HITP

数学奥林匹克系列

2011·第四辑(竞赛卷)

数学奥林匹克与数学文化

Mathematical Olympiads and Mathematical Culture

刘培杰　主编

《数学奥林匹克与数学文化》是数学竞赛与数学文化方面的系列专业文集。本文集旨在为从事数学竞赛的师生与从事数学文化研究与传播的专业人员提供深度阅读，搭建表达平台，促进海内外华人同业人士的学术交流与合作，推动数学的普及与进步。

哈尔滨工业大学出版社

HITP
数学奥林匹克系列
2011·第四辑(竞赛卷)

数学奥林匹克与数学文化

Mathematical Olympiads and Mathematical Culture

刘培杰　主编

哈尔滨工业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学奥林匹克与数学文化.第四辑/刘培杰主编.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2011.5

ISBN 978-7-5603-2859-1

Ⅰ.①数… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①中学数学课-竞赛题-研究 Ⅳ.①G634.505

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 075858 号

策划编辑	刘培杰　张永芹
责任编辑	范业婷
封面设计	孙茵艾
出版发行	哈尔滨工业大学出版社
社　　址	哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真	0451-86414749
网　　址	http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷	黑龙江省教育厅印刷厂
开　　本	787mm×1092mm　1/16　印张 29.25　字数 640 千字
版　　次	2011 年 5 月第 1 版　2011 年 5 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5603-2859-1
定　　价	58.00 元

卷首语

“实用理性”是中国传统文化的基本精神.关注于现实生活,不作纯粹的、抽象的思辨,事事强调“实际实用实行”、“重人事关系,重具体经验”.近代以降,西方列强的坚船利炮更是让国人对实用主义顶礼膜拜,深信不疑.从“师夷长技以制夷”的洋务运动到“多研究些问题,少谈些主义”话语权争夺再到“科玄论战”的人生观论战,实用功利主义的魅影在历史的迷雾中不断隐现.本文集要做的是对实用理性的一种反动,极力以宣扬数学之美为己任.随着时代的推移,人们对于崇高的体验几乎被磨灭殆尽了,我们的想象力也已枯竭,只剩下对于庞然大物的些许敬畏之情.在此背景下,康德出版了《批判力批判》(*Critique of Judgement*),其中他区分了两种形式的崇高:数学的崇高与力学的崇高.数学的崇高主要与自然界的奇观相关,比如高山、海洋和太空,这些事物十分广大,超出了我们概念上的理解范围.而力学的崇高,主要与自然界中强大的力量相关,比如暴风.康德声称:面对崇高,起初的震撼会唤醒我们内心更高的体验,即理性.这种升华,最终能带来一种愉快的感觉.

当然,在本文集中我们也有大量的内容是与数学奥林匹克相关的.近年来社会思潮对数学奥林匹克愈发不理解,颇有妖魔化的倾向.在此我们的观点是:数学奥林匹克是高深数学的微型化;是初等数学的时装秀;是数学教学改革的催化剂;是超常智力学生的课间操;是选拔特殊人才的星光大道;是全社会数学爱好者的“非诚勿扰”节目.

中国社会的传统一贯是人微言轻,言以人重.所以我们要借名人之口说出这层意思.王元先生指出:数学竞赛进入高层次后,试题内容往往是高等数学的初等化.这不仅给中学数学添入了新鲜内容,而且有可能在逐步积累的过程中,促使中学数学教

学在一个新的基础上进行反思，由量变转入质变．中学教师也可在参与数学竞赛活动的过程中，学得新知识，提高水平，开阔眼界．事实上，已有一些数学教学工作者在这项活动中逐渐尝到了甜头．

因此，数学竞赛也可能是中学数学课程改革的催化剂之一，似乎比自上而下的“灌输式”办法为好．(20 世纪)60 年代初，西方所谓中学数学教学现代化运动即是企图用某些现代数学代替陈旧的中学数学内容，但采取了由上往下灌输的方法，结果既脱离教师水平，也脱离学生循序学习所需要的直观思维过程．现在基本上被风一吹，宣告失败了．相反的，数学竞赛也许是一条途径．在中国，中学生的高考压力很重，中学教师为此而奔波，确有路子愈走愈窄之感．数学竞赛或许能使中学数学的教学改革走向康庄大道(王元．数学竞赛之我见．自然杂志，1991，13(12)：787～790)

