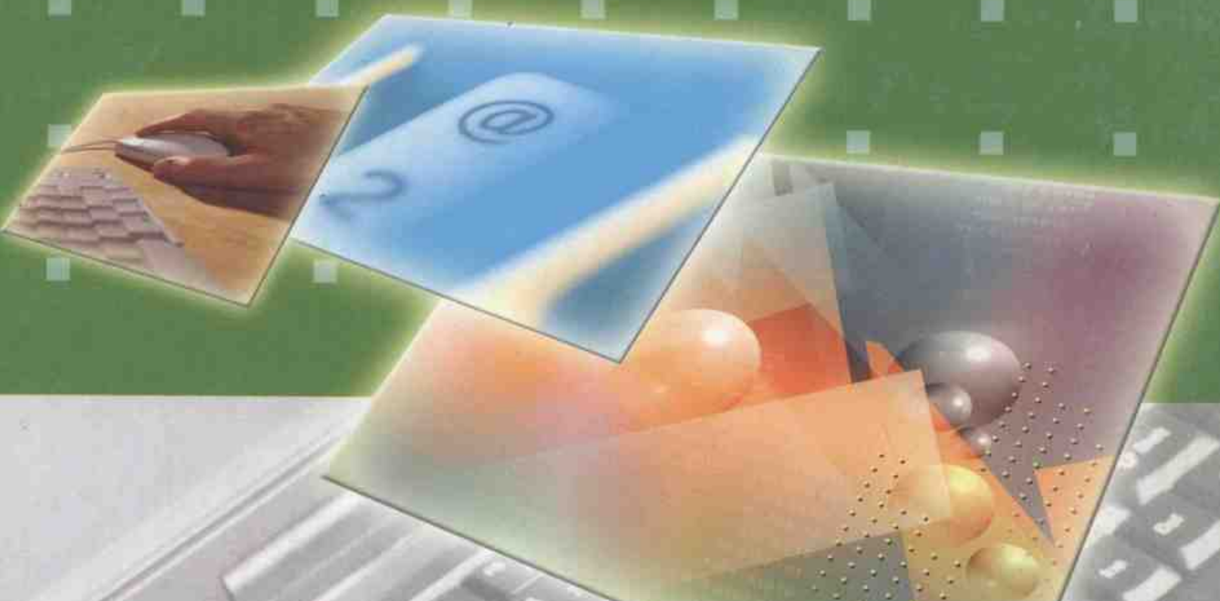
高等职业院校

技能型紧缺人才培养培训系列教材

# 计算机数学

（计算机应用与软件技术专业）

主编　黄国兴



高等教育出版社

高等职业院校
技能型紧缺人才培养培训系列教材

# 计算机数学

(计算机应用与软件技术专业)

主编　黄国兴
编著　黄国兴　张桂芸　潘仁良　鲍彦如

高等教育出版社

**内容简介**

本书讲解计算机所需的但在普通中学教材中未涉及的数学知识或需要重点了解的内容。本书主要内容有：集合、矩阵概论、关系、函数与集合的基数、布尔代数、组合数学初步、离散概率与离散随机过程初步、命题逻辑基础、谓词逻辑基础、模糊逻辑初步、图与树、数学软件 MATLAB 及其使用简介等。

本书适合作为高职计算机专业的基础课教材。

**图书在版编目(CIP)数据**

计算机数学/黄国兴主编 .—北京：高等教育出版社，2004.7

ISBN 7-04-014917-6

Ⅰ.计… Ⅱ.黄… Ⅲ.电子计算机-数学基础-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ.TP301.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 052644 号

