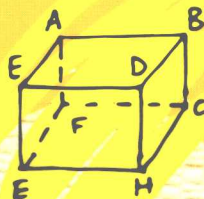


ZHONGKAOYIDIANTONG

中考一点通

数 学

杨辉 田媛 吴晓燕 刘世鹏◎主讲



YZLI0890146999

中青版中考高分名师导航

全国唯一考试数字频道《考试在线》总策划

全国顶级教师联袂主讲

- ★ 精选各地中考经常出的真题
- ★ 实用的应考策略指导
- ★ 有效的答题技法与技巧
- ★ 抓住薄弱环节查缺补漏
- ★ 助你走进理想的高中

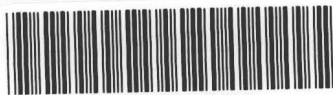
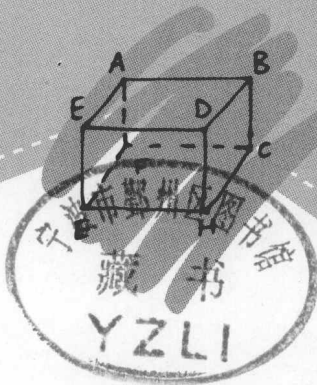
中国青年出版社

ZHONGKAOYIDIANTONG

中考一点通

数 学

杨辉 田媛 吴晓燕 刘世鹏◎主讲



YZLI0890145999

中国青年出版社

(京) 新登字083号

图书在版编目 (CIP) 数据

中考一点通·数学/杨辉等编著. —北京: 中国青年出版社, 2011.7

ISBN 978-7-5153-0032-0

I. ①中… II. ①杨… III. ①中学数学课-初中-升学参考资料 IV. ①G634

中国版本图书馆CIP数据核字 (2011) 第111675号

出版发行: 中国青年出版社

社 址: 北京东四十二条21号

邮政编码: 100708

网 址: www.cyp.com.cn

策 划: 韩亚君

责任编辑: 宣逸玲

编辑电话: (010) 57350508

营 销: 北京中青人出版物发行有限公司

电 话: (010) 57350522 57350524

印 刷: 聚鑫印刷有限责任公司

经 销: 新华书店

开 本: 787×1092 1/16

印 张: 12.75

字 数: 258千字

版 次: 2011年8月北京第1版 2011年8月第1次印刷

定 价: 24.00元

本图书如有印装质量问题, 请与出版部联系调换

联系电话: (010) 57350526

目 录

第 1 单元	实数	1
第 2 单元	代数式	5
第 3 单元	方程与不等式	18
第 4 单元	一元二次方程	30
第 5 单元	三角函数	35
第 6 单元	函数及其图像	42
第 7 单元	一次函数图像及其性质	50
第 8 单元	二次函数图像及其性质	60
第 9 单元	初中几何的有关知识	72
第 10 单元	平行线	76
第 11 单元	三角形	80
第 12 单元	相似三角形	96
第 13 单元	四边形	105
第 14 单元	圆	116
第 15 单元	轴对称图形	128
第 16 单元	平移与旋转	134
第 17 单元	几何综合题	139
第 18 单元	代数和几何的综合题	154
第 19 单元	常见的数学思想与方法	161
第 20 单元	统计与概率	166
第 21 单元	实际应用问题	181

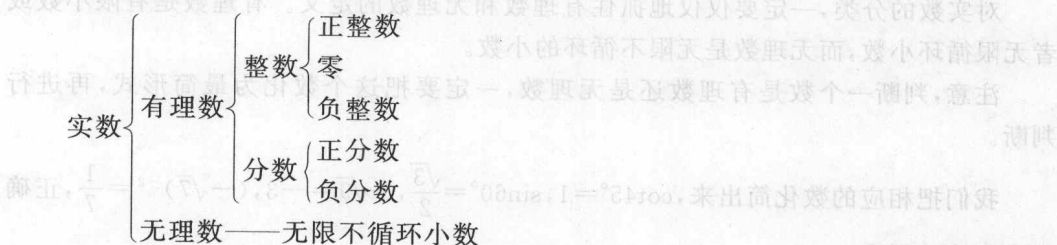
第1单元 实数

初中数学的学习,主要是代数和几何两大部分。依照新课标的要求,我们需要掌握的代数内容主要有五个方面:数与式、方程和方程组、不等式和不等式组、函数及其图像、统计初步。在顺序上是循序渐进、由浅入深的。在初中部分接触到的这些知识,是未来学习的基础,所以同学们一定要牢固地掌握。

