高职高专文科教材

经济应用数学基础(三)

概率论与数理统计

张桂芝　编著

中华工商联合出版社

概率论与数理统计

张桂芝　编著

中华工商联合出版社

责任编辑:王玉璋　孟　斌
封面设计:红　雨

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/张桂芝编著.——北京:中华工商联合出版社,1996.9

ISBN　7-80100-270-9

Ⅰ.概… Ⅱ.张… Ⅲ.①概率论②数理统计　Ⅳ.021

中国版本图书馆 CIP 数据核字　(96)　第15231号

概率论与数理统计
中华工商联合出版社出版、发行
北京市东城区新中街11号
邮编:100027　　电话:64156449
北京市燕山联营印刷厂印刷
新华书店总经销

787×1092毫米　1/32　　印张:6.875　　148千字
1996年9月第1版　　1996年9月第1次印刷
2002年9月第2版　　2002年9月第2次印刷
印数:3001-6000册
ISBN 7-80100-270-9/G·97
定价 12.00元

内容简介

本书是高等院校“经济应用数学基础”课程的教材之一。

本书主要介绍概率论的基本知识和数理统计的基本方法。在保证数学学科的系统性和严密性的前提下，内容选取适度，重点突出，密切联系实际；论证深入浅出，通俗易懂，习题量大，并在书后附有习题答案，有助于读者进一步掌握书中的概念和方法。

本书可作为高职高专院校及成人高等院校财经专业的数学用书，也可供财经专业高等教育自学考试的辅导教师及学生参考。

目　录

第一章　排列组合

本书首先介绍排列组合的知识。这实际上是中学课本的内容，但考虑到它是学习概率统计的基础，因此特写一章以供读者参考。

§1.1　两个基本原理

例 1　从甲地到乙地可以乘火车、汽车，一天中火车有 2 班，汽车有 3 班，如果一种交通工具的不同班次为不同走法，问从甲地到乙地有多少种不同走法？

解：因为乘火车有2种走法，乘汽车有3种走法，所以共有

$$2 + 3 = 5$$

种不同的走法。

一般地，我们有下面的基本原理：

加法原理　如果完成某一事件有 m 种方式，其中第一种方式有 n_1 种方法，第二种方式有 n_2 种方法，…，第 m 种方式有 n_m 种方法，且不论用哪种方式中的哪一种方法都可以完成这一事件，那么完成这一事件共有

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_m$$

种不同的方法。

例 2　书架上有不同的中文书 30 本、外文书 10 本，从中任取一本书，有多少种不同的取法？

解：从书架上任取一本书有两种方式：第一种方式取中文书有 $n_1 = 30$ 种方法，第二种方式取外文书有 $n_2 = 10$ 种方法，根据加法原理共有

$$n_1 + n_2 = 30 + 10 = 40$$

种取书方法。

例 3　从甲村到丙村必须经过乙村，已知从甲村到乙村有 2 条路可走，从乙村到丙村有 3 条路可走，问从甲村到丙村有多少种不同的走法？

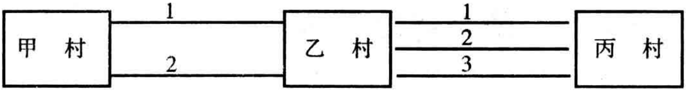

图 1－1

解：如图 1－1 所示，完成从甲村到丙村这件事，必须依次经过两个步骤：第一个步骤是从甲村到乙村，有 2 条路；第二个步骤是从乙村到丙村，有 3 条路。只有这两个步骤都完成了，才能到达目的地，因此从甲村到丙村共有

$$2 \times 3 = 6$$

种走法。

一般地，我们有下面的基本原理：

乘法原理　如果完成某一事件共有 m 个步骤，其中第一个步骤有 n_1 种方法，第二个步骤有 n_2 种方法，…，第 m 个步骤有 n_m 种方法，各个步骤依次连续完成，才算完成这一事件，

那么完成这一事件共有

$$n_1 n_2 \cdots n_m$$

种不同的方法。

例4 从一楼到二楼有6个扶梯,从二楼到三楼有4个扶梯,问从一楼到三楼共有多少种不同的走法?