**策划编辑** 鲍 涌 **责任编辑** 胡乃冏 **封面设计** 刘晓翔
**责任绘图** 宗小梅 **版式设计** 范晓红 **责任校对** 杨凤玲
**责任印制** 陈伟光

| | | | |
|---|---|---|---|
| **出版发行** | 高等教育出版社 | **购书热线** | 010-64054588 |
| **社　　址** | 北京市西城区德外大街 4 号 | **免费咨询** | 800-810-0598 |
| **邮政编码** | 100011 | **网　　址** | http://www.hep.edu.cn |
| **总　　机** | 010-82028899 | | http://www.hep.com.cn |
| **经　　销** | 新华书店北京发行所 | | |
| **印　　刷** | 北京市白帆印务有限公司 | | |
| **开　　本** | 787×1092　1/16 | **版　　次** | 2004 年 7 月第 1 版 |
| **印　　张** | 14.25 | **印　　次** | 2004 年 7 月第 1 次印刷 |
| **字　　数** | 330 000 | **定　　价** | 19.30 元 |

# 出版说明

为了贯彻《国务院关于推进职业教育改革与发展的决定》的精神,促进职业教育更好地适应社会主义现代化建设对生产、服务第一线技能型人才的需要,教育部、劳动和社会保障部、国防科工委、信息产业部、交通部、卫生部联合发出了关于实施“职业院校制造业和现代服务业技能型紧缺人才培养培训工程”的通知。

根据“工程”的精神,教育部、信息产业部联合推出了《高等职业教育计算机应用与软件技术专业领域技能型紧缺人才培养指导方案》,对职业教育教学改革提出了新的要求。即:职业教育是就业教育,要按照职业教育本身所固有的规律,在借鉴国内外成功经验的基础上,建立具有鲜明职业教育特点的课程体系。方案强调照顾学生的经验,强调合作与交流,强调多种教学方式交替使用,强调教师是学生学习过程的组织和对话伙伴。

为了帮助职业学校教师理解新的教学理念,更好地实施技能型紧缺人才培养计划,在深刻理解新的教学指导方案的基础上,高等教育出版社率先出版一套计算机应用与软件技术专业领域教材,以期帮助教师理解方案和组织教学,其特点有:

1. 借鉴国外先进的职业教育经验

研究了国外职业教育的各种模式,如英国的 BTEC 模式,印度的 NIIT 模式,澳大利亚的 TAFE 模式等,学习借鉴这些模式的优秀之处,又不拘泥于某种模式。

2. 协作式学习方式

强调以学生的团队学习为主,学生分成小组共同就某些问题进行讨论。同时认为学习与思考同等重要。在有限的时间内,使学生最大限度地掌握技能,并掌握自主学习的方法,为其今后的知识和能力拓展打下良好的基础。通过这种方法,有效地培养学生的沟通能力,如口头表达能力、书面表达能力、理解他人的能力和发表自己见解的能力。

3. 采用项目教学法组织教材

通过项目的活动过程培养学生的分析问题能力,团队精神,法律意识,沟通能力。每个项目相对较小,使学生对单一项目的学习过程不会太长,以减少学生的学习难度,提高学习兴趣。

4. 精心组织教材开发队伍

邀请教育专家、计算机专家、企业人士、职教教师共同参与项目开发,特别注意吸收双师型教师参加。

5. 根据项目特点设计课程解决方案

教材的组织是一个项目的解决方案,不是知识的细化,不以教会学生知识为目标,而以帮助学生掌握项目实施过程为目的。

6. 提供分层教学

书中实训指导、作业编排有一定梯度，以适应不同类别，不同能力学生的需要。

7. 配套完备的教学解决方案

教材出版的同时，与之配套的电子教案及与教材相关的素材将通过网站：http://sv.hep.com.cn 公布，供任课教师免费下载。

通过以上方式，高等教育出版社将为职业院校师生提供精良的教学服务，有不完备的地方也欢迎广大的职业院校的师生给予批评指正。

高等教育出版社

2004年5月

# 前　言

为配合教育部“技能型紧缺人才培养培训工程”的实施，高等教育出版社组织教育专家、职业教育一线的骨干教师、企业的工程技术人员和培训工程师根据技能型人才培养模式的要求编写了一套适用于职业教育的教材。教材在形式上按项目进行组织，在内容上主要选择生产生活中实用的案例展开讲解，使职业技能训练与常规教学活动有机结合。教材出版的同时，与本书配套的电子教案及与教材相关的素材将通过网站:http://sv.hep.com.cn公布，供任课教师免费下载。

