对角线**,称 $a_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$为**对角元素**,其他称为**非对角元素**.

当 $a_{ij}=0(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$时,称为**零矩阵**,记为 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$或 $\boldsymbol{O}$.

注 显然,当 $1\times n$ 矩阵就是 n 维行向量,$m\times 1$ 矩阵就是 m 维列向量.

有几种常用的特殊方阵:

1. 单位阵

$$I_n=(\delta_{ij})_{n\times n}=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{pmatrix}_{n\times n}.$$

2. 对角阵

$$\operatorname{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n)=\begin{pmatrix}d_1&&&\\&d_2&&\\&&\ddots&\\&&&d_n\end{pmatrix},$$

3. 三角阵

上三角阵：

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\&&\ddots&\vdots\\&&&a_{nn}\end{pmatrix};$$

下三角阵：

$$\begin{pmatrix}a_{11}&&&\\a_{21}&a_{22}&&\\\vdots&\vdots&\ddots&\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}.$$

三、矩阵的运算

1. 加法

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$为 $m\times n$ 矩阵，定义矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}.$$

加法运算运算满足交换律和结合律，即若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 是同型矩阵，则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A},$$

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}).$$

2. 数乘

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$为 $m\times n$ 矩阵，λ 是数，则定义 λ 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**数乘**为

$$\lambda\boldsymbol{A}=(\lambda a_{ij})_{m\times n}.$$

数乘运算满足结合律与分配律，即对于任何数 λ,μ 和 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$，成立

$$(\lambda\mu)\boldsymbol{A}=\lambda(\mu\boldsymbol{A}),$$
$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A},$$
$$\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}.$$

3. 乘法

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times p}$为 $n\times p$ 矩阵,定义矩阵为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的**乘积**为 $m\times p$ 矩阵

$$\boldsymbol{AB}=\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right)_{m\times p}=(a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj})_{m\times p}.$$

矩阵的乘法满足结合律,即设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可相乘,$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 可相乘,则

$$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}).$$

矩阵的乘法也满足分配律,即设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 同型,且与 $\boldsymbol{C}$ 都可相乘,则有

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC};$$

设 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 同型,且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 都可相乘,则有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BC}.$$

注意矩阵的乘法不满足交换律.

4. 转置

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$为 $m\times n$ 矩阵,则定义矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**转置矩阵**为

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(b_{ij})_{n\times m},$$

其中 $b_{ij}=a_{ji}(i=1,2,\cdots,n,\ j=1,2,\cdots,m)$.

注意对任意矩阵 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 和数 λ,成立

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A};$$
$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}};$$
$$(\lambda\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\lambda\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}.$$

5. 共轭

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$为 $m\times n$ 复矩阵,定义矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**共轭矩阵**为

$$\overline{\boldsymbol{A}}=(\overline{a}_{ij})_{m\times n},$$

这里 $\overline{a}_{ij}$表示 a_{ij}的共轭复数. 记

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=(\overline{\boldsymbol{A}})^{\mathrm{T}}(=\overline{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}),$$

它称为 $\boldsymbol{A}$ 的**共轭转置矩阵**,此时 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=(b_{ij})_{n\times m}$,其中 $b_{ij}=\overline{a}_{ji}$.

6. 矩阵多项式

记方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次幂为

$$\boldsymbol{A}^{k}=\underbrace{\boldsymbol{AA}\cdots\boldsymbol{A}}_{k个}\ \ (k\in\mathbf{N}^{+}),$$

并规定 $\boldsymbol{A}^{0}=\boldsymbol{I}$. 若 n 次多项式 $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$,定义

$$p(\boldsymbol{A})=a_n\boldsymbol{A}^n+a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{I},$$

它也称为 $\boldsymbol{A}$ 的 n 次多项式.

7. 线性方程组的矩阵表示

对于线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases}$$

若记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

则该方程组可以表示为

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b},$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 称为方程组的**系数矩阵**,$\boldsymbol{b}$ 称为方程组的**右端向量**.

四、分块矩阵及运算

常把一个矩阵分解成若干个块来考虑,称为**分块矩阵**. 分块矩阵的加法、数乘和乘法等运算的形式和以上数字矩阵相同,这里不再赘述. 特别要指出的是,若两个同型方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可分块为如下准对角阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_k \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 & & & \\ & \boldsymbol{B}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{B}_k \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_j,\boldsymbol{B}_j$ 是 n_j 阶方阵($j=1,2,\cdots,k$),则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{B}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{B}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_k+\boldsymbol{B}_k \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_k\boldsymbol{B}_k \end{pmatrix},$$

$$
A^k=\begin{pmatrix} A_1^k & & & \\ & A_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k^k \end{pmatrix},\ k\in\mathbf{N}^+.
$$

例题分析

例 1.1.1 设 $\boldsymbol{x}=(0,3,-1,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{y}=(2,1,-2,4)^{\mathrm{T}}$,计算 $2\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}$ 和 $3\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{y}$.