初中数学内容非常丰富,范围也非常广泛,根据新课标,有200多个知识点我们已经在初中三年中学习完了。总复习的目的,就是要将我们所学过的知识系统化、条理化、完整化,强化思维,形成能力,将零碎的知识疏理归纳,在总复习的时候有章可循,提高学习效率。

初中代数主要分为下面五个专题:第一个专题是数与式,第二个专题是方程和方程组,第三个专题是不等式和不等式组,第四个专题是函数及其图像,第五个专题是统计初步。

首先复习实数。



实数 a 的相反数,记作 $-a$ 。非零实数 a 的倒数,记为 $\frac{1}{a}$ 。注意,零没有倒数。

若 a 、 b 两个数互为相反数,则 $a+b=0$ 。若 m 、 n 两个数互为倒数,则 $m \cdot n=1$ 。

$$\text{绝对值 } |a| = \begin{cases} a(a > 0) \\ 0(a = 0) \\ -a(a < 0) \end{cases}$$

$|a|$, a^2 , $\sqrt{a}(a \geq 0)$, 是我们在初中阶段学的三个非负数。“几个非负数的和(积)仍是非负数”与“几个非负数的和等于零,则必定每个非负数都同时为零”,这两个结论在以后代数式的化简、求值中经常会用到。

要知道实数集的一些性质,特别是数轴上的点和实数的一一对应关系。要会利用数轴表示某个实数集的范围,会利用数轴比较两个实数的大小。数轴的三要素是原点、正方向和单位长度。实数与数轴上的点是一一对应的关系,这是数学中数形结合的重要基础。

在实数集中,原有的运算律和运算性质,比如加法的交换率、乘法的分配律等都可以继续使用。初中阶段增加了两个运算,即乘方和开方。在乘方和开方运算的时候,要

注意运算的顺序和运算的规律。实数的六种运算及整数、指数、幂的运算是初中学习数学的基本能力,也是后续学习的重要基础,准确的运算有赖于运算的法则、运算的顺序以及运算规律的熟练掌握。

什么是近似数呢?四舍五入,我们小学已经学过了。求一个数的近似数,需要保留到百分位、十分位还是千分位,求出它的近似数。有时在求近似数的时候,需要用到科学记数法。

什么是有效数字呢?从左边第一个不为零的数字起,到右边的数字止,有几个数就有几个有效数字。比如 0.0230,左边的两个“0”不是有效数字,但是最后一个“0”是有效数字,0.0230 这个数应该有三个有效数字。

要会根据指定的精确度或有效数字的个数,用四舍五入的方法求实数的近似数的近似值。同时要会用科学记数法表示一些较大或者较小的数。

考题解析

在 $-7, \cot 45^\circ, \sin 60^\circ, \pi/3, -\sqrt{9}, (-\sqrt{7})^{-2}$ 这六个数中,有理数的个数为()。

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

对实数的分类,一定要仅仅地抓住有理数和无理数的定义。有理数是有限小数或者无限循环小数,而无理数是无限不循环的小数。

注意,判断一个数是有理数还是无理数,一定要把这个数化为最简形式,再进行判断。

我们把相应的数化简出来, $\cot 45^\circ = 1, \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, -\sqrt{9} = -3, (-\sqrt{7})^{-2} = \frac{1}{7}$, 正确答案应该选择 D。

已知: $|x|=3, |y|=2, xy < 0$, 求 $x+y$ 的值等于()。

A. 5 或 -5

B. 1 或 -1

C. 5 或 1

D. -5 或 -1

根据绝对值的意义,可以确定 x 与 y 的值,再利用 $xy < 0$, 考虑 x, y 是异号的,即可求出 $x+y$ 的值。

解:由 $|x|=3, |y|=2$, 可以得到 $x=\pm 3, y=\pm 2$ 。又因为 $xy < 0$, 所以 x, y 是异号的。当 $x > 0, y < 0$ 的时候, $x+y=1$, 当 $x < 0, y > 0$ 的时候, $x+y=-1$ 。