随着21世纪的到来，信息技术的发展日新月异，从事计算机科学与技术工作的工程技术人员越来越多，计算机科学技术学科在国民经济建设中的地位也越来越重要。计算机技术与电子技术、工程以及数学有很深的渊源。计算机技术中的许多问题和数学有关，现实生活中又有许多问题需要我们利用计算机去解决。例如布尔代数，它研究的集合中只有0和1两个元素，但人们正是利用了布尔代数的原理发明了计算机。数码时代信息的表示都和0、1两个元素分不开。当我们在考虑超市的物流配送时、当我们在检索数据库中的信息时都要用到一些数学工具。再举一个有趣的例子，某人某月得到一对幼兔。兔子满两月后就每月生一对小兔子。所生的小兔子也是在满两月后，每月生一对小兔子。我们可以算出第1,2,3,4,5,6个月的兔子数将分别是1,1,2,3,5,8对。那么第35个月的兔子数是多少呢？问题似乎有点难了，但是上面的问题如果用数学工具来描述并用计算机来解就比较容易了。这些数学工具和我们以前所学的通常意义下的数学有点不同，它没有许多复杂的公式的包装，基本上不涉及传统意义上的高等数学的内容。很多问题都是我们生活中碰到的，很容易理解，而解决的方法也比较简单，当然有些也比较难。我们把上面提到的能够用来解决问题的数学工具整理汇总，由于这些内容和计算机密切相关，我们把整理汇总后的教材称为《计算机数学》，它的内容包括集合论、逻辑学、图论、组合学和离散概率等。在书中我们力求以实际例子引出抽象的数学概念，做到“深入浅出”，有利于使学生体会由具体到抽象的思维过程。在内容的安排上，把计算机技术领域内所必需的有关离散结构的内容尽可能地进行介绍，在介绍知识的深度和广度方面根据学生的认知特点作了权衡。在学习本书的过程中，希望同学们能通过对实际例子的分析理解进而掌握由此引出的数学概念，并在理解概念的基础上引发应用这些概念的联想。每一节后所附的习题是帮助同学们在课后巩固学到的知识而设计的，大家可以通过讨论后在理解的基础上完成练习。如果每一位同学都能做到这几点，那么就一定能学好《计算机数学》并能在实际工作中发挥作用。

全部内容可以设计成72学时和108学时进行教学，如果对目录中有“*”号的内容不作要求可用72学时否则为108学时，建议学时中括号内的数字为108学时模式下的学时数。

本书共分11章，第1章介绍集合论，其中包含了模糊集合的内容，建议教学时4(6)；第2章介绍矩阵概念，矩阵的运算及在图形学中的应用，建议教学时6(10)；第3章介绍关系的概念、关

系代数及关系数据库，建议教学时10(12)；第4章介绍函数的基本概念和性质，并在函数概念的基础上讨论无限集和基数，建议教学时4(6)；第5章介绍布尔代数，建议教学时4(4)；第6章介绍组合数学，建议教学时8(11)；第7章介绍离散概率，建议教学时8(12)；第8章介绍命题逻辑，建议教学时10(13)；第9章介绍谓词逻辑，建议教学时6(8)；第10章介绍模糊逻辑的有关概念以及它在近似推理中的应用，建议教学时0(8)；第11章介绍图和图论的基本知识，建议教学时12(18)。

由于本教材涉及的内容比较多，各学校的教师和学生的情况也不一样，在学习本书时，各校可以适当调整建议学时，同时对其中一些章节的内容也可以根据各校的实际情况进行裁剪处理。

本教材由张桂芸、鲍彦如编写了第3、4、5、8、9、11章，潘仁良、黄国兴编写了第1、2、6、7、10章及附录，最后由黄国兴、张桂芸对全书进行统稿。李志斌教授认真审阅了全书并提出了许多建设性的意见和建议，高等教育出版社的领导和编辑对本书的编写自始至终十分关心，在此一并致谢。

