晏平 编

复变函数引论

清华大学出版社

复变函数引论

晏 平 编

清华大学出版社
北京

内容简介

本书以解析函数为主线安排了复数与扩充复平面、复变函数与解析函数、复变函数沿有向曲线的积分、级数、奇点与留数、共形映射共6章内容，从微分、积分、级数、在一点处、在一个收敛点列、在一个区域中、共形映射等10个不同的层面来逐步深入地展开对解析函数的讨论，并利用解析函数的留数定理来计算一元实变函数的积分.

图书在版编目（CIP）数据

复变函数引论/晏平编. --北京：清华大学出版社，2011.2

ISBN 978-7-302-24206-2

Ⅰ. ①复…　Ⅱ. ①晏…　Ⅲ. ①复变函数　Ⅳ. ①O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 243182 号

责任编辑：刘　颖
责任校对：赵丽敏
责任印制：杨　艳

出版发行：清华大学出版社　　**地　址**：北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn　　**邮　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者：北京鑫海金澳胶印有限公司
经　销：全国新华书店
开　本：185×230　　**印　张**：9　　**字　数**：196 千字
版　次：2011 年 2 月第 1 版　　**印　次**：2011 年 2 月第 1 次印刷
印　数：1～4000
定　价：15.00 元

产品编号：026600-01

前　言

本书根据本人在清华大学多年讲授“复变函数引论”的讲义修改而成. 解析函数是复变函数研究的主要对象. 本书共6章，以解析函数为贯穿始末的主线，从10个不同的层面来讨论并逐步深入理解解析函数.

第1章，介绍复数、复平面、复球面与扩充复平面.

第2章，首先给出复变函数的极限、连续和可导(可微)的概念，这些概念是微积分中相应概念的平行推广. 接下来给出解析函数的定义. 由定义，我们对解析函数有了第1个层面的理解：**区域 D 中的解析函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 就是 D 中处处可导的函数**. 不少初学者会误认为只要 $u(x,y)$，$v(x,y)$ 在 D 中可微，$f(z)$ 就在 D 中解析. 接下来研究函数解析的充要条件，可以帮助我们纠正这一错误，得到对解析函数的第2个层面的理解：**解析函数的实部和虚部并不是两个任意的可微二元实函数，而是按照 Cauchy-Riemann 条件耦合在一起的两个可微函数**. 最后介绍几个基本的初等函数，它们是以后各章节研究的基本对象.

第3章研究复变函数沿有向曲线的积分. Cauchy-Goursat 基本定理是解析函数理论的基础. 由 Cauchy-Goursat 基本定理可以推导出复合闭路原理，得到 Cauchy 积分公式，从而对解析函数有了第3个层面的理解：**解析函数在区域边界上的值一经确定，它在区域内部的值也就唯一确定了**. 进一步的分析表明：**解析函数在圆心的值等于它在圆周上的平均值**. 这是对解析函数的第4个层面的理解. 由 Cauchy 积分公式可以得到解析函数的高阶求导公式，从而使我们对解析函数的理解上升到第5个层面：**解析函数的任意阶导函数仍然是解析函数**. Liouville 定理是一阶求导公式的推论，由 Liouville 定理可以给出代数学基本定理的一个简洁漂亮的证明，这也从一个侧面体现了复变函数的威力. Newton-Leibnitz 公式在微积分理论中极为重要，被称为微积分基本定理. 单连通区域中的解析函数也有原函数的概念以及 Newton-Leibnitz 公式. 通过构造原函数的方法可以证明 Morera 定理，从而对解析函数有了第6个层面的理解：**单连通区域中，函数 f 解析等价于 f 连续且积分与路径无关**. 第2章最后研究解析函数与调和函数的关系.