解 由矩阵的数乘和加法的定义得

$$
2\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}=2\begin{pmatrix}0\\3\\-1\\0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}2\\1\\-2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\6\\-2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6\\3\\-6\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\9\\-8\\12\end{pmatrix},
$$

$$
3\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{y}=3\begin{pmatrix}0\\3\\-1\\0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}2\\1\\-2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\7\\1\\-8\end{pmatrix}.
$$

例 1.1.2 设 n 维向量 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$.

(1) 求 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$;

(2) 若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$,求 $\boldsymbol{A}^k(k\in\mathbf{N}^+)$.

解 (1) 由矩阵乘法的定义得

$$
\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n,
$$

$$
\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{pmatrix}x_1y_1 & x_2y_1 & \cdots & x_ny_1\\ x_1y_2 & x_2y_2 & \cdots & x_ny_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_1y_n & x_2y_n & \cdots & x_ny_n\end{pmatrix}.
$$

(2) 记 $\lambda=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$,则

$$
\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{y}\lambda\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}=\lambda\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A},
$$

$$\cdots\cdots$$

$$A^k=\underbrace{yx^{\mathrm{T}}yx^{\mathrm{T}}\cdots yx^{\mathrm{T}}}_{k\text{个}}=y\underbrace{(x^{\mathrm{T}}y)\cdots(x^{\mathrm{T}}y)}_{k-1\text{个}}x^{\mathrm{T}}=y\lambda^{k-1}x^{\mathrm{T}}=\lambda^{k-1}yx^{\mathrm{T}}=\lambda^{k-1}A.$$

注 对于 n 维列向量 x 和 y，$x^{\mathrm{T}}y$ 是一个数，而 yx^{T} 是一个矩阵.

例 1.1.3 设 $n(n\geqslant2)$ 维向量 $x=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\\vdots\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，$A=I_n-xx^{\mathrm{T}}$，$B=I_n+2xx^{\mathrm{T}}$，求 AB.

解 注意 $x^{\mathrm{T}}x=\frac{1}{2}$，便有

$$\begin{aligned}AB&=(I_n-xx^{\mathrm{T}})(I_n+2xx^{\mathrm{T}})=I_n-xx^{\mathrm{T}}+2xx^{\mathrm{T}}-(xx^{\mathrm{T}})(2xx^{\mathrm{T}})\\&=I_n+xx^{\mathrm{T}}-2x(x^{\mathrm{T}}x)x^{\mathrm{T}}=I_n+xx^{\mathrm{T}}-xx^{\mathrm{T}}=I_n.\end{aligned}$$

例 1.1.4 设 $A=\begin{pmatrix}1&-4&2\\-1&4&-2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\\5&-2\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}2&2\\1&-1\\1&-3\end{pmatrix}$.

(1) 求 $2A-3B^{\mathrm{T}}$；

(2) 求 $(2A-3B^{\mathrm{T}})C$；

(3) 求矩阵 X，使得 $2X-3B+C=O$.

解 (1) 由矩阵运算的定义得

$$\begin{aligned}2A-3B^{\mathrm{T}}&=2\begin{pmatrix}1&-4&2\\-1&4&-2\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1&-1&5\\2&3&-2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2&-8&4\\-2&8&-4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&-3&15\\6&9&-6\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-1&-5&-11\\-8&-1&2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(2) 由矩阵乘法的定义得

$$\begin{aligned}(2A-3B^{\mathrm{T}})C&=\begin{pmatrix}-1&-5&-11\\-8&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2\\1&-1\\1&-3\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}(-1)\times2+(-5)\times1+(-11)\times1&(-1)\times2+(-5)\times(-1)+(-11)\times(-3)\\(-8)\times2+(-1)\times1+2\times1&(-8)\times2+(-1)\times(-1)+2\times(-3)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$=\begin{pmatrix}-18 & 36\\-15 & -21\end{pmatrix}.$$

(3) 从 $2\boldsymbol{X}-3\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{O}$ 得

$$\boldsymbol{X}=\frac{1}{2}(3\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})=\frac{1}{2}\left[3\begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & 3\\5 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 2\\1 & -1\\1 & -3\end{pmatrix}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 4\\-4 & 10\\14 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 2\\-2 & 5\\7 & -\frac{3}{2}\end{pmatrix}.$$

例 1.1.5 计算 $(x,y,1)\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & b_1\\a_{12} & a_{22} & b_2\\b_1 & b_2 & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}$.

解 由矩阵乘法的定义得

$$(x,y,1)\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & b_1\\a_{12} & a_{22} & b_2\\b_1 & b_2 & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}$$

$$=(a_{11}x+a_{12}y+b_1,a_{12}x+a_{22}y+b_2,b_1x+b_2y+c)\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}$$

$$=a_{11}x^2+a_{12}xy+b_1x+a_{12}xy+a_{22}y^2+b_2y+b_1x+b_2y+c$$

$$=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2b_1x+2b_2y+c.$$

例 1.1.6 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -3 & 5 & -7\\0 & 2 & 2 & 8\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & -5\\-3 & 4\\0 & 8\\0 & 0\end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{AB}$.

