高等学校教学参考书

高等数学

（基础部分）

上册

清华大学数学教研组编

人民教育出版社

高等学校教学参考书

高等数学

（基础部分）

上册

清华大学数学教研组编

人民教育出版社

出 版 前 言

本书是按1964年8月第一版重印的，重印前由清华大学数学教研组作了一次勘误。

本书分上下两册出版，上册内容是平面解析几何与一元函数的微积分学。

本书可作为高等工业院校的数学参考书，也可供有关的工程技术人员参考。

高 等 数 学

（基础部分）

上　　册

清华大学数学教研组编

人民教育出版社出版（北京沙滩后街）

北京新华印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

统一书号 13012·0184　开本 850×1168　1/32　印张 15

字数 333,000　印数 49,001—199,000　定价（5）¥1.40

1964年8月第1版　　1978年9月第5次印刷

上册目录

预备知識

§1. 实数与数軸

数，最初产生于点算物件的个数，最基本的数是自然数：$1, 2, 3, \cdots$.

数的运算中，最簡单的是加法运算．事实上，点算物件的个数也体現着一个一个地累加．

由于生产的逐漸发展，人們对客观事物的认識逐漸深入，数的运算扩充为四則运算，数的范圍亦由自然数扩充到整数：$0, \pm 1, \pm 2, \cdots$，再扩充到有理数．所謂有理数，是指$\frac{q}{p}$这种形式的数，其中 p，q 都是整数，且 $p \neq 0$．有理数当然包括了所有整数，这是因为，当 $p=1$ 时，有理数就簡化为整数．

有理数可以用十进位小数来表示，这些小数或者是有尽的，或者是循环的．例如：

$$\frac{1}{4}=0.25, \quad \frac{5}{6}=0.8\dot{3}, \quad \frac{22}{7}=3.\dot{1}4285\dot{7}.$$

反过来，任何一个有尽小数或循环小数也都可以化为有理数．

在实际生活中，常要測量一些物理量，如长度、面积、时間、溫度、重量等，取了一定的单位以后，这些量都可以被測量，測量的結果用数来表示．但有些量不能用有理数来表示，例如，对于两直角边皆为单位长度的直角三角形，其斜边的长度为$\sqrt{2}$个单位长度，$\sqrt{2}$不是一个有理数，又如半徑为单位长度的圓，它的面积是 π 个单位面积（单位长度的平方），π 也不是一个有理数．像$\sqrt{2}$，π 这样的数，如果用十进位小数来表示，都是不循环的无尽小数：

$$\sqrt{2}=1.4142135\cdots,\ \pi=3.1415926\cdots,$$

这种不循环的无尽小数叫做无理数.

有理数与无理数統称为实数. 在实数范圍內, 可以进行更多种的运算, 如对于正的实数可以进行开方, 取对数, 对于任何实数可以取三角函数等. 在高等数学这一門課程中, 除了个别情况外, 所遇到的都是实数.

大家都知道, 在数学中經常采取数与形相結合的方法来研究問題, 例如, 三角函数这种数量关系与直角三角形紧密联系着, 又如, 数量間的比例关系与相似形有直接的联系. 通过图形我們不仅能直观地认識数量的抽象性质, 并且还可以利用图形解决一些数量的問題(如第六章中将要讲到的方程的图解法); 通过数量关系的研究也能解决一些重要的几何問題(如第五章中将要讲到如何利用数量关系来精密地作出曲綫的切綫). 現在我們研究实数, 也要設法将数与形結合起来.

設有一条无穷长的直綫, 习慣上都把它放在水平的位置, 在这直綫上任取一点 O, 称为原点, 在这直綫上規定好一个正方向 (习慣上規定向右的方向为正方向), 在这直綫上再規定好一个长度的单位. 这种具有原点、正方向与长度单位的直綫叫做数軸.

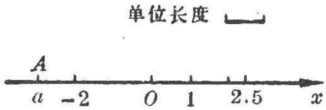


图 0.1

对于每一个实数 a, 我們可以在数軸上規定一个点 A 与它对应. 規定的方法是: 若 $a=0$, 則点 A 就是原点; 若 $a>0$, 則点 A 在原点之右, 且点 A 与原点間的距离等于 a 个单位长度; 若 $a<0$, 則点 A 在原点之左, 且点 A 与原点間的距离等于 $-a(-a>0)$ 个单位长度.