多项式函数是人们了解得最深刻的函数之一. 任给一个函数，人们禁不住要问，这个函数与多项式函数相差多少？如何用多项式函数来逼近？如此一来，研究复变函数的幂级数展开就是顺理成章的事情了，这正是本书第4章的内容. 由 Abel 定理，幂级数存在收敛圆，

幂级数的和函数在其收敛圆内解析(因而积分与路径无关)、可以逐项求导、逐项积分.多项式是如此简单,加之幂级数的和函数在其收敛圆域内有如此好的性质,这使得 Taylor 级数成为研究解析函数的强有力工具,它既有实际应用价值,又有理论价值.解析函数的 Taylor 展开使我们对解析函数有了第 7 个层面的理解:**函数在一点解析,等价于函数可以在这点的某个邻域内展开成 Taylor 级数**.这一点与一元实函数的情形不同.一元实函数即使无穷次可微,也不一定能展开成 Taylor 级数.由解析函数的 Taylor 展开可以得到零点孤立定理和唯一性定理,从而对解析函数有了第 8 个层面的理解:**解析函数在一个收敛点列(非常数列)上的值一经确定,这个函数就唯一确定了**.这是一个局部决定整体的惊人性质.结合 Cauchy 积分公式和唯一性定理,还可以得到最大模原理,这是对解析函数的第 9 个层面的理解:**非常数函数的解析函数的最大模只能在区域边界上取得**.Laurent 级数是 Taylor 级数的自然推广,它也是研究解析函数的重要工具,是我们在第 5 章中研究奇点和留数的基础.

第 5 章研究留数.首先利用 Laurent 展开对解析函数的孤立奇点(包括无穷远点∞)进行分类.等价地,也可以根据函数在孤立奇点处的极限状况对奇点进行分类.然后给出留数的定义,并给出留数计算规则.留数定理是本章的中心所在,Cauchy-Goursat 基本定理、Cauchy 积分公式和高阶求导公式都可以视为它的特殊情形.留数定理的应用之一是利用围道积分法计算一元实函数的定积分和广义积分.其中有些积分用微积分的方法处理起来很复杂,但用围道积分却变得简单可行.用解析函数的留数理论来处理一元实变函数的积分,表面上看来是把简单的问题复杂化了,但实际上却有意想不到的惊人效果.**围道积分在方法论上给了我们一个很好的提示**:我们把简单空间中的元素(实变量函数)看成复杂空间中的元素(复变量函数),空间变大了,表面上看是把简单问题复杂化了,似乎是杀鸡用了宰牛刀;但实际上,我们在更大的空间中能更好地施展拳脚,研究问题的方法和工具也相应多了,这提供了一个解决问题的好思路.本章最后一节讨论解析函数的对数留数和辐角原理.作为留数理论的又一重要应用,我们利用 Rouché 定理(辐角原理的推论)研究解析函数(特别是多项式函数)的零点分布.

第 6 章的中心内容是共形映射,有很强的应用价值.首先给出解析函数导数的几何意义,由此引出共形映射的概念,这是对解析函数的第 10 个层面的理解:**解析函数的导函数的辐角 $\mathrm{Arg}f'(z_0)$ 是经过映射 $w=f(z)$ 后过点 z_0 的任何曲线 C 在 z_0 处的转动角;模 $|f'(z_0)|$ 是曲线 C 在 z_0 处的伸缩率**.这一章,我们着重研究几个特殊的共形映射:分式线性映射以及幂函数和指数函数构成的映射.

由于本人水平有限,书中错误和缺点在所难免,敬请读者批评指正.

作　者

2010 年 5 月

目　　录

第 1 章 复数与扩充复平面

复变函数是以复数为自变量的函数. 在这一章,我们首先回顾复数的基本知识,包括复数的定义、共轭复数、复数的四则运算、复平面与复数的几何表示、复数的方幂与方根等,这些内容在中学教材中已有详细的讲解. 然后,我们通过复球面引入无穷远点∞和扩充复平面的概念. 对这些概念的透彻理解,是第 5 章中分析∞的奇点类型、定义和计算解析函数在∞的留数的基础. 复数关于圆周的对称点也是一个比较重要的概念,在第 6 章共形映射中,研究分式线性映射的保对称性时将要用到这一概念.