由于计算机科学技术发展迅速加上编者水平有限，书中错误和不妥之处恳请批评指正。

编者

2004年3月

# 目　录

# 第1章 集合论

集合是现代数学中最为基本的，也是应用最广泛的一个概念．粗略地说，在一定场合下所考察研究的事物全体都可称为一个集合．例如，全体男人、全体女人、全体青少年、某工厂全体中层干部、某公园星期天的全体游客等等，可分别构成各种人的集合；而全体实数、全体有理数、全体自然数以及 10 以内的全体自然数等等，可构成各种数的集合；有时，甚至连两头牛、三只羊和一匹骆驼也可构成一个集合．集合在数学领域有着重要的作用，特别在计算机科学所涉及到的数学理论中，集合论是十分有用的基本工具．

## §1.1 集合的概念与表示

### 1.1.1 集合的概念

集合是一个不能精确定义的基本概念．在集合论中研究的集合通常是由具有某种特定性质的、可以互相区别的、具体的或抽象的若干事物组成的．组成集合的每一个具体的或抽象的事物，被称为该集合的一个元素．如某学院的全体学生是一个集合，而每一个学生就是其中一个元素．

通常用大写的带下标或不带下标的英文字母表示集合的名称；用小写的带下标或不带下标的英文字母表示组成集合的事物，即元素．并且约定 $\mathbf{N}$、$\mathbf{Z}$、$\mathbf{Q}$ 和 $\mathbf{R}$ 分别表示自然数集、整数集、有理数集和实数集等等．按照传统的概念，若给定一个集合 $A$，则某一事物 $a$，或者是它的一个元素，或者不是它的元素，二者必居其中之一，决不允许模棱两可．

若元素 $a$ 属于集合 $A$，记作 $a \in A$，若元素 $a$ 不属于 $A$，记作 $a \notin A$．

## 1.1.2 集合的表示

一般可用三种方法表示集合.

**列举法**:列出集合中的全体元素,元素之间用逗号分开,然后用花括号括起来.设 $A$ 是以 $a$, $b$, $c$, $d$ 为元素的集合,$B$ 是正偶数集合,则 $A=\{a,b,c,d\}$,$B=\{2,4,6,\cdots\}$.

**描述法**:通过指出集合中元素所具有的性质来表示集合.如果集合 $A$ 中的元素具有性质 $p$,不是集合 $A$ 中的元素都不具有性质 $p$,也就是说 $A$ 是所有具有性质 $p$ 的元素组成的集合,这时,将 $A$ 表示为

$$\{x|p(x)\}.$$

例如,$A=\{x|x$ 是整数$\}$,$B=\{x|x$ 为年龄大于十八岁的中国公民$\}$.

集合的第三种表示法**特征函数表示法**在下面小节介绍.

对于集合的表示法应该注意以下几点:

(1) 集合中的元素是各不相同的;

(2) 集合中的元素不规定顺序;

(3) 集合的两种表示法有时是可以互相转化的.例如,列举法中的 $B$ 可用描述法表示为 $B=\{x|x>0$ 且 $x$ 为偶数$\}$或 $B=\{x|x=2(k+1),k$ 为非负整数$\}$.而描述法中的 $A$ 可用列举法表示为 $A=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$.

## 1.1.3 集合的相等与包含

**定义 1.1** 设 $A$,$B$ 为两个集合,若 $B$ 中的每个元素都是 $A$ 中的元素,则称 $B$ 是 $A$ 的**子集**,也称 $A$ 包含 $B$ 或 $B$ 包含于 $A$,记作 $A\supseteq B$ 或 $B\subseteq A$.

若 $B$ 是 $A$ 的子集且 $A$ 中至少有一个元素不属于 $B$,则称 $B$ 是 $A$ 的**真子集**,记作 $B\subset A$.