正确答案应该是 1 或 -1, 选择 B。

2002 年 5 月 15 日,我国发射的海洋 1 号气象卫星进入预定轨道后,如果绕地球运行的速度为 7.9×10^3 米/秒,那么运行 2×10^2 秒的路程是()(用科学记数法来表示)。

A. 15.8×10^5 米

B. 1.58×10^5 米

C. 0.158×10^7 米

D. 15.8×10^6 米

要用科学记数法来表示,我们首先应该知道科学记数法的意义是什么,也就是把一

个比较大的或比较小的数,表示成 $a \times 10^n$ 的形式,其中 $1 \leq |a| < 10$, n 是整数。而,去解: $7.9 \times 10^3 \times 2 \times 10^2 = 15.8 \times 10^5 = 1.58 \times 10^6$, 所以应该选择 D。

计算:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + (2 - \sqrt{3})^0 - 2\cos 45^\circ + \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

这种类型的题在中考中每年都要出现,是我们需要达标的基本题,同学们必须掌握这种类型的题。

$$\text{解: 原式} = 2 + 1 - 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} - 1 = 2$$

在实数的混合运算中,同学们一定要掌握运算的顺序,先乘方、开方,再乘、除,最后算加、减。同级运算是先左后右。

对实数运算的考查中,多以基本题为主,涉及到运算次序、法则、零指数、负指数、绝对值等多个比较细小的知识点。数轴是数形结合的载体,同学们一定要重视。

在这种基本题中,我们每个同学一定要拿分。但有一些地方也是我们最容易出错的,这类题通常在易错处设计。比如:

$$(\pi - 3.14)^0 = 0? \quad \frac{1}{\sqrt{3}+2} = \sqrt{3} - 2? \quad -1^4 = 1?$$

有的同学一看, π 不就是 3.14 吗? 我们在 π 取值时是常常取 3.14, 但 $\pi - 3.14 \neq 0$, 任何非零实数的零次幂, 结果应该是 1, 而不是 0。

分母有理化, 一定注意上下同乘以一有理化式, 结果分母是 $3-4$, 而不是 $3-2$, 同学们要注意符号的运用。

$-1^4 = -1$ 。有同学一想, 老师讲过负数的偶次幂为正, 但这个底数不是一, 底数是 1。一定注意符号的应用, 千万不要出错。

实数 a, b 在数轴上对应的点如图所示, 下列结论正确的是()。

A. $a+b < 0$

B. $a-b < 0$

C. $a \cdot b > 0$

D. $|a| > |b|$

根据绝对值的几何意义, 可以看出选择 D 显然是错误的, 明显 a 到原点的距离小于 b 到原点的距离。A、B、C 怎么来判断呢? 首先根据数轴, 确定 a, b 的正负性, $a < 0$, $b > 0$, 同时 $|a| < |b|$, $a+b < 0$ 显然是错误的。 $a \cdot b > 0$ 也是错的, 异号乘积显然小于 0。

正确答案应该选 B。

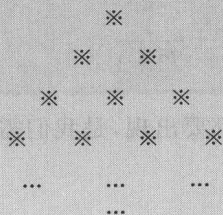
规定一种新的运算 $a \Delta b = a \cdot b - a - b + 1$, 给你一个例子 $3 \Delta 4 = 3 \times 4 - 3 - 4 + 1$, 请比较 $(-3) \Delta 4$ 和 $4 \Delta (-3)$ 的大小应该是 _____ ($<$ 、 $=$ 、 $>$)?

答案是“=”。

这种填空题是新课标中考常常出现的一种新题型, 规定一种新运算的类型题。对这种题, 我们一定要读懂新定义, 再进行运算, 在解题的时候一定要代入到这个式子中

去,从而求出正确的结果。

古希腊数学家把数 1、3、6、10、15、21 叫做三角形数,三角形数有一定的规律,则第 24 个三角形数与第 22 个三角形数的差为()。



可以把这些写成图中这样的形式,1、3 相差 2,3、6 相差 3,接着相差 4,通过找规律,我们可以看到第 24 个三角形的数与第 22 个三角形的数的差应该是 47。