本文集的一贯宗旨是“平民化”、“草根化”、“外行化”．“平民化”是指我们要给普通数学教师以机会让他们展示他们的数学才华，而大多数数学杂志过于贵族化．“草根化”是指我们要给那些体制之外生存的数学爱好者以交流的平台．现在数学资源绝大多数被体制内人士所把持，垄断文化资源令草根们在文化层面上无片瓦，下无立锥之地．这是中国社会缺乏活力的根源之一．“外行化”是指要让学数学的人展示点儿数学之外的才华．或让不学数学的人对数学发表点议论，使数学圈成为一个开放系统．

据北京大学孙小礼教授介绍，她的 1950 年清华大学数学系的同学杜珣除了写出《现代数学引论》一书外还写了两个大部头的《阆苑奇葩》(80 万字)和《闺海吟》(上、下册)(时代文化出版社，2010)，并且在北大连续 8 年开设了一门全校公共选修课：中国近代妇女文学史，讲述从先秦两汉到辛亥革命前后的妇女文学，选读这门课的文理各科学生，每年都在百人以上．

另外还包括非数学圈内的人展示数学才华．被杜维明赞誉有：博大精深的学问、深厚的文化背景，融会贯通的知识的史学家张绥先生近年出版了一本百万字的大书《中国人的通史》(上海人民出版社)，但很少有人知道他还写了一本书叫《数学和哲学》，而且还是谷超豪院士为之作的序．可见数学功力之深．原来张绥先生在 1960 年进入北大历史学系读书的 8 年时间，除了听翦伯赞、邓广铭等大师的历史课，还旁听了 5 年北大数学系的课．

其实到了更高层次上就会出现那种“一切艺术都是相通”的现象．数学界与物理界有一个大牛人威腾．威腾的经历对我们也很有启发．他大学时学习历史，还参加过美国总统的竞选写作班子，读研究生时才转到物理系而成为数学物理大师．这样的例子还有著名的拓扑学家在证明庞加莱猜想中作出重大贡献的瑟斯顿，他在大学读的是生物系；大数学家鲍特大学时专业是工程．

本文集还有另一个特点是钻“故纸堆”，这与本主编的价值取向有关．本主编从不逛大书城只偏爱潘家园．偏狭的认为老的即是好的．有人说拯救遗产是没有必要的．拿音乐来说，现在很多人提倡保护民间的音乐资源，但是如果这种音乐是一种好的东西，自然会被人发掘出来，发扬光大．比如二手玫瑰、山人乐队，那是因为人们骨子里需要这种东西，而花钱整理的许多音乐可能都没有用到，可能是因为这个时代已经不需要它了。有一句

话说得好,活着的东西才是真理.虽然这有点极端.只有自发的行为才能让这个东西延续下去.

出版社在大学是个非主流单位,因其名不高,利不厚而不入高层法眼,而作为出版人,我们还是有一份自豪与自傲在.民国十年的春末夏初,高梦旦先生决定辞去商务印书馆编译所所长的工作,希望时在北京大学工作的胡适先生继任.高梦旦对胡适说:"北京大学固然重要,我们总希望你不会看不起商务印书馆的事业".而胡适的回答则是:"我决不会看不起商务印书馆的工作.一个支配几千万儿童的知识思想的机关,当然比北京大学重要多了,我所考虑的只是怕我自己干不了了这件事.我们批了多年的胡适先生还是有点儿境界的.

廖廖数语,仅以为序.

刘培杰

2011.5.27

数学奥林匹克与数学文化

Mathematical Olympiads and Mathematical Culture

2011・第四辑

目　录　CONTENTS

专题讲座 Forums and Lectures

文化杂谈 Culture tittle-tattle

高等背景 Senior background

名家选摘 Selected Masterpiece

解题技巧 Solution of Skill

试题赏析 Appreciation of test questions

让寂寞把自我高高供奉于神坛

——读《从哥德巴赫到陈景润》

刘金祥①

近日阅读了由刘培杰编著、哈尔滨工业大学出版社出版的数学科普著作《从哥德巴赫到陈景润》,使我再次走入那个以一道题目为整个世界、以演算公式为生存方式的数学奇才的精神世界,使我再次对这位誉满全球的科学泰斗获得一种新的理性认知:无论是迎风摇曳的小草,还是参天玉立的大树,人生舞台的角色虽有调整和嬗变,但追求超凡脱俗的生命质量始终不舍不弃、无悔无怨.