设 $A=\{a,b,c\}$,$B=\{a,b,c,d\}$,$C=\{a,b\}$,则 $C\subseteq A\subseteq B$ 且有 $C\subset A\subset B$.又如,每个自然数都是整数,而有些整数不是自然数,所以,$\mathbf{N}$ 是 $\mathbf{Z}$ 的子集,而且 $\mathbf{N}$ 是 $\mathbf{Z}$ 的真子集,亦即 $\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}$.

**定理 1.1** 集合之间的包含关系具有下列性质:

(1) $A\subseteq A$(自反性);

(2) 若 $A\subseteq B$,$B\subseteq A$,则 $A=B$(反对称性);

(3) 若 $A\subseteq B$,$B\subseteq C$,则 $A\subseteq C$(传递性).

这里 $A$,$B$,$C$ 是任意的集合.

**定义 1.2** 设 $A$,$B$ 为两个集合,若 $A$ 包含 $B$ 且 $B$ 包含 $A$,则称 $A$ 与 $B$ **相等**,记作 $A=B$.

例如,设 $A$ 是小于 10 的素数集合,即 $A=\{2,3,5,7\}$,又如,$\{1,2,4\}=\{1,4,2\}$,$\{1,3,5,7,\cdots\}=\{x|x$ 是正奇数$\}$.

**定义 1.3** 不含有任何元素的集合称为**空集合**,简称为**空集**,记作$\varnothing$.

空集是客观存在的.例如设 $A=\{x|x^2+1=0$ 且 $x\in\mathbf{R}\}$,则 $A=\varnothing$,即 $A$ 是空集.

**定义 1.4** 如果在一个具体问题中,限定所讨论的集合都是某一集合的子集,则称该集合为**全集**或**论域**,常记为 $E$ 或 $X$.全集是一个相对性概念,由于所研究的问题不同,所取的全集也不

同.例如,在研究平面解析几何时,总是把整个坐标平面作为全集;而在研究整数的问题时,可以把整数集 $\mathbf{Z}$ 作为全集.

我们规定,空集是任何集合的子集,而集合 $A$ 是全集 $E$ 的子集,即

$$\varnothing \subseteq A \subseteq E.$$

$\varnothing$和 $A$ 称为$A$ 的两个平凡子集.

定义了论域 $X$,可以介绍集合的第三种表示法.

先介绍特征函数的概念.

设给定论域 $X$ 的一个子集 $A \subseteq X$,对 $X$ 中的任一元素 $x$,它与 $A$ 的关系只有两种情况,即 $x \in A$或 $x \notin A$.从而确定了一个从 $x$ 到$\{0,1\}$的映射 $\mu_A$,即

$$\mu_A : x \mapsto \mu_A(x) = \begin{cases} 1, x \in A; \\ 0, x \notin A, \end{cases}$$

称映射 $\mu_A$ 为集合$A$ 的特征函数.

集合 $A$ 的特征函数在$x$ 处的函数值$\mu_A(x)$刻画了元素 $x$ 对$A$ 的隶属程度.当隶属程度为 1 时,表示 $x$ 属于$A$;当隶属程度为 0 时,表示 $x$ 不属于$A$.因此, $\mu_A$ 与集合$\{0,1\}$相对应.如果把一个命题的真伪只取两个值$\{0,1\}$,0 代表伪,1 代表真,这就是所谓的“二值逻辑”了.

## 练习 1.1

1. 用列举法表示下列集合:

(1) 偶素数集合;

(2) 1 至 200 的整数中完全平方数集合;

(3) 非负整数集合;

(4) 英文字母集合.

2. 用描述法表示下列集合:

(1) 正切值为 1 的角集;

(2) 八进制数字集合;

(3) $x^2+5x+6=0$ 的解集;

(4) 能被 5 整除的整数集;

(5) 直角坐标系中,单位圆内的点集.

3. 给出集合 $A,B,C$ 的例子,使得 $A \in B, B \in C$,但 $A \notin C$.

4. 对任意集合 $A,B,C$,确定下列各命题是否为真,并证明之.