1.1 复数及其代数运算

1.1.1 复数与共轭复数

方程 $x^2+1=0$ 没有实数解,但数学家并没有因此而将这个问题拒之门外,人们引入一个新数 i,称为虚数单位,规定 $i^2=-1$,并记

$$i=\sqrt{-1}.$$

这看起来只是一个小小的探索和尝试,但它带给人们的回报却是惊人的. 虚数单位的引入带领人们从实数域进入复数域. 继而发展起来的复变函数理论是一门优美而又强有力的学科,它为人们开辟了一片新天地,它不仅在物理、电子等领域有着广泛的应用,而且在理论研究上也大有作为. 利用复变函数理论,可以给代数学基本定理(n 次多项式有且仅有 n 个复根)一个简洁而漂亮的证明. 大数学家 Causs 在 1825 年指出:“$\sqrt{-1}$ 的真正奥妙是难以捉摸的”.

对任意两个实数 x,y,称 $z=x+iy$ 为复数,并分别称 x,y 为复数 z 的实部和虚部,记为

$$x=\mathrm{Re}z,\quad y=\mathrm{Im}z.$$

当 $y=0$ 时,$z=x$ 为实数. 当 $x=0,y\neq0$ 时,称 $z=iy$ 为纯虚数. 如果两个复数的实部和虚部对应相等,则定义这两个复数相等. 称实部相同而虚部互为相反数的一对复数互为共轭复数,$z=x+iy$ 的共轭复数记为

$$\bar{z}=x-iy.$$

特别地，称 iy 与 $-iy$ 为共轭虚数.

1.1.2　复数的四则运算

与实数情形一样，对复数也可以定义四则运算. 复数的加减法和乘法运算法则，形式上与多项式的运算法则一样，但必须在所得的结果中把 i^2 换成 -1，并且把实部与虚部分别合并. 设 $z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$，规定

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2),$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

规定复数的除法是乘法的逆运算. 当 $z_2 \neq 0$ 时，若复数 $z=x+iy$ 满足等式 $z_2 z=z_1$，则称 z 为 z_1 除以 z_2 的商，记为 $z=\dfrac{z_1}{z_2}$. 由乘法法则及两个复数相等的条件可得

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2{}^2 + y_2{}^2} + i\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2{}^2 + y_2{}^2}.$$

注 1.1　如果根据除法的定义，每次都按乘法逆运算的方法来求商，这将是很麻烦的. 实际计算中，两个复数相除的较为简捷的求商方法是分母实数化，即分式的分子和分母同时乘以分母的共轭复数，使分母变成实数.

例 1　已知 $(z_1-2)(1-i)=1+i$，$\mathrm{Im}z_2=2$，$z_1 z_2 \in \mathbb{R}$. 求 z_2.

解　由 $(z_1-2)(1-i)=1+i$ 得，$z_1-2=\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{(1+i)^2}{2}=i$，故 $z_1=2+i$.

由 $\mathrm{Im}z_2=2$，可设 $z_2=x+2i$. 而 $z_1 z_2 \in \mathbb{R}$，则

$$\mathrm{Im}(z_1 z_2) = \mathrm{Im}((2+i)(x+2i)) = x+4 = 0,$$

即 $x=-4$，所以 $z_2=-4+2i$.

复数的运算满足以下性质，请读者自己验证.

(1) 交换律：$z_1+z_2=z_2+z_1$，$z_1 z_2=z_2 z_1$；

(2) 结合律：$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$，$(z_1 z_2)z_3=z_1(z_2 z_3)$；

(3) 分配律：$z_1(z_2+z_3)=z_1 z_2+z_1 z_3$；

(4) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$，$\overline{z_1 z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$，$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$；

(5) $\bar{\bar{z}}=z$；

(6) $z\bar{z}=[\mathrm{Re}z]^2+[\mathrm{Im}z]^2$；

(7) $z+\bar{z}=2\mathrm{Re}z$，$z-\bar{z}=2\mathrm{Im}z$.

1.2　复数的几何表示与复平面

1.2.1　复数与复平面

实数与数轴上的点一一对应，而复数 $z=x+iy$ 与有序实数对 (x,y) 一一对应，因此复

数与平面上的点可以建立一一对应关系. 给定平面直角坐标系, O 为坐标原点, x 轴为横轴, y 轴为纵轴, 则复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 与平面上坐标为 (x,y) 的点一一对应. 此时, 称 x 轴为实轴, 称 y 轴为虚轴, 称两轴所在的平面为复平面或 z 平面.