解:从一楼到三楼要分两个步骤进行,第一步:从一楼到二楼有 $n_1 = 6$种走法,第二步从二楼到三楼有 $n_2 = 4$种走法,根据乘法原理共有

$$n_1 n_2 = 6 \times 4 = 24$$

种不同的走法。

在应用基本原理时,必须注意加法原理与乘法原理的根本区别。若完成一件事情有多种方式,其中每一种方式的任一种方法都可以完成这件事情,这时用加法原理;若完成一件事情必须依次经过多个步骤,缺少其中任一步骤都不能完成这件事情,这时用乘法原理。

§1.2 排列

一、元素无重复的排列

例1 从5个人中任选3个人排成一列,有多少种不同的排法?

解:因为是3个人排成一列,我们把3个人所占位置分为第一个位置、第二个位置、第三个位置,这样,事件的完成可分三个步骤进行:

第一步:确定第一个位置(首位),因为5个人中每一个人

都可以排在首位，从中任选一人，有 $n_1 = 5$ 种方法；

第二步：确定第二个位置，由于已经有一人排在了首位，还剩下 4 个人，他们中每个人都可以排在第二个位置，从中任选一人，有 $n_2 = 4$ 种方法；

第三步：确定第三个位置（末位），由于前两个位置已各排一人，还剩 3 人，从中任选一人，有 $n_3 = 3$ 种方法；

根据乘法原理共有

$$5 \times 4 \times 3 = 60$$

种不同的排法。

如果我们把例 1 中的被选取对象（人）叫做元素，此题就是从 5 个不同元素中任取 3 个，按一定顺序排成一列，求共有多少种不同的排法。用类似的方法我们还可以解决如下问题：

从 n 个不同元素中任取 m 个不同元素排成一列，共有多少种不同的排法？

因为在每一种排法中，都有 m 个元素，把这 m 个元素所排的位置划分为第一个位置，第二个位置，…，第 m 个位置。第一个位置可以从这 n 个元素里任取一个来排有 n 种方法；第二个位置在剩下的 $n-1$ 个元素里任选一个来排有 $n-1$ 种方法；…；依次继续下去，直到最后一个位置，也就是第 m 个位置，只能在剩下的 $n-(m-1)$ 个元素里任选一个来排有 $n-(m-1)$ 种方法；如图 1－2 所示。m 个位置排完，该事件完成。

第一个位置	第二个位置	…	第 m 个位置
n 种	n－1 种		n－(m－1) 种

图 1－2

根据乘法原理共有

$$n(n-1)\cdots(n-m+1)$$

种不同的排法。

由此可得排列定义及排列数公式。

定义 1.1 从 n 个不同元素中任取 m 个不同元素（$m \leqslant n$），按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个不同元素的一个**排列**。所有排列的种数叫做排列数，记作 P_n^m。且

$$P_n^m = n(n-1)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!} \quad (1.1)$$

当 $m < n$ 时称为选排列；当 $m = n$ 时称为全排列。这时，

$$P_n^n = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1 = n!$$

例 2 计算 P_6^4，P_{100}^2，P_4^4

解：$P_6^4 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$

$$P_{100}^2 = 100 \times 99 = 9900$$

$$P_4^4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

例 3 从 26 个英文字母中任取 3 个不同的字母组成一单词，问共能组成多少个单词？

解：因为前后排序不同表示不同单词，这是一个排列问题，因此可组成单词

$$P_{26}^3 = 26 \times 25 \times 24 = 15600 \text{ 个}$$

例 4 由 1,2,3,4 这四个数字，

(1) 可组成多少个不同的数？

(2) 大于 4000 的数有多少？（要求同一个数中不含有相同的数字）

解：(1) 由这四个数字可组成一位数、两位数、三位数及

四位数，并且数字的前后顺序不同表示不同的数，因此是排列问题。

其中一位数有 $P_4^1 = 4$ 个；两位数有 $P_4^2 = 12$ 个；三位数有 $P_4^3 = 24$ 个；四位数有 $P_4^4 = 24$ 个；根据加法原理共有