(1) 如果 $A \in B$ 及$B \subseteq C$,则 $A \in C$;

(2) 如果 $A \in B$ 及$B \subseteq C$,则 $A \subseteq C$;

(3) 如果 $A \subseteq B$ 及 $B \in C$,则 $A \in C$;

(4) 如果 $A \subseteq B$ 及 $B \in C$,则 $A \subseteq C$;

(5) 如果 $A \subseteq B$ 及 $B \in C$,则 $A \notin C$;

(6) $\{a,b\} \subseteq \{a,b,\{a,b\}\}$;

(7) $\{a,b\} \in \{a,b,\{a,b,c\}\}$;

(8) $\{a,b\} \in \{a,b,\{\{a,b\}\}\}$.

5. 下列集合中哪些是彼此相等的?

(1) $A=\{3,4\}$;

(2) $B=\{3,4,\varnothing\}$;

(3) $C=\{x\mid x\in\mathbf{R}\text{ 且 }x^2-7x+12=0\}$;

(4) $D=\{3,4,4\}$;

(5) $E=\{4,3,\varnothing,\varnothing\}$.

# § 1.2 集合的运算

## 1.2.1 集合的并、交、补、差运算

**定义 1.5** 由两个集合 $A$ 和 $B$ 的所有元素组成的集合称为 $A,B$ 的**并集**,记为 $A\cup B$.即 $A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}$. 如图 1.1 所示.例如,

$$\{1,2\}\cup\{5,6\}=\{1,2,5,6\}.$$
$$\{1,2\}\cup\{2,3\}=\{1,2,3\}.$$

集合之间的相互关系和有关运算在几何上可用文氏图进行形象的描述.即可用正方形或长方形表示全集 $E$,而集合可用正方形或长方形中的圆来表示,通常在图中用有阴影的区域表示新组成的集合.

**定义 1.6** 由两个集合 $A$ 和 $B$ 的公共元素组成的集合称为 $A,B$ 的**交集**,记为 $A\cap B$.即 $A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\}$.如图 1.2 所示.例如,

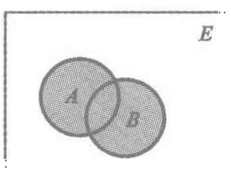



图 1.1

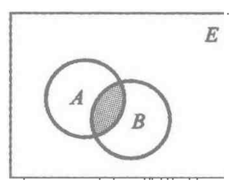



图 1.2

$$\{1,2\}\cap\{2,3\}=\{2\}.$$
$$\{1,2\}\cap\{5,6\}=\varnothing.$$

通常,当 $A\cap B=\varnothing$时,称 $A$ 和 $B$ 不相交.

**定义 1.7** 属于 $A$ 但不属于 $B$ 的元素组成的集合称为 $A$ 关于 $B$ 的**差集**,记为 $A-B$.即 $A-B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\notin B\}$.如图 1.3 所示,特别地,称 $E-A$ 为 $A$ 的**补集**,记为 $\bar{A}$.$\bar{A}=\{x\mid x\notin A\}$.如图 1.4 所示.例如,

$$\{1,2\}-\{2,3\}=\{1\}.$$
$$\{1,2\}-\{5,6\}=\{1,2\}.$$
$$\{1,2\}-\{1,2,3\}=\varnothing.$$

若 $E$ 为 $\mathbf{N}^*$,$A=\{1,2\}$,则

$\bar{A}=\mathbf{N}^*-\{1,2\}=\{3,4,5,\cdots\}$.

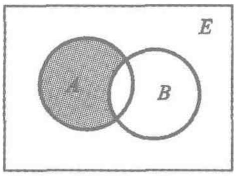


图 1.3

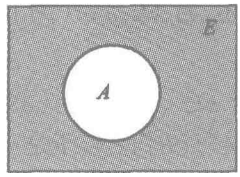


图 1.4

**定理 1.2** 设 $A,B,C$ 为三个集合,若 $A\subseteq B$,则$(A\cup C)\subseteq(B\cup C)$,$(A\cap C)\subseteq(B\cap C)$.

定理 1.2 的证明留作课后练习.