个性的发展是人快乐的引擎.陈景润是一位单纯率真、质朴勤勉的科学殉道者,他痴迷科学的苦行僧生活,色调晦暗,鲜有滋润,既呆板乏味又泯灭自我.20 世纪 70 年代末,著名作家徐迟撰写的报告文学《哥德巴赫猜想》曾风靡神州、洛阳纸贵,刮起了一阵尊崇科学的旋风,在一代学子的心灵中催发了刻苦攻读的种子.随着时间的推移,陈景润精神成了一种幽默,他不拘小节、随遇而安甚至庸常寡淡的生活,被一些人打入冷宫、推向边缘.君不见,他为了摘取漫漫长路尽头的一颗"明珠",埋首耕耘,不问收获;他在熙熙攘攘的七彩人生舞台上,默默劳作,无私奉献,甘做一株无人问津的小草.可谁人知道他心中有一个大我,他对生命过程心无旁骛,不以物喜,不以己悲,锁定人生的频道,咬定青山不放松.林语堂说过:"天下大聪明与大糊涂想去只有毫发之差".陈景润是不是天才也许永远会有歧见,天才有多才多艺、颖悟聪慧的天才,有术业精深、成就非凡的天才.陈景润对数学的执着专一、陈景润对生活的一塌糊涂,交汇而成的生命乐章,无疑是大智慧、大聪明的生命强音.

一个人就是一个世界,一个人就是一页历史.陈景润是旷世奇才,然而,沿着他的足迹,我们却可以清晰地倾听到时代前进的脚步声,可以鲜活地领略到岁月风雨的凉热,可以敏感地品味到人生奋斗的艰难和壮美.倘若说,人生是一部教科书,那么,陈景润的一

---

① 作者简介:刘金祥(1967—),男,编审,黑龙江大学客座教授,研究方向为区域文化和文化产业,著有《中国魂》、《解读李泽厚》等专著.

单位:哈尔滨市人大常委会研究室

地址:哈尔滨市友谊路 307 号

邮编:150018

电话:13936661770

生，便是足以让世世代代皆可细细揣摩、咀嚼、吮吸以至于奉为典范的一部长卷，一部宏篇巨著. 陈景润曾经踟蹰街头，备受奚落和白眼，内心的自卑和自强吞噬落魄的“丑小鸭”. 但他有幸得到著名经济学家王亚南和数学大师华罗庚的提携和栽培，带着攻克“哥德巴赫猜想”的希冀进入中国科学院的殿堂. 他蜗居于一间几平方米的斗室，苦思冥想，反复演算，几乎不食人间烟火. 在他成名之前，他像无人理睬的小草，纵然不乏阳光雨露的恩泽，但少有关爱和呵护. 他是一个独行侠，在科学的路途上斩关夺隘，周遭是如此的冷清和沉寂，他内心里却有一片丰富多彩的求证世界. 他对寂寥的赐予称颔有加，因为寂寥是创造的忠实伴侣. “在科学上是巨人，在生活中是孩子”，强烈反差的人格构造，展现出一系列耐人寻味而又充满浓郁生活气息的美学风采. 枯燥的数学，被陈景润点化为繁星璀璨的天空、万木葱茏的大地. 他的生活中没有柴米油盐的琐碎，没有虚情假意的应酬，有的只是宁静致远的高超志向和淡泊明志的人格操守. 外部世界的缤纷喧嚣对他没有构成袭扰和冲击，他摒弃一切世俗的诱惑而独享自己的精神美餐. 一首歌唱得好：“寂寞让我如此美丽”，这是一份失意失落后的自我安慰，是在百无聊赖中的孤芳自赏. 像陈景润那样最后把寂寞作为事业的底色，让寂寞把自我高高供奉于精神祭坛，这才是大聪明者、大仁爱者的诱人之处. 反观近日，急功近利成了时尚，实用主义、市场哲学被许多人奉为圭臬，当他们也唱着“寂寞让我如此美丽”时，无非是用老庄哲学疗救失衡病态的心理，而绝非想守住一方寂寞，成就某项造福于社会的事业.