同学们一定要注意仔细地观察分析,要有推断的能力,寻找出正确的规律。

已知地球表面积约等于 5.1 亿平方公里,其中水面面积约等于陆地面积的 $\frac{71}{29}$ 倍,则陆地面积约为()(精确到 0.1 亿平方公里)。

A. 1.5 亿平方公里

B. 2.1 亿平方公里

C. 3.6 亿平方公里

D. 12.5 亿平方公里

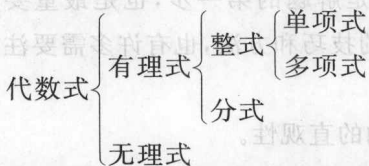
这种类型的题是考查我们的估算能力。要注意这个精确值:有效数字要求精确到 0.1 亿平方公里。

根据题中的要求,我们估算出陆地面积约为 1.5 亿平方公里。

正确答案应该选 A。

第2单元 代数式

代数式的相关知识是我们需要熟练掌握的基础内容之一。除了基本的概念之外，实际运算中的代数式求值也是要重点注意的。



无理式，我们在初中阶段主要学了二次根式 $\sqrt{a}(a \geq 0)$ 。二次根式的主要性质：

$$(1) (\sqrt{a})^2 = a (a \geq 0)$$

$$(2) \sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & (a > 0) \\ 0 & (a = 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

$$(3) \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad (a \geq 0, b \geq 0)$$

$$(4) \sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \quad (b \geq 0, a > 0)$$

最简二次根式要满足两个条件：被开方数必须是整数，同时不含有开得尽方的因数或者是因式。

同类二次根式也必须满足两个条件：根指数相同，被开方数相同。

代数的运算和前面学过的实数的运算有很多相同的地方，整式运算仍然要符合加、减、乘、除、乘方、开方这些运算的优先顺序或法则，同时注意添括号和去括号的法则。

在添括号、去括号法则这里，同学们最容易出错的地方就是符号的问题，如果括号前面是负号，去掉括号和前面的负号，里面各项都要改变符号。

分式的加、减、乘、除运算以及分式的乘方，和我们小学学过的分数加减法实际上雷同，需要通分，在通分之前需要找出最简公分母。

二次根式的加、减、乘、除运算，最容易出错的是分母有理化。分母中不能含有根号，如果分母中含有根号，就要进行分母有理化，把分母中的根号去掉。

在初中的代数部分，代数式的恒等变形是需要着重掌握的重点，也是难点。我们需要掌握下面几个知识点：

1. 添括号、去括号、拆项是代数式恒等变形中的常用方法。大家要注意添括号、去括号时一些符号的应用，尤其要注意“—”号。添括号和去括号以后，括号里面各项都要改变符号。

2. 公式可正用、逆用、变用。公式可用于代数式恒等变形，特别是乘法公式，它是

代数式恒等变形的重要工具。注意,公式的变形和图形的面积要结合起来。

3. 因式分解是多项式乘法的逆变形,常作为代数式恒等变形的一个重要的工具。因式分解主要有两种基本方法:提取公因式法和运用公式法,要注意方法的灵活运用和综合的使用。

4. 待定系数法、配方法。这两种方法都是代数式的恒等变形中经常要用到的,特别要注意待定系数法使用的前提条件是恒等式。

在我们平常遇到的题目中,代数式的化简往往是解题的第一步,也是最重要的一步,在实际的代数式化简中会有许多需要灵活使用的技巧和方法,也有许多需要注意的要点:

1. 含有绝对值的代数式化简。通常可利用数轴的直观性。

2. 整式化简求值时,要注意下面两个环节:(1)运用公式的时候,要从全局出发,有时要把某个部分看成一个整体。这就是上一单元我们强调过的整体代入的思想;(2)灵活运用配方、换元、整体代换等方法。

3. 分式的化简求值,一定要注意先对分子分母的多项式进行分解、约分,再运用分式的性质进行化简计算。

4. 在给定字母的取值范围的情况下,对二次根式进行化简。把二次根式化成最简二次根式,同时注意对于二次根式进行分母有理化的时候,有理化因式是什么,怎么样把二次根式进行分母有理化。

代数式的求值和代数式的变形有十分密切的关系。代数式的化简,先要通过整式的加、减、乘、除、乘方等一些基本的运算进行化简,然后再代入具体的数值求值。有附加条件的代数式求值的问题时,往往需要利用乘法公式、绝对值与算术根的性质、分式的基本性质、通分、约分、根式的性质等,经过恒等变形,把代数式中的隐含条件显现出来化简,从而求值。