**定理 1.3** 集合的并、交运算有如下性质:

(1) $A\cup A=A$;(并的幂等律)
$A\cap A=A$.(交的幂等律)

(2) $A\cup B=B\cup A$;(并的交换律)
$A\cap B=B\cap A$.(交的交换律)

(3) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$;(并的结合律)
$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.(交的结合律).

(4) $A\cup(A\cap B)=A$;(并的吸收律)
$A\cap(A\cup B)=A$.(交的吸收律)

(5) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;(并关于交的分配律)
$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.(交关于并的分配律)

**证明** (1)幂等律与(2)交换律可以从定义直接推出.下面仅证明求并运算的另外三种性质.

证明(3)中并的结合律.

如果 $x\in A\cup(B\cup C)$,那么 $x\in A$ 或 $x\in B\cup C$,而 $x\in B\cup C$ 表示 $x\in B$ 或 $x\in C$.所以,若 $x\in A\cup(B\cup C)$,则 $x\in A$ 或 $x\in B$ 或 $x\in C$.亦即 $x\in A\cup B$ 或 $x\in C$,从而 $x\in(A\cup B)\cup C$,于是证得

$$A\cup(B\cup C)\subseteq(A\cup B)\cup C,$$

同理可证

$$A\cup(B\cup C)\supseteq(A\cup B)\cup C,$$

所以,由集合间包含关系的反对称性证得

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C.$$

证明(4)中并的吸收律.

若 $x\in A\cup(A\cap B)$,则 $x\in A$ 或 $x\in A\cap B$,从而 $x\in A$,所以 $A\cup(A\cap B)\subseteq A$,
由并集的定义

$$A\subseteq A\cup(A\cap B),$$

所以

$$A\cup(A\cap B)=A.$$

证明(5)中并关于交的分配律.

若 $x\in A\cup(B\cap C)$,则 $x\in A$ 或 $x\in B\cap C$.

当 $x\in A$ 时, $x\in A\cup B$ 且 $x\in A\cup C$,从而 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

当 $x\in B\cap C$ 时,$x\in B$ 且 $x\in C$,于是 $x\in A\cup B$ 且 $x\in A\cup C$,从而 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

综上所述,当 $x\in A\cup(B\cap C)$时,有 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$,亦即

$$A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

反之,若 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$,则 $x\in A\cup B$ 且 $x\in A\cup C$,这样,当 $x\notin A$ 时,$x\in B$ 且 $x\in C$,所以 $x\in A\cup(B\cap C)$,于是

$$(A\cup B)\cap(A\cup C)\subseteq A\cup(B\cap C).$$

从而证得

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

**定理 1.4** 集合运算还有如下性质:

(1) 零律 $A\cup E=E$ ; $A\cap\varnothing=\varnothing$.

(2) 同一律 $A\cup\varnothing=A$ ; $A\cap E=A$.

(3) 排中律 $A\cup\bar{A}=E$.

(4) 矛盾律 $A\cap\bar{A}=\varnothing$.

(5) 交补转换律 $B-A=B\cap\bar{A}$.

(6) 德摩根律

绝对形式

$$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B};$$
$$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}.$$

相对形式

$$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C);$$
$$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C).$$

下面仅对(6)中的德摩根律的相对形式进行证明.

**证明**

$$\begin{aligned}&A-(B\cup C)\\=&A\cap(\overline{B\cup C})\\=&A\cap(\bar{B}\cap\bar{C})\\=&(A\cap A)\cap(\bar{B}\cap\bar{C})\\=&(A\cap\bar{B})\cap(A\cap\bar{C})\\=&(A-B)\cap(A-C).\end{aligned}$$

类似可证 $$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C).$$

集合的特征函数具有以下运算性质:

(1) $\mu_{A\cup B}(x)=\max[\mu_A(x),\ \mu_B(x)]$,即 $A\cup B$ 的特征函数等于两集合 $A,B$ 的特征函数的最大值;

(2) $\mu_{A\cap B}(x)=\min[\mu_A(x),\ \mu_B(x)]$ ,即 $A\cap B$ 的特征函数等于两集合 $A,B$ 的特征函数的最小值;

(3) 设 $\bar{A}$ 是 $A$ 的补集,则 $\mu_{\bar{A}}=1-\mu_A(x)$,即集合 $A$ 与它的补集 $\bar{A}$ 的特征函数值之和等于 1.