反过来說, 对于数軸上每一个点 A, 我們可以規定一个实数 a 与它对应. 規定的方法是: 若点 A 是原点, 則 $a=0$; 若点 A 在原点 O 之右, 則 $a=|OA|$ ($|OA|$ 表示点 A 与原点 O 之間的距离); 若点 A 在原点 O 之左, 則 $a=-|OA|$.

这样一来，所有实数与数軸上所有的点形成了一种一一对应的关系，从而实数的性质与数軸上的点的性质就发生了紧密的联系.

总起来說：有理数与无理数統称为实数．每一个实数可用十进位小数来表示，有理数可用有尽小数或循环小数来表示，无理数可用不循环的无尽小数来表示．在所有实数与数軸上所有点之間存在着一一对应的关系，也就是說，对于每一个实数 a，在数軸上有一个点 A 与它对应，对于数軸上每一个点 A，有一个实数 a 与它对应．这种对应关系可以用下面的数学式子来表示：

$$a=\begin{cases}|OA|, & \text{当点 } A \text{ 在原点 } O \text{ 之右,}\\ 0, & \text{当点 } A \text{ 与原点 } O \text{ 重合,}\\ -|OA|, & \text{当点 } A \text{ 在原点 } O \text{ 之左,}\end{cases}$$

其中 $|OA|$ 表示点 A 与原点 O 之間的距离，也就是綫段 $\overline{OA}$ 的长度.

数軸也称为实数軸，也簡称为軸．与点 A 相对应的实数 a 称为点 A 在数軸上的坐标.

为了簡单計，我們时常不去区分一实数和它的对应点，而用同一符号来表示它們，我們有时說实数 a，也有时說点 a.

数軸上与有理数相对应的点叫做有理点，与无理数相对应的点叫做无理点.

显然，如实数 a 小于实数 b，則点 a 在点 b 的左方，且 $b-a$ 就是点 a 与点 b 間的距离.

現在我們进而提出实数的两个重要性质：

第一，有理数的稠密性．任給两个有理数 $a, b(a<b)$，則在 a, b 之間至少可以找到一个有理数．例如，a, b 的算术平均数 $c=\frac{a+b}{2}$ 就是 a, b 之間的一个有理数．同样，在 a, c 之間也至少可找到一个有理数．依次类推，可知 a, b 之間可以找到无穷多个有理数．所謂有理数的稠密性就是指：不論有理数 a, b 相差多么小，在 a, b 之間总可以找到无穷多

个有理数，也就是說，有理点在数軸上是到处稠密的.

用同样的方法可以論证，实数也具有稠密性.

第二，实数的連續性. 既然实数与数軸上的点一一对应，可見实数充滿数軸而沒有“空隙”，这就叫做实数的連續性. 有理数虽然稠密，但并不連續，例如$\sqrt{2}$，π 这些无理数就是有理数中的“空隙”，有理点之間有无穷多这种“空隙”.

实数的連續性是实数的一个最根本的性质. 在以后的学习中常要用到这个性质.

§2. 絕对值

当我們对一个物理量进行直接測量时，常常是測不准的，有时偏大，有时偏小. 評定測量的准确度时，經常注意到的是偏离的大小，而不計較偏大了还是偏小了，处理这类問題时，常要用到实数的絕对值. 現在我們来介紹一下絕对值的定义及关于絕对值的一些性质.

定义. 对于实数 a，定义 a 的絕对值 $|a|$ 为

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{若 } a>0, \\ 0, & \text{若 } a=0, \\ -a, & \text{若 } a<0. \end{cases}$$

例. $|2|=2.$ $|-3.1|=3.1.$ $|0|=0.$

容易看出，不論点 a 在原点的右方或左方，实数 a 的絕对值 $|a|$ 表示点 a 与原点間的距离.