提升生命质量是人生的内核. 搏击风雨，体验争斗，追求激烈与心跳，是一种人生；坐拥书城，品茗听雨，探索新知与奥秘，也是一种人生；声色犬马，灯红酒绿，寻找快乐与享受，也不乏是一种人生. 但世俗中的人生更多的是淡泊如水，潺潺有声却罕见电闪雷鸣. 这形形色色的生存方式，其生命质量之高低是不言自明的. 如何把握生命质量是一种人生艺术. 在现实生活中，有的人从容淡定、本色简约、谦逊坦荡，一切顺其自然，不刻意追求；有的人信奉人生能有几回搏，不断地给自己设立冲刺的标杆，锐意进取，屡创新高. 这些都是人们生活的常态，只不过前者注重的是过程，后者关注的是结果，而无论哪一种生存方式，只要胸中有一个大我，其生命就会绽放出绚丽的花朵. 陈景润就是一个胸中怀有大我意识的科学巨匠，他也许认识到自己的努力不可能获得社会回报，于是摒除了一切人生的享受，在其匪夷所思的日常生活表象下，内心弹奏着美妙的音律，享受着精神的富足. 陈景润用生命编织了昨日历史的辉煌，它牵起了今天的绚烂，明天的幽远，它流过炎黄子孙的心田，也流过祖国大地的春夏秋冬. 读了这本《从哥德巴赫到陈景润》，我深切地感到：无论是大智者还是平凡人，都有自己独具的生存状态，而提高生存质量这一人生不可回避的课题还有待于每个人自己去求解.

关于一道几何竞赛题的证明

武瑞新[1]

试题　如图1所示,已知$\triangle ABC$,过点B、C的圆O与AC、AB分别交于点D、E,BD、CE交于点F,直线OF与$\triangle ABC$的外接圆交于点P.求证:$\triangle PBD$的内心与$\triangle PCE$的内心重合.

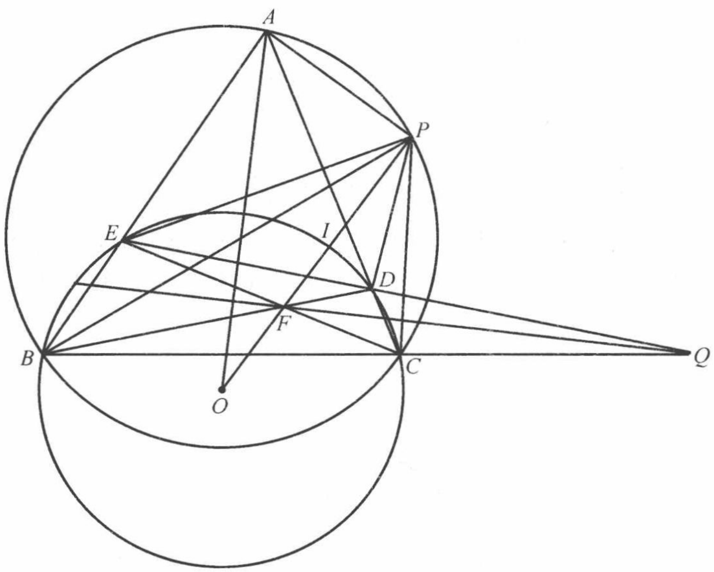

图1

题说　本题系2004年泰国数学奥林匹克试题,在刘培杰主编的《最新世界各国数学奥林匹克中的平面几何问题》一书中给出的证明使用了4个引理,涉及角元Ceva定理,向量数乘运算,余弦定理,该证明虽堪称精彩,但不易理解,向量的引入略显唐突.

应当指出,在竞赛考场上,硬搏"纯几何法"并不现实,且如田廷彦先生所言"花几个星期,添十几条辅助线也是不足取的"但从研究的角度,应当给出一个纯几何证明并尽量简化.

为清晰起见,我们先证几个辅助命题,作为引理.