求值中的方法技巧,主要是代数式的恒等变形的技能、技巧和方法。

考题解析

当 $x = -2$ 时,代数式 $ax^3 + bx + 1 = 6$,那么当 $x = 2$ 时,代数式 $ax^3 + bx + 1$ 的值是_____。

按常规的思路,需要把 $x = 2$ 代入,从而求得这个代数式的值是多少。但是在这个代数式中有两个待定系数 a 、 b ,题目中并没有告诉我们 a 、 b 的值。在一个式子中有两个未知数,是不可解的,这时肯定有一些解题的技巧。

我们发现, $x = -2$ 时这个代数式是 $-8a - 2b + 1$,而 $x = 2$ 时这个代数式是 $8a + 2b + 1$,这两个式子正好是一对相反数。通过整体代入的思想,求得这个代数式的值是 -4 。

某种商品进价为 a 元,商店将价格提高 30% 作零售价销售。在销售旺季过后,商店又以 8 折的价格开展促销活动。这时一件商品的售价为()。

这道题实际上是用数学符号语言表示文字语言的一种形式,也就是用数学学过的一些符号,比如说字母、数学运算符号,把文字的东西表示出来。关键是要正确地理解题意,明确运算顺序,正确使用括号。

解:根据题意,原零售价为 $\left(1 + \frac{30}{100}\right)a$ 元,

现销售价为 $0.8\left(1 + \frac{30}{100}\right)a$ 元,即 $1.04a$ 元,

填空应该是 $1.04a$ 。

下列各题中,错误的是()。

A. 代数式 $x^2 + y^2$ 的意义是 x, y 的平方和

B. 代数式 $5(x + y)$ 的意义是 5 与 $x + y$ 的积

C. x 的 5 倍与 y 的和的一半用代数式表示是 $5x + \frac{y}{2}$

D. x 的 $\frac{1}{2}$ 与 y 的 $\frac{1}{3}$ 的差,用代数式表示是 $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y$ 。

根据语言来列代数式,或者根据式子用语言来描述它,这两个过程是互逆的。要会正确判断这个式子、它的运算顺序以及表达的代数意义是什么。

通过分析,错误的应该是 C。

x 的 5 倍与 y 的和的一半,注意这个“的”在什么地方,应该是 $5x$ 与 y 的和,首先是 $5x + y$,和的一半应该是 $\frac{1}{2}(5x + y)$,而 x 的 5 倍与 y 的一半的和,那就应该写成 $5x + \frac{y}{2}$ 。同学们一定要注意,由于这个“的”放在不同地方,所列的代数式是不一样的。

下列运算正确的是()。

A. $2a^2 - a^2 = 2$

B. $x^3 \div x^2 = \frac{3}{2}$

C. $(-a^3) \cdot a^2 = -a^6$

D. $(3xy)^3 = 27x^3y^3$

显然 B 是错误的。

A 实际上是合并同类项,合并同类项应该是字母和指数不变,系数相加减, $2 - 1 = 1$, a^2 应该有,所以 A 也是错的。

C,如果把“-”号放出来,同底数幂的乘法运算,底数不变,指数相加,它相乘了,所以也是错的。

正确结果应该是 D,积的乘方的运算,把每一个因式都乘方,再把所有的结果相乘。

在图的日历中,任意围出一个竖列上的三个相邻的日子(数),设中间一个数为 a ,这三个数的和是()。

日	一	二	三	四	五	六
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

用代数式可以表示成上一个数 $a-7$,下一个数 $a+7$,三个数的和显然就是 $3a$ 。

通过这道题,我们发现,日历中竖列上的三个数的和,恰好是中间这个数的3倍。

下面是某一个月的月历。

		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

现在不是一竖列了,而把三列都围起来。同学们思考一下,这时候阴影方框中的9个数之和与方框正中间的数有什么关系呢?应该是9倍。

这个关系对于其他方框成立吗?如果把中间数写成代数式的形式,其他数都表示出来,这个式子是不是仍然成立?这个关系对任何一个月的月历都成立吗?显然都是成立的,我们可以根据整式的加减法来验证它。

通过这一个月月的月历,你还能提出哪些问题呢?同学们不妨思考一下这个问题,翻开你家的日历,找到某一月来看一看,能不能发现这些规律?