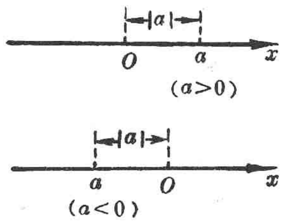


图 0 2

I. 关于絕对值的性质

以下关于絕对值的一些性质都是明显的.

(i) $|a|\geqslant 0.$

这个不等式表示 $|a|>0$ 或者 $|a|=0.$

(ii) $|-a|=|a|.$

这个等式表示 $-a$ 和 a 的絕对值相同.

(iii) $-|a|\leqslant a\leqslant|a|$.

$a>0$ 时, 右边是等号, 左边是不等号; $a<0$ 时, 右边是不等号, 左边是等号; $a=0$ 时, 左边右边都是等号.

(iv) **对于实数 a, 如有一正数 ε, 使**

(1) $$|a|<\varepsilon,$$

则必然有

(2) $$-\varepsilon<a<\varepsilon.$$

其逆亦眞.

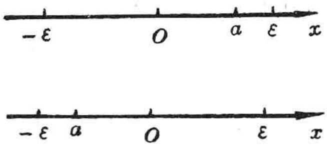


图 0.3

从几何上来看, (1) 表示点 a 与原点間的距离小于 ε, (2) 表示点 a 在点 $-\varepsilon$ 与点 ε 之間, 所以, 它們表示相同的意义.

(v) **对于实数 a, 如有一正数 N, 使**

(3) $$|a|>N,$$

则必然有

(4) $$a>N \text{ 或 } a<-N.$$

其逆亦眞.

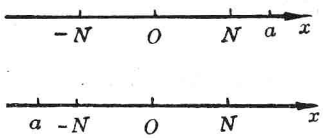


图 0.4

从几何上来看, (3) 表示点 a 与原点間的距离大于 N, (4) 表示点 a在点 N 之右或在点 $-N$ 之左, 它們也表示相同的意义.

II. 有关絕对值的四则运算

(i) 对于任意两个实数 a, b, 恒有

(5) $$|a+b|\leqslant|a|+|b|.$$

证明: 根据性质(iii), 有

$$-|a|\leqslant a\leqslant|a|,$$
$$-|b|\leqslant b\leqslant|b|.$$

二式相加, 得

$$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant|a|+|b|.$$

根据性质(iv), 即知

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|.$$

证毕.

例. 当 a, b 同号时, (5) 式中等号成立, 如:

$$|3+5|=|3|+|5|,$$

$$|(-3)+(-5)|=|-3|+|-5|.$$

当 a, b 异号时, (5) 式中不等号成立, 如:

$$|3+(-5)|<|3|+|-5|,$$

$$|(-3)+5|<|-3|+|5|.$$

(ii) **对于任意两个实数 a, b, 恒有**

(6) $$|a-b| \geqslant |a|-|b|.$$

证明: 因为

$$|a|=|a-b+b| \leqslant |a-b|+|b|,$$

故得

$$|a-b| \geqslant |a|-|b|.$$ 证毕.

(iii) **对于任意两个实数 a, b, 恒有**

(7) $$|ab|=|a|\cdot|b|, \quad \left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}, \quad (b \neq 0).$$

根据絕对值的定义, 这两个公式显然是正确的.

§3. 变量及变量的变化范圍

我們考察各种自然現象与技术过程时, 常会遇到各种各样的量, 如水庫中水的深度、丰产田的面积、汽車行駛时汽油的消耗量、机床安全运轉的时間、高炉的溫度、工厂內工人的名额等等. 这些量都有共同的特征, 即采取了一定的单位以后, 这些量都可以通过度量用数来表示. 这些数就叫做这些量所取的值.

在一定的运动过程中, 有的量变化, 即取不同的值, 有的量則保持一个固定的值而不变, 前者叫做变量, 后者叫做常量. 例如人造卫星与地球間的距离是一个变量; 在一定时期內, 車間里的車床台数是一个常量. 若一个量在所討論的过程中变化很小, 以至对某个实用目的来讲可以忽略不計时, 我們也把它算作是常量. 例如, 在不同的地点, 落体

的重力加速度是不同的，因而它是个变量，但在較小地区中研究落体运动时，通常将重力加速度看成常量. 因此，一个量是常量还是变量，要根据具体情况来决定.