引理1　如图2所示,过$\odot O$外一点Q作$\odot O$的两条切线QE、QF和一条割线QDA,线段EF与AD交于M.则

---

① 武瑞新,武汉市公安局永丰派出所.

$$\frac{AM}{DM}=\frac{AQ}{DQ}$$

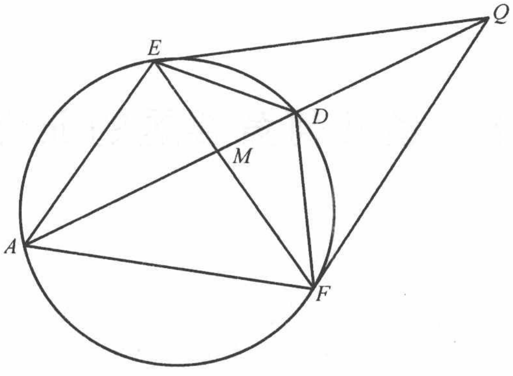

图 2

证明　连 AE、AF、DE、DF，则

$$\triangle QDE \backsim \triangle QEA,\quad \triangle QDF \backsim \triangle QFA$$

由共边定理及共角定理得

$$\frac{AM}{DM}=\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle DEF}}=\frac{AE\cdot AF}{DE\cdot DF}=\frac{AQ}{QE}\cdot\frac{QF}{DQ}=\frac{AQ}{DQ}$$

引理 2　如图 3 所示，四边形 $ABCD$ 内接于圆，边 AB、DC 的延长线交于点 E，AD 和 BC 的延长线交于点 G，对角线 AC 和 BD 交于点 F，过 G 作该圆的两条切线 GP、GQ，切点为 P、Q 则 E、P、F、Q 四点共线.

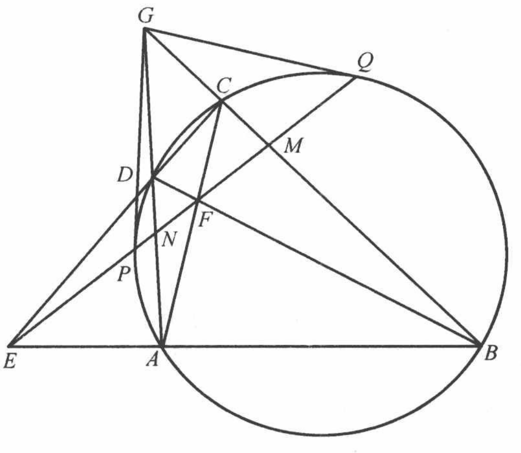

图 3

证明　连 EF 交 AD、BC 于 N、M

对 $\triangle EBC$ 由 Menelaus 定理及 Ceva 定理得

$$\frac{EA}{AB}\cdot\frac{BG}{GC}\cdot\frac{CD}{DE}=1$$

$$\frac{EA}{AB}\cdot\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CD}{DE}=1$$

对 $\triangle EAD$ 由 Menelaus 定理及 Ceva 定理得

$$\frac{EB}{BA}\cdot\frac{AG}{DG}\cdot\frac{DC}{CE}=1$$

$$\frac{EB}{BA}\cdot\frac{AN}{ND}\cdot\frac{DC}{CE}=1$$

故得

$$\frac{BM}{MC}=\frac{BG}{GC} \tag{1}$$

$$\frac{AN}{ND}=\frac{AG}{DG} \tag{2}$$

设 PQ 与 BC 交于 R，与 AD 交于 S，由引理 1 得

$$\frac{BR}{RC}=\frac{BG}{GC}$$

$$\frac{AS}{SD}=\frac{AG}{DG}$$

故

$$\frac{BR}{RC}=\frac{BM}{MC}$$

$$\frac{AS}{SD}=\frac{AN}{ND}$$

故 R 与 M 重合，S 与 N 重合.

故 EF 与 PQ 重合.

所以 E、P、F、Q 四点共线.

引理 3　如图 4 所示，四边形 $ABCD$ 内接于圆 O，对角线 AC、BD 交于 E，直线 BA、CD 交于 F，直线 AD、BC 交于 G. 则 $OE\perp FG$.