$$P_4^1 + P_4^2 + P_4^3 + P_4^4 = 64 \text{ 个}$$

(2) 由(1)可知大于4000的数只能是四位数，而且是数字4排在千位上的四位数，这要分两步进行：第一步令数字4排在千位上有 $n_1 = 1$ 种排法；第二步其余三个数分别排在百位、十位及个位上有 $n_2 = P_3^3$ 种排法，根据乘法原理大于4000的数共有

$$n_1 n_2 = 1 \times P_3^3 = 6 \text{ 个}$$

二、元素可重复的排列

例5 从0,1,2,…,9这10个数字中任取5个组成密码锁号码，求密码总数。

解：作为密码，零可以在任何位置上，又是五位有顺序的数字且数字可以重复。因此每确定一位数字，相当于完成了一个步骤，这样需要5个步骤。由于数字可重复，所以每一个步骤都是从0—9这10个数字中任选一个，因此有 $n_1 = n_2 \cdots = n_5 = 10$，根据乘法原理，密码共有

$$n_1 n_2 n_3 n_4 n_5 = 10^5 \text{ 个}$$

类似地问题有很多，如电话号码，汽车牌照号码等都属于元素可重复排列问题。

例6 5封信随机投向3个信箱，共有多少种投法？

解：将5封信随机投入3个信箱，必须经过五个步骤：第一个步骤是将第1封信投入3个信箱中的1个信箱，有3种方法；

第二个步骤是将第 2 封信投入 3 个信箱中的 1 个信箱，也有 3 种方法，同理，第三、四、五个步骤也各有3种方法。这是从3个不同元素中每次取出 5 个元素的元素可重复排列。

根据乘法原理，共有

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5 = 243$$

种不同的投法。

例 7　由 0,1,2,3,4,5,6 这七个数字，求

(1) 可组成多少个数字不重复的三位数字？

(2) 可组成多少个数字不重复的三位数？

(3) 可组成多少个数字可重复的三位数字？

解：(1) 作为三位数字，零可以在任何位置上，因为数字不重复，因此有

$$P_7^3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$$

个数字不重复的三位数字。

(2) 解法一：作为三位数，零不能在百位上，因此分两步进行。第一步由于零不能排在百位，其余的六个数字均可排，从中任取一个有 $n_1 = P_6^1 = 6$；第二步从其余的六个数字中(其中包括零)任选两个排在十位与个位上有 $n_2 = P_6^2 = 6 \times 5 = 30$，根据乘法原理共有

$$n_1 n_2 = 6 \times 30 = 180$$

个数字不重复的三位数。

解法二：七个数字能组成 $P_7^3 = 210$ 个三位数字，其中零排在百位的有 $P_6^2 = 30$ 个应减去，这样共有

$$P_7^3 - P_6^2 = 210 - 30 = 180 \text{ 个}$$

(3) 根据题意这是从 7 个数字中每次取出 3 个数字的元

素可重复的排列，根据乘法原理，共有

$$7 \times 7 \times 7 = 343$$

个数字可重复的三位数字。

§1.3 组合

例1 从红、绿、黄三种颜料里，任意选出两种，以1:1的比例配成一种新颜色，问能配成几种不同的新颜色？

解：用红与绿可配成一种新颜色，又可与黄配成一种，用绿与黄也可配一种，所以，每次取出两种调配，总共能配成三种不同的新颜色，即红绿、红黄、绿黄。在这个问题中，当所选两种颜料相同时，如绿与黄配，不论先用绿后用黄，还是先用黄后用绿，配出的都是同一种新颜色，这说明此问题与位置顺序无关，它不是排列问题，而属于下面所讲的组合问题。

定义1.2 从 n 个不同的元素中任取 m 个不同元素（$m \leqslant n$），不管顺序并成一组，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个不同元素的一个组合。所有组合的种数叫做组合数，记作 C_n^m。且

$$C_n^m = \frac{P_n^m}{P_m^m} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m(m-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} \tag{1.2}$$

事实上，从 n 个不同元素中任取 m 个不同元素的排列数为 P_n^m，它可以分成两个步骤来完成，首先从 n 个元素中任取 m 个不同元素，不管顺序并成一组，有 C_n^m 种组合；其次，再把每