为了控制技术过程，使它满足生产实踐中所提出的种种要求，就必須把問题中所涉及的各个变量的变化情况弄清楚. 例如，为了把电压控制在 220 伏左右，或把設备利用率提高到接近 100%，就必須弄清楚电压或設备利用率的变化情况，只有这样，才能拟定出适当的措施以达到上述目的. 所以研究变量是数学中重要的課題.

变量的性质与类型是多种多样的，可以从各个不同的角度来加以考察. 钟摆与鉛垂綫間的夹角是个連續变化着的变量，它的值是有界限的，譬如說总是介于 $-\dfrac{\pi}{6}$ 与 $\dfrac{\pi}{6}$ 之間. 但多边形的边数这个变量则只能取 3, 4, 5… 这些正整数值，它不是連續变化的，它的值可以无限增大，它不是有界的. 由此可見，仅就变量的变化状态和变量所能取得的值的范圍来說，就有連續、不連續与有界、无界之分. 若就变量的变化趋势来說，也有种种不同，例如，火車从出发站开出后与出发站的距离，一般是个不断增大的变量，某个工厂产品中的次品率也許是个不断减小的变量，而地球与太阳間的距离则是时而变大、时而变小的变量. 再如就变量变化的速度来讲，也有快慢之别. 系統地研究变量的这些特点，找出它們相互联系的規律，以便利用这些規律去解决生产中的問题，这就是我們学习这門課程的目的.

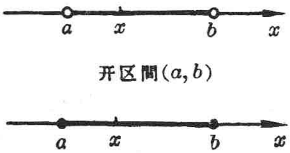
在今后的討論中，为了叙述的簡便起見，經常采用 x, y, z, θ, t 等字母来代表变量，a, b, c 等字母来代表常量. 当然，这也不是一成不变的.

变量所能取得的值的范圍常可用不等式来表示. 例如，若以 θ 代表钟摆与鉛垂綫間的夹角，则按上面一段所述的情况，θ 的变化范圍可以用不等式

$$-\frac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{6}$$

来表示.

为了看起来更加清楚，我們还常采用下述的几何表示法．把变量 x 所能取的每一个值都用数軸上的一个点来表示．于是变量就可用变点即通常所說的动点来表示，而常量就相当于数軸上的一个定点了．这时，变量的变化范圍也可在数軸上以图形表示出来．例如，若变量 x 的变化范圍在 a,b 二数之間，即 $a<x<b$，那么，相应的动点就在数軸上的点 a 与点 b 之間变化，这些点构成一个不包括端点在内的綫段，我們称之为开区間，并以記号 (a,b) 来記它．正像我們常把数 a 叫做点 a 一样，我們也常把不等式



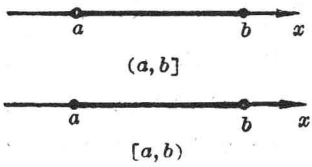
开区間 (a,b)

閉区間 $[a,b]$

图 0.5

$$a<x<b$$

叫做开区間．若变量 x 的变化范圍在 a,b 二数之間，且能取 a 与 b 二值，即 $a\leqslant x\leqslant b$，相应的动点就在数軸上构成一个包括端点在内的綫段，我們称之为閉区間 $[a,b]$．



$(a,b]$

$[a,b)$

图 0.6

我們也常把不等式

$$a\leqslant x\leqslant b$$

叫做閉区間．

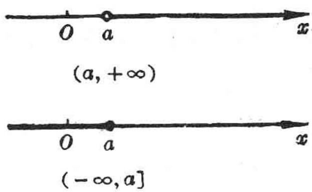
变量 x 的变化范圍也可以是半开区間

$$a<x\leqslant b,$$

記作 $(a,b]$（見图 0.6 上图），或半开区間

$$a\leqslant x<b,$$

記作 $[a,b)$（見图 0.6 下图）．



$(a,+\infty)$

$(-\infty,a]$

图 0.7

变量 x 的变化范圍也可以是无穷区間

$$x>a,\quad x\geqslant a,\quad x<a \text{ 或 } x\leqslant a,$$

分別記作 $(a,+\infty)$，$[a,+\infty)$，$(-\infty,a)$ 或

$(-\infty, a]$.