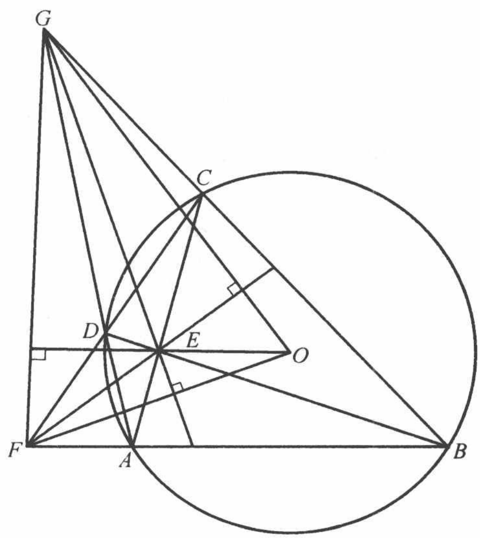

图 4

证明 连 GE、FE、GO、FO，由引理 2 知

$OG \perp EF$，$OF \perp EG$，故 E 为 $\triangle OFG$ 的垂心，故 $OE \perp FG$.

引理 4 如图 5 所示，四边形 $ABCD$ 内接于圆 O，直线 BA、CD 交于 F，$\triangle ADF$ 的外接圆和 $\triangle FBC$ 的外接圆交于点 P（异于 F）. 则 $OP \perp PF$.

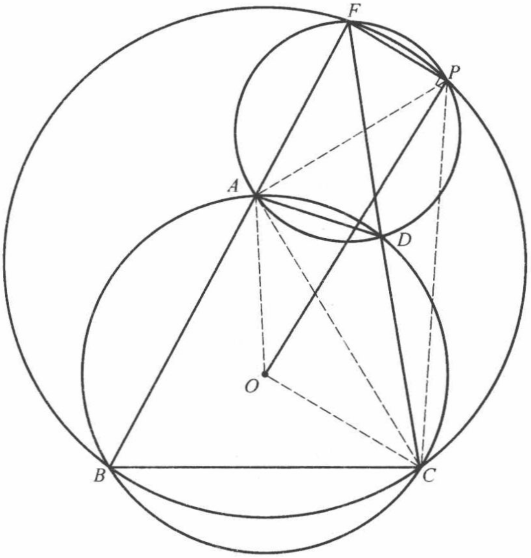

图 5

证明 连 OA、OC，PA、PC 则

$\angle APC = \angle FPC - \angle FPA = 180° - \angle B - \angle FDA = 180° - 2\angle B = 180° - \angle AOC$

故 A、P、C、O 共圆.

所以

$\angle FPO = \angle FPC - \angle CPO = 180° - \angle B - \angle OAC = 180° - \angle B - (90° - \angle B) = 90°$

故 $OP \perp PF$.

引理 5 如图 6 所示，设 P 是半径为 R 的圆 O 上一点，AB 是过 O 的一条射线上两定点，$OA \cdot OB = R^2$，OA 交圆 O 于 Q（P、Q 不重合），则 PQ 平分 $\angle APB$.

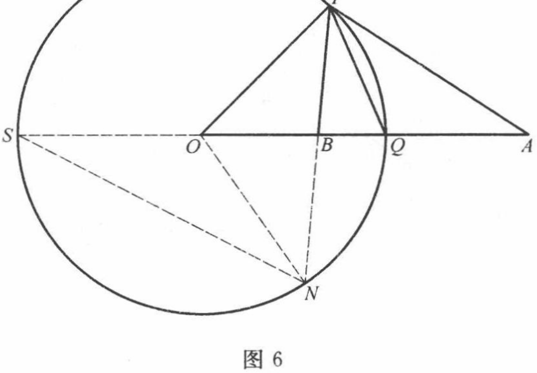

图 6

几何天地

证明 如图 6 所示,延长 PB 交圆 O 于 N,连 ON、SN,由 $OA \cdot OB = R^2$ 得

$$\triangle OBP \backsim \triangle OPA$$

所以

$$\angle OPB = \angle OPN = \angle ONP = \angle OAP$$

即 O、N、A、P 共圆.

$$\angle BPA = \angle NPA = \angle NOA = 2\angle NSO = 2\angle NPQ = 2\angle BPQ$$

故 PQ 平分 $\angle APB$.

原题的证明

由题述可设 P 与 A 不重合(否则结论易证),故 DE 与 BC 不平行,设 DE 与 BC 的延长线交于 Q,连 AQ 与 ABC 的外接圆交于 M(圆中未标出),则

$$QC \cdot QB = QD \cdot QE = QM \cdot QA$$

故 M、A、D、E 共圆.