1.2.2 复数的模与辐角

如图 1.1, 复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 与复平面上从原点指向点 $P(x,y)$ 的向量 $\overrightarrow{OP}$ 一一对应. 向量 $\overrightarrow{OP}$ 的长度 r 称为复数 z 的模, 记作

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

显然

$$|\mathrm{Re}z|\leqslant|z|,\quad |\mathrm{Im}z|\leqslant|z|,\quad z\bar{z}=|z|^2.$$

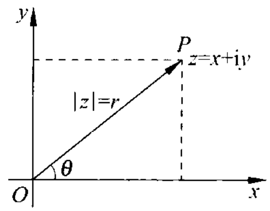

图 1.1

当 $z\neq 0$ 时, 以正实轴为始边, 以向量 $\overrightarrow{OP}$ 为终边的角的弧度 θ 称为复数 z 的辐角, 记作

$$\mathrm{Arg}z=\theta.$$

任意一个复数 $z\neq 0$ 有无穷多个辐角, 因此 $\mathrm{Arg}z$ 是一个多值函数. 在这些辐角中, 我们把满足 $-\pi<\theta_0\leqslant\pi$ 的辐角 θ_0 称为 $\mathrm{Arg}z$ 的辐角主值, 记作 $\theta_0=\arg z$. 于是

$$\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi\ (k\ \text{为任意整数}).$$

当 $z=0$ 时, $|z|=0$, 而 z 的辐角不确定.

由于复数与复平面上的点的一一对应关系, 我们既用 z 表示复数, 也不加区别地用 z 表示复平面上与之对应的点, 有时候还用 z 表示与之对应的向量(注意向量具有平移不变性).

可以验证, 两个复数的加法、减法运算与相应向量的加法、减法运算一致. 我们可以按平行四边形法则(如图 1.2)和三角形法则(如图 1.3)来理解复数的加法、减法运算. 由于 $|z_1-z_2|$ 表示点 z_1 与点 z_2 之间的距离, 由图 1.3 可以得到三角不等式

$$|z_1|+|z_2|\geqslant|z_1+z_2|\ (\text{两边之和大于第三边}),\tag{1.1}$$

$$||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1-z_2|\ (\text{两边之差小于第三边}).\tag{1.2}$$

当且仅当 z_1 与 z_2 同向时式(1.1)取等号; 当且仅当 z_1 与 z_2 同向时式(1.2)取等号.

利用复数的模来证明含有根式的不等式, 有时十分简捷.

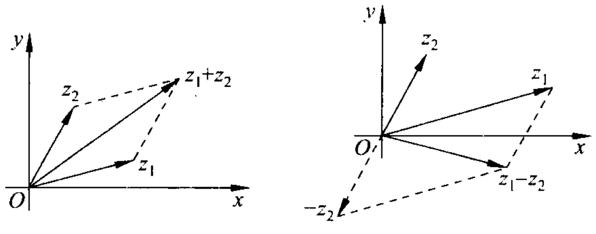

图 1.2

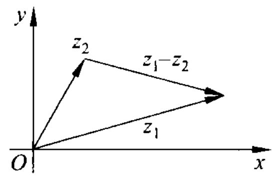

图 1.3

例 2 已知 $a,b,c\geqslant 0$，证明

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{a^2+c^2}\geqslant\sqrt{2}(a+b+c).$$

证明 设 $z_1=a+\mathrm{i}b, z_2=b+\mathrm{i}c, z_3=c+\mathrm{i}a$，则

$$z_1+z_2+z_3=(a+b+c)+\mathrm{i}(a+b+c).$$

由三角不等式(1.1)得

$$|z_1+z_2+z_3|\leqslant|z_1|+|z_2|+|z_3|,$$

即

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{a^2+c^2}\geqslant\sqrt{2}(a+b+c).$$

例 3 已知 $x\in\mathbb{R}$，求 $y=\sqrt{x^2-8x+20}+\sqrt{x^2+1}$ 的最小值.