变量 x 也可能取得任何实数值，在这种情况下，我們将变量 x 的变化范圍記作

$$-\infty<x<+\infty,$$

亦可記作无穷区間$(-\infty, +\infty)$.

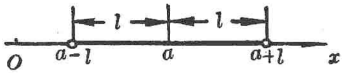


图 0.8

以点 a 为中点且长度为 $2l$ 的开区間叫做点 a 的 l 邻域. 这是以后經常要討論到的一种区間. 这种区間的端点是 $a-l$ 与 $a+l$, 因此, 这种区間可用不等式

(1) $$a-l<x<a+l$$

来表示. 这种区間还有一种常見的表示法: 将(1) 式改写为

(2) $$-l<x-a<l,$$

根据絕对值的性质(iv), (2)式相当于

(3) $$|x-a|<l.$$

所以, 点 a 的 l 邻域也可用不等式(3)来表示.

不等式(3)本身也有明显的几何意义. 容易看出, 不論 x 和 a 取什么值, $|x-a|$ 总是表示点 a 与点 x 間的距离. 由此可知, 不等式(3)表示动点 x 与定点 a 之間的距离小于 l(参看图 0.8).

例一. 点 2 的 l 邻域$\left(l=\frac{5}{2}\right)$, 可表示为

$$2-\frac{5}{2}<x<2+\frac{5}{2} \quad 即 \quad -\frac{1}{2}<x<\frac{9}{2},$$

这个区間也可表示为

$$|x-2|<\frac{5}{2}.$$

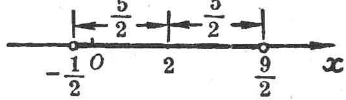


图 0.9

在图 0.9 中画出了这个区間, 动点 x 位于这区間內时, 动点 x 与定点 2 的距离小于$\frac{5}{2}$, 也就是$|x-2|<\frac{5}{2}$.

对于任何开区間(a, b)，它的长度为$b-a$，它的半长为$\frac{1}{2}(b-a)$，它的中点的坐标是

$$a+\frac{1}{2}(b-a)=\frac{1}{2}(a+b),$$

故开区間(a, b)是点$\frac{1}{2}(a+b)$的 l 邻域$\left(l=\frac{b-a}{2}\right)$. 由此可知，开区間$(a, b)$即不等式

(4) $$a<x<b$$

可以表示为

(5) $$\left|x-\frac{a+b}{2}\right|<\frac{b-a}{2}.$$

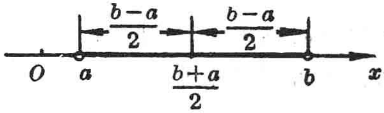


图 0.10

例二. 对于区間$(-4, 2)$，它的长度为6，它的半长为3，它的中点的坐标为$-4+3=-1$，故这区間是点-1的 l 邻域$(l=3)$. 这个区間可以表示为不等式

$$-4<x<2,$$

也可以表示为不等式

$$|x-(-1)|<3 \quad 即 \quad |x+1|<3.$$

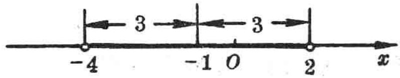


图 0.11

在图 0.11 中画出了这个区間，动点 x 位于这区間内时，动点 x 与定点 -1 的距离小于3，也就是$|x+1|<3$.

§4. 充分条件与必要条件

在初等数学与高等数学中，經常要討論两个数学判断之間的相互联系（所謂数学判断就是具有某种数学內容的一句話，这句話可能成立也可能不成立）. 例如，“某两角是对頂角”是一个数学判断，“某两角相等”也是一个数学判断，平面几何中有一条定理說：“如果某两角是对頂角，則此两角相等”. 这条定理闡明了这两个数学判断之間的联系，即由前一判断的成立能推断出后一判断的成立. 所謂充分条件与必要

条件无非是一种数学上的术語，用来簡单而明确地描述两个数学判断之間的邏輯关系.

我們来分析一下上面所举的平面几何定理:“如果某两角是对頂角，則此两角相等”.