由引理 4 知

$$AQ \perp OM$$

又由引理 3 知

$$OF \perp AQ$$

故 M 与 P 重合.

连 QF 与 AO 交于 R,由引理 2 知

$$AO \perp QF$$

又

$$AP \perp PO$$

所以 A、R、F、P 共圆.

所以

$$OF \cdot OP = OR \cdot OA = R^2$$

设 OP 与圆 O 交于 I,则由引理 5 知 BI、DI 分别平分 $\angle PBF$ 及 $\angle PDF$,故 I 为 $\triangle PBD$ 的内心.

同理 I 为 $\triangle PCE$ 的内心.

命题证毕.

附记:本题的证明虽然较长,但不难看到,5 个引理都是“陈题”,其中引理 1 和引理 3 的证明可能有别于一般文献.本证明的目的在于提供一种能够为初中读者理解的证明方法,因为平面几何毕竟属于初中数学教材的内容.

参考文献

[1] 刘培杰.最新世界各国数学奥林匹克中的平面几何问题[M].哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2007.

[2] 周沛耕,王博程.高中数学奥林匹克竞赛标准教材[M].北京:北京教育出版社,2004.

一道几何题的证明

唐传发[1]

如图 1 所示，已知：$\triangle ABC$，$\angle A$ 平分线上取一点 Q，$QD \perp BC$，$\angle BAD = \angle CAE$ 且 $\angle KBC = 2\angle BQD$，K 在 AE 上，求证：QK 平分 $\angle BKC$.

此题是叶中豪先生大量发现中的一个小发现，但笔者在做完此题后，感觉此题也很深刻，是一道挑战自我的好题，下面我将给出完整的证明过程.

证明　利用同一法的原理：上述命题等价于下述命题：在 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 平分线上取一点 Q，作 $QD \perp BC$，$\angle KBC = 2\angle BQD$，$\angle KCB = 2\angle CQD$，求证 $\angle BAD = \angle CAK$.

如图 2 所示，要证 $\angle BAD = \angle CAK$，设 K 在 $\triangle ABC$ 内的等角共轭点为 H，只证 D，H，A 三点共线，于是所证命题转化为：

在 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 平分线上一点 Q，作 $QD \perp BC$，$\angle KBC = 2\angle BQD$，$\angle KCB = 2\angle CQD$，H，K 为 $\triangle ABC$ 的等角共轭点，求证：A，H，D 三点共线.

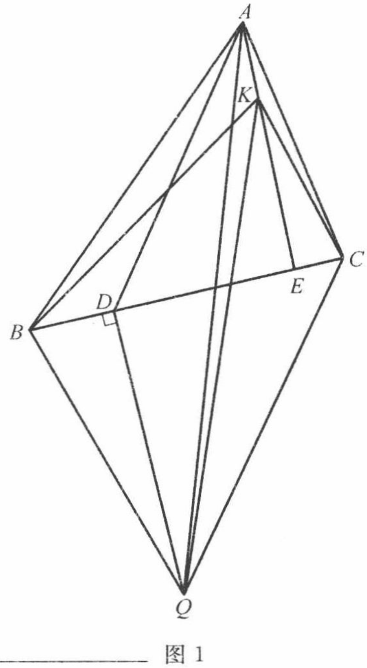

图 1

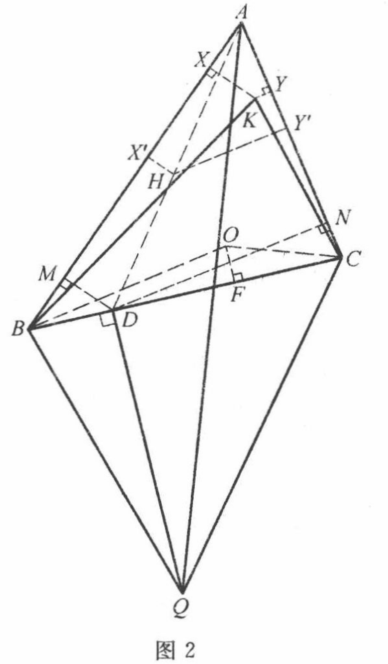

图 2

① 唐传发，安徽省枞阳县汤沟中学.