有下面四个等式:

$$(1) [(a+b)^2]^4 = (a+b)^6$$

$$(2) (-8a^4b^5 \div 4ab^5) \cdot (+3a^3b^2) = -6a^6b^2c$$

$$(3) (3a^6x^3 - 9ax^5) \div 3ax^3 = a^5 - 3x^2$$

$$(4) (ax^2 + bx^3)(-ax^2 + bx^3) = b^2x^6 - a^2x^4$$

其中正确的有()

A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个

第一个等式显然是错误的,幂的乘方,应该是底数不变,指数相乘,应该等于 $(a+b)^8$ 。第二和第三个等式也是错误的,只有第四个等式是正确的。答案应该选A。

某水库共有若干个相同的泄洪闸,在无上游洪水注入的情况下,打开一个水闸泄洪使水库水位以 a 米/小时匀速下降。

某汛期上游的洪水在未开泄洪闸的情况下使水库水位以 b 米/小时匀速上升。当水库水位超警戒线 h 米时开始泄洪。

如果打开 n 个水闸泄洪 x 小时,写出表示此时相对于警戒线水面高度的代数式。

这道题是阅读题,阅读量很大,一定要从比较繁琐的语言中提炼出数学问题是什么。实际上这道题的本质含义就是列代数式的问题。根据题中的条件合理地表示出相对应警戒线的水面高度,用 a 和 b 表示出来。

因为打开一个水闸泄洪,水库水位以 a 米/小时匀速下降,所以打开 n 个水闸泄洪,水库水位应该每小时下降 na 米。同时汛期上游的时候水位以 b 米/小时上升,两者相抵,水库实际每小时上升 $(b-na)$ 米,表示此时相对于警戒线水面高度的代数式应该是 $(b-na)x+h$ 。答案就是 $(b-na)x+h$ 。

已知 $(x-2)(x+b)$ 的积不含 x 的一次项,求 b 的值及化简 $(x-2)(x+b)$ 。

这是多项式乘多项式,不含 x 项,意味着一次项的系数为 0。

$$\text{解: } (x-2)(x+b) = x^2 + bx - 2x - 2b = x^2 + (b-2)x - 2b$$

$$\because \text{不含 } x \text{ 的一次项, } \therefore (b-2) = 0, \therefore b = 2$$

$$\therefore (x-2)(x+b) = (x-2)(x+2) = x^2 - 4$$

阅读下面材料:

在计算 $2+5+8+11+14+17+20+23+26+29$ 时,我们发现,从第一个数开始,后面的每一个数与它的前面一个数的差都是一个相等的常数。具有这种规律的一列数,除了直接相加外,我们还可以用下面的公式来计算它们的和 $S = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$ (其中 n 表示数的个数, a_1 表示第一个数, a_n 表示最后一个数),那么 $2+5+8+11+14+17+20+23+26+29 = \frac{10(2+29)}{2} = 155$ 。

用上面的知识解答下面的问题:

某集团总公司决定将下属的一分公司对外招商承包,有符合条件的两企业 A、B 分别拟定上缴利润方案如下:

A, 每年结算一次上缴利润,第一年上缴利润 1 万元,以后每年比前一年增加 1 万元。递增数列,每年都增加 1 万。

B, 每半年结算一次上缴利润。第一个半年上缴 0.3 万元,以后每半年比前半年增加 0.3 万元。

(1) 如果承包 4 年,你认为应该由哪家企业承包总公司获利是最多的? 你如果是企业的老板,你应该选择哪个承包商来承包?