这一定理表明: 从“某两角是对頂角”的成立，能够推断“某两角相等”的成立. 这就是說,“某两角是对頂角”构成了“某两角相等”的充分理由，有了“某两角是对頂角”这个充分理由，就足以說明“某两角相等”. 因此, 我們称“某两角是对頂角”成立是“某两角相等”成立的充分条件.

这一定理也表明: 在“某两角是对頂角”成立的前提下, 必然会产生“某两角相等”也成立的結論. 这就是說,“某两角相等”是“某两角是对頂角”所必須具备的条件，缺少了“某两角相等”这个必須具备的条件，某两角就不可能是对頂角了. 因此, 我們称“某两角相等”成立是“某两角是对頂角”成立的必要条件.

定义. 如果从判断 A 成立能够推断判断 B 成立，我們称判断 A 成立是判断 B 成立的充分条件，判断 B 成立是判断 A 成立的必要条件.

若用字母 A 表示“判断 A 成立”这件事，用字母 B 表示“判断 B 成立”这件事, 用“$A \Rightarrow B$”表示“从判断 A 成立能够推断判断 B 成立”, 則上述定义就可簡述为:

定义. 如果 $A \Rightarrow B$，則称 A 是 B 的充分条件, B 是 A 的必要条件.

例一. 如果一个四边形为矩形，則此四边形的对角綫等长. 由此可見,“四边形为矩形”是“四边形的对角綫等长”的充分条件，“四边形的对角綫等长”是“四边形为矩形”的必要条件.

例二. 如果一自然数的末位数字为 0, 則此自然数能被 5 整除. 由此可見,“自然数的末位数字为 0”是“自然数能被 5 整除”的充分条件,“自然数能被 5 整除”是“自然数的末位数为 0”的必要条件.

例三. 如果一个圓的两弦等长, 則此两弦与圓心等远. 由此可見,

“圓的两弦等长”是“两弦与圓心等远”的充分条件，“两弦与圓心等远”是“两弦等长”的必要条件.

应該注意，“从判断 A 成立能够推断判断 B 成立”这句話与“从判断 B 不成立能够推断判断 A 不成立”这句話，具有完全相同的意义，只是說話的方式不同而已．像例一的情况，也可以这样說：“如果一个四边形的对角綫不等长則此四边形不是矩形”，采用这种說法时，更容易看出，“一个四边形对角綫等长”是“此四边形是矩形”的必要条件．对于这两种不同的說法，在不同的場合中，有时用这种比較方便，有时用那种比較方便．例如，必要条件的定义也可以这样来叙述：“如果从判断 B 不成立能够推断判断 A 不成立，則称判断 B 成立是判断 A 成立的必要条件”．这种叙述突出地表現：判断 B 成立是判断 A 成立所必須具备的条件.

也应該注意，“$A\Rightarrow B$”与“$B\Rightarrow A$”是两回事，不能混同起来．像例一的情况，我們不能說，“如果一个四边形的对角綫等长，則此四边形为矩形”；像例三的情况，我們却可以說，“如一个圓的两弦与圓心等远，則此两弦等长”．这些事实說明，当 A 是 B 的充分条件时，B 可能是 A 的充分条件，也可能不是 A 的充分条件.

下面我們要着重分析“$A\Rightarrow B$”与“$B\Rightarrow A$”同时成立的情况（这种情况可以簡記为“$A\Longleftrightarrow B$”）．这时，A 是 B 的充分条件，A 也是 B 的必要条件，我們称 A 是 B 的充分必要条件，簡称 A 是 B 的充要条件．很明显，A 是 B 的充要条件时，B 也是 A 的充要条件．例如，“若一个圓的两弦等长，則此两弦与圓心等远，反之，若一个圓的两弦与圓心等远，則此两弦等长”，由此可見，“圓的两弦等长”是“两弦与圓心等远”的充要条件.

定义．如果从判断 A 成立能够推断判断 B 成立，并且从判断 B 成立能够推断判断 A 成立，我們称判断 A 成立是判断 B 成立的充要条件.

說得簡单一点：**如果 $A\Longleftrightarrow B$，則称 A 是 B 的充要条件.**