解

$$\begin{aligned} y&=\sqrt{(x-4)^2+2^2}+\sqrt{x^2+1^2}\\ &=|(x-4)+2\mathrm{i}|+|(-x)+\mathrm{i}|\\ &\geqslant|(x-4+2\mathrm{i})+(-x+\mathrm{i})|\\ &=|-4+3\mathrm{i}|=5. \end{aligned}$$

当且仅当 $x-4+2\mathrm{i}$ 与 $-x+\mathrm{i}$ 同向，即 $\dfrac{x-4}{-x}=\dfrac{2}{1}$，$x=\dfrac{4}{3}$ 时，$y_{\min}=5$.

例 4 复数 z 满足 $|z+\mathrm{i}|+|z-\mathrm{i}|=2$，求 $|z+1+\mathrm{i}|$ 的最值.

解 $|z+\mathrm{i}|+|z-\mathrm{i}|=2$ 表示点 z 到点 $A(0,-1)$ 的距离与到点 $B(0,1)$ 的距离之和为 2，而 $|AB|=2$，所以 z 为线段 AB 上的点. 而 $|z+1+\mathrm{i}|=|z-(-1-\mathrm{i})|$ 表示点 z 与点 $C(-1,-1)$ 之间的距离. 因此该问题的几何意义是求线段 AB 上的点到点 C 的距离的最大值与最小值. 如图 1.4. 于是有

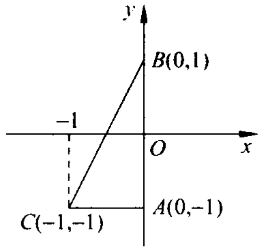

图 1.4

$$|z+1+\mathrm{i}|_{\max}=|BC|=\sqrt{5},\quad |z+1+\mathrm{i}|_{\min}=|AC|=1.$$

例 5 非零复数 z_1,z_2 满足 $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$，求证 $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^2$ 为负数.

证明 将已知条件 $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$ 改写为 $|z_1+z_2|^2=|z_1-z_2|^2$，也即

$$(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}=(z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)}.$$

展开得

$$z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=0.$$

而 $z_1\neq0, z_2\neq0$，等式两边同时除以 $z_2\overline{z_2}$，得

$$\frac{z_1}{z_2}+\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=0.$$

又 $\dfrac{z_1}{z_2}\neq0$，所以 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 为纯虚数，从而 $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^2$ 为负数. □

1.2.3 复数的各种表示

利用直角坐标与极坐标之间的关系

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta,$$

复数

$$z = x + \mathrm{i}y \tag{1.3}$$

可以表示为

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta). \tag{1.4}$$

引入记号

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \exp(\mathrm{i}\theta) = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta, \tag{1.5}$$

z 可以进一步表示为

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \quad 或 \quad z = r\exp(\mathrm{i}\theta). \tag{1.6}$$

分别称式(1.3),式(1.4)和式(1.6)为复数的代数表示式、三角表示式和指数表示式.

1.3 复数的乘幂与方根

1.3.1 复数乘法、除法的几何意义

利用复数的三角表示式,我们可以从几何上进一步理解复数的乘法与除法. 设

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1),\quad z_1 = r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2),$$

则

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1r_2(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2) \\ &= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + \mathrm{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)] \\ &= r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 + \theta_2)]. \end{aligned}$$

于是

$$|z_1z_2| = |z_1||z_2|, \tag{1.7}$$

$$\mathrm{Arg}(z_1z_2) = \mathrm{Arg}z_1 + \mathrm{Arg}z_2. \tag{1.8}$$

由于辐角的多值性,等式(1.8)表示等号两边的集合完全相等. 我们按照如下定义理解等式(1.8)的右端. 设 A,B 为$\mathbb{R}$中两个集合,定义

$$A+B=\{a+b \mid a\in A, b\in B\},$$

$$A-B=\{a-b \mid a\in A, b\in B\}.$$

当 $z_2\neq 0$ 时,$z_1=\frac{z_1}{z_2}z_2$. 由式(1.7)与式(1.8)可得

$$|z_1| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right||z_2|,\quad \mathrm{Arg}z_1 = \mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) + \mathrm{Arg}z_2.$$

于是

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},\quad \mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg}z_1 - \mathrm{Arg}z_2. \tag{1.9}$$

如果用指数形式表示复数

$$z_1=r_1e^{i\theta_1},\quad z_2=r_2e^{i\theta_2},$$

则由式(1.7),式(1.8)与式(1.9)可得

$$z_1z_2=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)},\tag{1.10}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}\quad(r_2\neq 0).\tag{1.11}$$

上面的分析可以总结为如下定理.