(2) 如果承包 n 年,请用含 n 的代数式分别表示两企业上缴利润的总金额,单位是万元。

这仍然是一道阅读题。本题取材于高考代数中的“等差数列”的求和公式的内容,通过自学,我们要掌握它的规律。本题中的常数即公差,熟悉等差数列的求和公式,最后解决与市场经济有关的实际应用问题。整个阅读过程,层次比较清楚,简明扼要。这道渗透试题有利于考查学生的阅读理解能力和数学方法应用的能力,用新知识来解决旧问题,这是体现我们数学学习能力的重要方面。

解:(1) $S_A = \frac{4}{2}(a+4) = 10$ (万元)

$$S_B = \frac{8(0.3+2.4)}{2} = 10.8 \text{ (万元)}$$

如果承包 4 年,应该承包给企业 B,总公司获利多一些。

(2) 如果承包 n 年呢?

$$S_A = \frac{n(1+n)}{2}, \quad S_B = \frac{2n(0.3+0.3 \cdot 2n)}{2} = n(0.3+0.6n)$$

这是两种方案分别的获利情况。

已知二次三项式 $2x^2+bx+c$ 分解因式为 $2(x-3)(x+1)$, 则 b, c 的值为()。

A. $b=3, c=-1$

B. $b=-6, c=2$

C. $b=-6, c=-4$

D. $b=-4, c=-6$

多项式的因式分解和多项式乘法互为逆运算,显然这两个式子应该是恒等式。既然是恒等式,每一项都应该相同,从而用待定系数法求出待定系数 $b=-4, c=-6$ 。正确答案是 D。

填空题: 分解因式 $2x^3y+8x^2y^2-8xy^3=$ _____。

首先来看它有没有公因式。通过分析,这个多项式中公因式应该是 $2xy$, 提取 $2xy$, 原式 $= 2xy(x^2+4xy-4y^2) = 2xy(x+2y)^2$, 分解因式,一定要分解彻底。

分解因式的一般思路是:一提,首先提取公因式;二套,套用公式。如果提取公因式和套用公式都不符合的话,再分组。

分解因式:

(1) $a^2-ab+ac-bc$

(2) $x^2-y^2+y-\frac{1}{4}$

解:(1) 原式 $= (a^2-ab) + (ac-bc) = a(a-b) + c(a-b) = (a-b)(a+c)$

(2) 原式 $= x^2 - \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(x - y + \frac{1}{2}\right)\left(x + y - \frac{1}{2}\right)$

说明:分组分解的关键在于分组后是否有公因式可以提取,或能否套用公式来进一步分解。分组分解以后,一定要使得最后的结果是因式乘积的形式。

依照下列要求,写出一个二项式。

(1)二项式含有字母 a 和 b 。

(2)系数、次数不限。

(3)能先用提取公因式法,再用公式法分解,并把它分解因式。

分解与解答:对于这种开放性的阅读理解题,一定要弄清楚题目的要求,它限制的条件有什么,并构造出符合题意的多项式。例如:

$$2a^3b - 2ab^3 = 2ab(a^2 - b^2) = 2ab(a+b)(a-b)$$

这种类型题的答案肯定不是唯一的,只要符合题目的要求,就可以写出相应的多项式,同学们不妨试着多写一些。

已知 $x+y=2$, $xy=-2$, 求 x^2+y^2+6xy 的值。

这种类型的题就是公式变形的应用。

$$\text{解: } x^2+y^2+6xy$$

$$= (x^2+2xy+y^2) + 4xy$$

$$= (x+y)^2 + 4xy$$

$$= 2^2 + 4 \times (-2)$$

$$= -4$$

已知: $a = \frac{1}{20}x + 20$, $b = \frac{1}{20}x + 19$, $c = \frac{1}{20}x + 21$ 那么代数式 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac$ 的值是_____。

这种类型的题一定要注意解题技巧,不能死算。

$$\text{解: 原式} = \frac{1}{2} [2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac]$$

$$= \frac{1}{2} [(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$$

$$= 3$$

已知 $x + \frac{1}{x} = 2\sqrt{3}$, 求 $x^4 + \frac{1}{x^4}$ 的值。

$$\text{解: } x^4 + \frac{1}{x^4} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2$$

$$= \left[\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right]^2 - 2$$

$$= [(2\sqrt{3})^2 - 2]^2 - 2$$

$$= 98$$

此题是反复运用完全平方公式,恒等变形这个公式,从而使问题得解,这是条件求值问题中的一个基本思路。

已知: $x = \frac{1}{3-2\sqrt{2}}, y = \frac{1}{3+2\sqrt{2}}$

求: $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 4$ 的值。

通过解这个式子,可以得到 $x+y=6, xy=1$ 。

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 4 = \frac{(x+y)^2 - 2xy}{xy} - 4$$