一个组合中的 m 个不同元素作出它们的全排列有 P_m^m 种，根据乘法原理有 $C_n^m P_m^m$ 种方法，于是有关系式

$$P_n^m = C_n^m P_m^m$$

所以 $$C_n^m = \frac{P_n^m}{P_m^m}$$

即

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m(m-1)\cdots 2\cdot 1}$$

我们规定 $C_n^o = 1$。

上面的例 1 属于 $n = 3, m = 2$ 的组合，根据公式(1.2)有

$$C_3^2 = \frac{3\times 2}{2\times 1} = 3$$

种新颜色。

组合有如下性质：

$$C_n^m = C_n^{n-m}$$

证明：因为 $$C_n^m = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m(m-1)\cdots 1}$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)(n-m)\cdots 1}{m(m-1)\cdots 1\cdot(n-m)\cdots 1}$$

$$= \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$C_n^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)![n-(n-m)]!}$$

$$= \frac{n!}{(n-m)!m!}$$

所以 $C_n^m = C_n^{n-m}$

当 $m > \frac{n}{2}$ 时，可以利用这个性质简化计算。

例 2 计算 C_{10}^3，C_{200}^{198}

解：$C_{10}^3 = \dfrac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$

$$C_{200}^{198} = C_{200}^2 = \frac{200 \times 199}{2 \times 1} = 19900 .$$

例 3　五个测验题任意选答三道，问有几种不同的选题方法？

解：因为只需要从五道题中选三道，与所选顺序无关，是组合问题。所以有

$$C_5^3 = C_5^2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

种不同的选题方法。

例 4　十个篮球队进行单循环比赛，共要比赛几场？

解：所谓单循环赛就是任何两个队都要比赛一场。甲对乙比赛了一场，等于乙对甲比赛了一场，没有顺序是组合问题，共需比赛

$$C_{10}^2 = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45 \text{ 场}$$

例 5　100 件产品中有 4 件次品，任取 3 件，问

(1) 共有多少种不同的取法？

(2) 恰有 1 件次品的取法有多少种？

(3) 至少有 1 件次品的取法有多少种？

解：很明显这是个组合问题。

(1)100 件中任取 3 件共有

$$C_{100}^3 = \frac{100 \times 99 \times 98}{3 \times 2 \times 1} = 161700$$

种不同的取法。

(2) 所取的 3 件中恰有 1 件次品需分两步完成：首先从 4 件次品中取 1 件次品有 $C_4^1 = 4$ 种，其次从 96 件正品中取 2 件

有 $C_{96}^2=4560$ 种,根据乘法原理共有

$$C_4^1\ C_{96}^2=18240$$

种不同的取法。

(3) 解法一:所取的 3 件中至少有 1 件次品共有三种方式。第 1 种方式为恰有 1 件次品有 $C_4^1C_{96}^2$ 种取法;第二种方式为恰有 2 件次品有 $C_4^2C_{96}^1$ 种取法;第三种方式为恰有 3 件次品有 $C_4^3C_{96}^0$ 种方法;根据加法原理共有

$$\begin{aligned}&C_4^1C_{96}^2+C_4^2C_{96}^1+C_4^3C_{96}^0\\&=18240+576+4=18820\end{aligned}$$

种不同的取法。

解法二:从 100 件中任取 3 件有 C_{100}^3 种不同的取法,其中 1 件次品也没有的取法为 C_{96}^3 种应该减去,因此至少有 1 件次品的取法有

$$C_{100}^3-C_{96}^3=161700-142880=18820\text{ 种}$$

例 6 从全班 50 个人中

(1) 选正、付班长各一人,有多少种不同的选法?

(2) 选三好学生两人,有多少种不同的选法?

解:(1) 因为选班长有正、付之分,与顺序有关是排列问题,共有

$$P_{50}^2=50\times49=2450$$

种不同的选法。

(2) 因为选出的两人同为三好学生,无顺序是组合问题,共有

$$C_{50}^2=\frac{50\times49}{2\times1}=1225$$

种不同的选法。