定理 1.2　两个复数相乘,乘积的模等于它们的模的乘积,乘积的辐角等于它们的辐角之和;两个复数相除,商的模等于它们的模的商,商的辐角等于被除数与除数的辐角之差.

注 1.3　如图 1.5,几何直观上,向量 z_1z_2 是由向量 z_1(逆时针)旋转一个角度 $\mathrm{Arg}z_2$,再伸长(缩短)到 $|z_2|$ 倍得到的;向量$\dfrac{z_1}{z_2}$是由向量 z_1(逆时针)旋转一个角度$-\mathrm{Arg}z_2$,再伸长(缩短)到$\dfrac{1}{|z_2|}$倍得到的.

例 6　已知正三角形的两个顶点为 $z_1=1$ 和 $z_2=2+\sqrt{3}i$,求它的另一个顶点 z_3.

解　如图 1.6,向量 z_3-z_1 应该由向量 z_2-z_1 绕点 z_1 逆时针或顺时针旋转$\dfrac{\pi}{3}$得到,因此

$$z_3-z_1=(z_2-z_1)e^{\pm\frac{\pi}{3}i}=(1+\sqrt{3}i)e^{\pm\frac{\pi}{3}i}=2e^{\frac{\pi}{3}i}e^{\pm\frac{\pi}{3}i}=2e^{\left(\frac{\pi}{3}\pm\frac{\pi}{3}\right)i},$$

即

$$z_3=z_1+2e^{\frac{2\pi}{3}i}=1+2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\sqrt{3}i,$$

或

$$z_3=z_1+2=3.$$

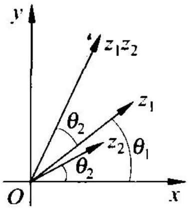

图　1.5

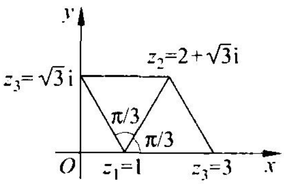

图　1.6

例 7　非零复数 z_1,z_2 满足 $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$,求证$\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^2$为负数.

证明　(本例即例 5,这里我们给出另一个证明方法.)已知条件两边同时除以 $|z_2|(\neq 0)$,得

$$\left|\frac{z_1}{z_2}+1\right|=\left|\frac{z_1}{z_2}-1\right|.$$

因此点$\frac{z_1}{z_2}$到点 $A(-1,0)$ 与到点 $B(1,0)$ 的距离相等,也就是说点$\frac{z_1}{z_2}$在线段 AB 的垂直平分线即 y 轴上. 又 $z_1\neq 0, z_2\neq 0, \frac{z_1}{z_2}\neq 0$,故$\frac{z_1}{z_2}$为纯虚数,从而$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2$ 为负数.

1.3.2 复数的乘幂

称 n 个相同的复数 z 的乘积为 z 的 n 次幂,记作 z^n. 当 n 为负整数时,定义 $z^n=\frac{1}{z^{-n}}$. 实数集$\mathbb{R}$中整数指数幂的运算律,在复数集$\mathbb{C}$中仍然成立,即对任何 $z, z_1, z_2\in\mathbb{C}$ 及 $m, n\in\mathbb{N}$,有

$$z^m z^n = z^{m+n},\quad (z^m)^n = z^{mn},\quad (z_1\cdot z_2)^m = z_1^m z_2^m.$$

注 1.4 上述指数幂运算公式只在整数指数幂的范围内才能成立. 如果把上述法则扩展到分数指数幂内运用,就会得到荒谬的结果. 如 $i^2=-1, i^4=1$,若由 $i^2=\{i^4\}^{\frac{1}{2}}=1^{\frac{1}{2}}=1$,就会得到 $-1=1$ 的错误结论.