结果是 30。这个题从已知条件和所求的结果看都比较复杂,但是经过代数式的恒等变形,便简化了计算过程。

从边长为 a 的正方形内去掉一个边长为 b 的小正方形(如图 1),然后将剩余部分剪拼成一个矩形(如图 2),上述操作所能验证的等式是()。

- A. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
 B. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
 C. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
 D. $a^2 + ab = a(a+b)$

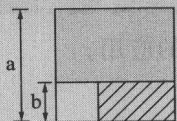


图1

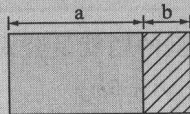


图2

这是面积切割的问题,代数和几何图形运用,我们学过的乘法公式都可以用这种几何拼接的方法得到。比如平方公式以及平方差公式,同学们可以试着用面积拼接的方法去验证它。

在这个操作过程中,我们来看它符合哪一个等式。首先来看这个大的图形就是 a^2 ,而小的这个正方形是 b^2 。这个矩形的长是 $(a+b)$,宽是 $(a-b)$,面积是 $(a+b)(a-b)$ 。从边长为 a 的正方形内去掉一个边长为 b 的小正方形,也就是 $a^2 - b^2$ 。这个操作过程验证的等式正好是平方差公式, $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ 。

正确答案是 A。

已知 $\frac{x}{x^2+x+1} = a (a \neq 0)$,

试求 $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$ 的值,并求此时 a 的值。

本题 x 取值是隐性给出的。 $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$ 中的 x ,都是以偶次方形式出现的,不能对已知条件直接进行平方,需要对其取倒数。要凑成已知条件的式子直接代入从而求解,体现了整体代入的思想。

解: $\frac{x}{x^2+x+1} = a$

$\therefore \frac{x^2+x+1}{x} = \frac{1}{a}$

即 $x + \frac{1}{x} = \frac{1}{a} - 1$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = \frac{1}{a^2} - \frac{2}{a} + 1$$

$$x^2 + 1 + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{2}{a}$$

$$\therefore \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2} = \frac{1 - 2a}{a^2}$$

$$\therefore \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{a^2}{1 - 2a}$$

一定要注意分式隐含的条件:分式的分母不为零。做到这一步,一定要注意分类讨论的思想。在解综合题的时候,我们一定要有全面的思路,做到这一步,这道题并没有完全求完,一定要注意它的隐含条件(分母不为零),要分类讨论 a 的取值。

当 $1 - 2a = 0$, 即 $a = \frac{1}{2}$ 时, $\frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}$ 无意义

当 $1 - 2a \neq 0$, 即 $a \neq \frac{1}{2}$ 时, $\frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{a^2}{1 - 2a}$

在解这类题的时候,从已知条件入手,我们好像感觉到无从下手。这时就需要用代数式的恒等变形,恰当地把式子变形成为我们所要求的代数式的式子,从而使问题简化。

先化简,再求值。

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2 - 2ab + b^2} + \frac{2a - ab}{b - 2} \div a, \text{ 其中 } a = \sqrt{2} - 1, b = 2\sqrt{2} - 1$$

这是一个分式的加减乘除混合运算,其中 a, b 两个数都是带有根号的式子,虽然我们需要把这个式子进行化简。分式的加减乘除运算,也是先乘除后加减。在乘除加减的过程中,分式的运算一定要注意,先把分子、分母分别因式分解,然后进行约分。

$$\begin{aligned} \text{解:原式} &= \frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)^2} + \frac{a(2-b)}{b-2} \times \frac{1}{a} \\ &= \frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)^2} - 1 \\ &= \frac{(a+b)(a-b) - (a-b)^2}{(a-b)^2} = \frac{2b}{a-b} \end{aligned}$$

代入求得原式 $= -4 + \sqrt{2}$

注意,代入求值的时候,含有根号的,一定要注意根式的化简。

在分式的化简计算的时候,一定要注意将分子、分母的多项式按升幂或降幂排列,使多项式的第一项系数为正数,以后恰当地进行因式分解,从而找到最简公分母。加法的通分、乘除法的约分都要注意,它运用的基本的知识点就是分式的基本性质,分式有意义的条件是分母不为零,一定要注意这个隐含条件,同时要注意正确运用运算率简化运算过程。最后的结果一定要是最简。