解法一 直接按矩阵乘法的定义计算得

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1 & -3 & 5 & -7\\0 & 2 & 2 & 8\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -5\\-3 & 4\\0 & 8\\0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 23\\-6 & 24\\0 & 8\\0 & 0\end{pmatrix}.$$

解法二 记

$$A_{11}=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 2\end{pmatrix},\quad A_{12}=\begin{pmatrix}5 & -7\\ 2 & 8\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2 & -5\\ -3 & 4\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}0 & 8\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

由分块矩阵的乘法得

$$AB=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ O_{2\times 2} & I_{2\times 2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C\\ D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}C+A_{12}D\\ D\end{pmatrix}.$$

由于

$$A_{11}C+A_{12}D=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -5\\ -3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & -7\\ 2 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 8\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 23\\ -6 & 24\end{pmatrix},$$

因此

$$AB=\begin{pmatrix}11 & 23\\ -6 & 24\\ 0 & 8\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

例 1.1.7 设 A 是 $m\times n$ 矩阵. 证明:若对于任何 n 维向量 x 成立 $Ax=0$(0 为分量均为 0 的向量),则 $A=O_{m\times n}$.

证 记

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}.$$

如果对于任何 n 维向量 x 成立 $Ax=0$,取 $e_i=(0,\cdots,\underset{i}{1},\cdots,0)^{\mathrm{T}}$,则 $Ae_i=0(i=1,2,\cdots,n)$. 而

$$Ae_i=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{1i}\\ a_{2i}\\ \vdots\\ a_{mi}\end{pmatrix},$$

于是对于 $i=1,2,\cdots,n$,成立

$$a_{ki}=0,\ k=1,2,\cdots,m.$$

因此 $A=O_{m\times n}$.

例 1.1.8 设 A 是 $m\times n$ 非零矩阵. 证明:线性方程组 $Ax=0(x\in\mathbf{R}^n)$ 与 $A^{\mathrm{T}}Ax=0$ 同解.

证 记

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\ x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 等价于

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=0,\quad i=1,2,\cdots,m.$$

若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$,显然有 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$.

反之,若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$,即$(\boldsymbol{Ax})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Ax})=0$ 这就是

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n)^2=0.$$

于是

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=0,\quad i=1,2,\cdots,m.$$

因此 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$.

例 1.1.9 已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,求与 $\boldsymbol{A}$ 相乘可交换的所有矩阵.

解 设 $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$与 $\boldsymbol{A}$ 相乘可交换,即

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix} b_{11}+b_{21}+b_{31} & b_{12}+b_{22}+b_{32} & b_{13}+b_{23}+b_{33} \\ b_{21}+b_{31} & b_{22}+b_{32} & b_{23}+b_{33} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{11}+b_{12} & b_{11}+b_{12}+b_{13} \\ b_{21} & b_{21}+b_{22} & b_{21}+b_{22}+b_{23} \\ b_{31} & b_{31}+b_{32} & b_{31}+b_{32}+b_{33} \end{pmatrix}.$$

因此

$$b_{11}+b_{21}+b_{31}=b_{11},\quad b_{21}+b_{31}=b_{21},\quad b_{12}+b_{22}+b_{32}=b_{11}+b_{12},$$
$$b_{22}+b_{32}=b_{21}+b_{22},\quad b_{32}=b_{31}+b_{32},\quad b_{13}+b_{23}+b_{33}=b_{11}+b_{12}+b_{13},$$
$$b_{23}+b_{33}=b_{21}+b_{22}+b_{23},\quad b_{33}=b_{31}+b_{32}+b_{33}.$$

从而

$$b_{31}=0,\quad b_{32}=0,\quad b_{21}=0,\quad b_{11}=b_{22}=b_{33},\quad b_{12}=b_{23}.$$

于是与 $\boldsymbol{A}$ 相乘可交换的矩阵具有以下形式

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a & b & c \\ & a & b \\ & & a \end{pmatrix},\quad a,\ b,\ c \text{ 为任意常数.}$$

例 1.1.10 证明:若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与任何 n 阶方阵的相乘可交换,则 $\boldsymbol{A}$ 必是数量矩阵,即存在常数 a,使 $\boldsymbol{A}=a\boldsymbol{I}_n$.

证法一 记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

如果 $\boldsymbol{A}$ 与任何 n 阶方阵的乘法可交换,则对于 $i=1,2,\cdots,n$,取

$$\boldsymbol{B}_i=\begin{array}{c@{}l} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ i\text{ 行} \\ \\ \\ \end{array} \\ i\text{ 列} & \end{array}$$

(即 $\boldsymbol{B}_i$的元素只有在第 i 行第 i 列位置的元素为 1,其他为 0),则 $\boldsymbol{AB}_i=\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{A}$. 而

$$\boldsymbol{AB}_i=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}=\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & a_{1i} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & a_{2i} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ni} & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \\ i\text{ 列} \end{array}$$

$$\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ i\text{ 行}, \\ \\ \\ \end{array}$$

比较两个矩阵的对应元素得

$$a_{ik}=0,\quad i,k=1,2,\cdots,m,\ k\neq i,$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 是对角阵,即