此外,还可以根据特征函数的概念来描述集合间的下列关系:

(1) $A=\varnothing$的充要条件是 $\mu_A(x)\equiv0$;

(2) 集合 $A$ 等于论域 $X$ 的充要条件是 $\mu_A(x)\equiv 1$;

(3) $A\subseteq B$ 的充要条件是 $\mu_A(x)\leqslant\mu_B(x)$;

(4) $A=B$ 的充要条件是 $\mu_A(x)=\mu_B(x)$.

### 1.2.2 集合的幂集运算

我们先来看一个例子,设全集 $E=\{a,b,c\}$,它的所有可能的子集计有:

$S_0=\varnothing, S_1=\{a\}, S_2=\{b\}, S_3=\{c\}, S_4=\{a,b\}, S_5=\{b,c\}, S_6=\{c,a\}, S_7=\{a,b,c\}$.

这些子集都包含在 $E$ 中,即 $S_i\subseteq E(i=0,1,2,3\cdots,7)$,但是 $S_i\notin E$. 如果把 $S_i$ 作为元素,将可以另外组成一种集合.

**定义 1.8** 给定集合 $A$,由集合 $A$ 的所有子集为元素组成的集合,称为集合 $A$ 的**幂集**,记为 $P(A)$.

例如,$A=\{a,b,c\}$.

$P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\},\{c,a\},\{a,b,c\}\}$.

**定理 1.5** 如果有限集合 $A$ 有 $n$ 个元素,则其幂集 $P(A)$ 有 $2^n$ 个元素.

定理的证明留给读者课后完成.

现在我们引进一种编码,用来唯一的表示有限集幂集的元素,现以 $S=\{a,b,c\}$ 这个集合为例.

$P(S)=\{S_i|i\in J\}$. $J=\{i|i$ 是二进制数且 $000\leqslant i\leqslant 111\}$.

例如,$S_{011}=S_3=\{c\}$, $S_{110}=S_6=\{c,a\}$ 等. 一般的 $P(S)=\{S_0, S_1, \cdots, S_{2^n-1}\}$,即 $P(S)=\{S_i|i\in J\}$, $J=\{i|i$ 是二进制数且 $000\cdots0\leqslant i\leqslant 111\cdots1\}$(0 和 1 均为 $n$ 个).

**定理 1.6** 集合的幂集运算具有如下性质:

(1) $A\subseteq B$ 当且仅当 $P(A)\subseteq P(B)$;

(2) $P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$;

(3) $P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$;

(4) $P(A-B)\subseteq(P(A)-P(B))\cup\{\varnothing\}$.

**证明** (仅证明(3)和(4),(1)和(2)留作习题)

(3) 对于任意的集合 $X$,

$$\begin{aligned}&X\in P(A\cap B)\\ \Leftrightarrow\ &X\subseteq A\cap B\\ \Leftrightarrow\ &X\subseteq A \text{ 且 } X\subseteq B\\ \Leftrightarrow\ &X\in P(A)\text{ 且 } X\in P(B)\\ \Leftrightarrow\ &X\in P(A)\cap P(B).\end{aligned}$$

所以,
$$P(A\cap B)=P(A)\cap P(B).$$

(4) 对于任意的集合 $X$,

若 $X=\varnothing$,则 $X\in P(A-B)$ 且 $X\in(P(A)-P(B))\cup\{\varnothing\}$.

若 $X\neq\varnothing$,

$X\in P(A-B)$