实数集中的乘法公式在复数集中仍然成立.

例 8 已知 $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$,求证: $1+\omega+\omega^2=0, \omega^3=1$.

证明 由 $\omega^2=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\times\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$,得 $1+\omega+\omega^2=0$. 所以 $\omega^3-1=(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$,即 $\omega^3=1$. □

例 9 化简 $(1+i)^n+(1-i)^n$.

解
$$\begin{aligned}(1+i)^n+(1-i)^n &= \left\{\sqrt{2}\exp\left(\frac{\pi}{4}i\right)\right\}^n+\left\{\sqrt{2}\exp\left(-\frac{\pi}{4}i\right)\right\}^n\\
&=(\sqrt{2})^n\exp\left(\frac{n\pi}{4}i\right)+(\sqrt{2})^n\exp\left(-\frac{n\pi}{4}i\right)\\
&=(\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)+(\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4}\right)\\
&=2^{\frac{n+2}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}.\end{aligned}$$

1.3.3 复数的方根

设 n 为正整数,如果 $w^n=z$,则称 w 为 z 的 n 次方根,记作 $w=\sqrt[n]{z}$. 为了求 z 的 n 次方根,记 $z=re^{i\theta}, w=\rho e^{i\phi}$,则

$$\begin{aligned}w^n=z &\Leftrightarrow \rho^n e^{in\phi}=re^{i\theta}\quad (\text{公式}(1.10))\\
&\Leftrightarrow \rho^n=r,\quad n\phi=\theta+2k\pi,\quad k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\\
&\Leftrightarrow \rho=r^{\frac{1}{n}},\quad \phi=\frac{\theta+2k\pi}{n},\quad k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\end{aligned}$$

其中，$r^{\frac{1}{n}}$ 为 r 的 n 次算术根. 于是 $w^n=z$ 的根为

$$w_k=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

注意到当 k_1-k_2 为 n 的整数倍时 $w_{k_1}=w_{k_2}$. 于是 $w^n=z$ 有且仅有 n 个相异的根，它们对应于 k 取 $0,1,2,\cdots,n-1$ 的情形：

$$w_0=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{n}\right),$$

$$w_1=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2\pi}{n}\right),$$

$$\vdots$$

$$w_{n-1}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}\right).$$

这 n 个根均匀地分布在以原点为圆心，以 $r^{\frac{1}{n}}$ 为半径的圆周上.

综上，z 的 n 次方根 $\sqrt[n]{z}$ 是多值函数，它有 n 个分支：

$$\sqrt[n]{z}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),\quad k=0,1,2,\cdots,n-1. \tag{1.12}$$

例 10　计算 $\sqrt[3]{1-\mathrm{i}}$.

解　因为

$$1-\mathrm{i}=\sqrt{2}\exp\left(-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}\right),$$

所以

$$\sqrt[3]{1-\mathrm{i}}=\sqrt[6]{2}\exp\left(\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\mathrm{i}\right),\quad k=0,1,2,$$

即

$$w_1=(\sqrt[3]{1-\mathrm{i}})_1=\sqrt[6]{2}\exp\left(\frac{-\pi}{12}\mathrm{i}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}\right),$$

$$w_2=(\sqrt[3]{1-\mathrm{i}})_2=\sqrt[6]{2}\exp\left(\frac{7\pi}{12}\mathrm{i}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{12}\right),$$

$$w_3=(\sqrt[3]{1-\mathrm{i}})_3=\sqrt[6]{2}\exp\left(\frac{5\pi}{4}\mathrm{i}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right).$$

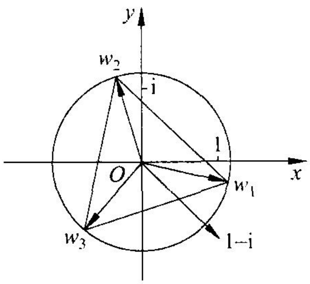

图 1.7

这三个根是以原点为圆心、以 $\sqrt[6]{2}$ 为半径的圆的内接正三角形的三个顶点（如图 1.7 所示）.