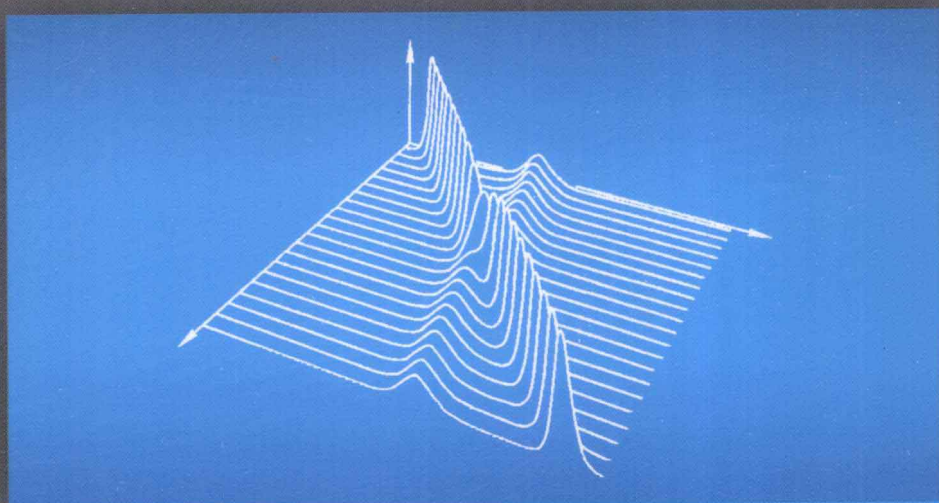


ANALYTICAL METHODS OF
SOLITARY WATER WAVES

孤立水波的解析方法

宗 智 邹 丽 王 振/著



科学出版社

孤立水波的解析方法

宗 智 邹 丽 王 振 著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

非线性水波理论包含有丰富的孤立子结构. 罗素发现的孤立波开启了现代非线性理论引人瞩目的孤立子研究, 并使数学和物理又一次珠联璧合, 完美诠释非线性孤立子世界的奇妙现象. 几乎所有具有孤立子解的偏微分方程在非线性水波理论中都出现了, 这在物理学中十分罕见. 已经有一些书介绍孤立子理论及其在某个领域中的应用, 但是还没有一本专著介绍水波中的孤立子——孤立水波. 本书介绍孤立水波中非常有意思的一些方程及其求解它们孤立子解的解析方法. 解析方法是孤立子研究的重要方法. 本书尽量以简单的语言介绍最近发展起来的几种有效的求解非线性偏微分方程的方法, 并将它们应用到求解一些非线性水波方程中.

本书适合高校、研究所的科研人员和对孤立子感兴趣的读者参考使用, 也适合作为相关专业研究生教材使用.

图书在版编目(CIP)数据

孤立水波的解析方法/宗智, 邹丽, 王振著; —北京: 科学出版社, 2011
ISBN 978-7-03-032501-3

I. ①孤… II. ①宗… ②邹… ③王… III. ①孤立波-研究 IV. ①TV131.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011) 第 204486 号

责任编辑: 刘凤娟 / 责任校对: 林青梅
责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 耕者设计工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

骏光印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 10 月第 一 版 开本: B5 (720 × 1000)

2011 年 10 月第一次印刷 印张: 14 1/2

印数: 1—1 800

字数: 228 000

定价: 56.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

水波是自然界最吸引人的现象之一。古往今来,诗词咏之,不乏其例。南唐冯延巳的“风乍起,吹皱一池春水”,唐朝李白的“因出天池泛蓬瀛,楼船蹙沓波浪惊”,宋朝苏轼的“惊涛拍岸,卷起千堆雪”等诗句,为人所熟;也与现代“风生水波”、“船兴波”与“碎波”等暗合。

水波理论含有非常丰富的数学结构。Airy 的长波理论、Stokes 的有限幅波、Kelvin 的船舶兴波理论等则是许多科学工程学生的必修课业。和光波相比,水波最根本的机理是已知的,即流体力学(牛顿力学 + 变形体 + 欧拉描述法),却能得到那么多奇妙的现象;光波的很多机理虽然未知,但其现象却已经了解。

在自然现象中,既为诗人乐而咏之,又为数学家和科学家着迷,同时也为工程师所熟悉使用的大概只有水波,这是水波所具有的独特魅力。

水波理论中,最具影响力的当属罗素在 1834 年发现的孤立波(在本书里,为了方便,我们不区分孤立波和孤立子,尽管实际上孤立子的概念比孤立波的概念更广泛)。孤立波的发现,不仅仅改变我们对水波现象的认识,而是引导我们在众多的物理领域、社会领域发现了孤立子,从而确定了孤立子像基本粒子一样,是自然界的一种基本存在形式。

尽管对孤立波(或称孤立子)的研究已经有 200 多年的历史,但人们的研究兴趣不减,这源于它的深远科学意义和重要的工程应用。首先,孤立水波中包含了几乎所有的具有孤立波解的方程——KdV 方程、KP 方程、非线性薛定谔方程等,在水波中都对应着不同形式的水波。其次,海洋工程的快速发展,促进了人们对非线性水波、特别是孤立水波的更大研究兴趣。海洋中的孤立内波可以造成深海平台和立管的拦腰断裂,带来巨大的海洋环境污染和经济损失。

在多个领域都有介绍孤立子的专著,但是至今还没有一本书是从水波的领域来介绍孤立子的。本书以海洋工程应用为背景,以非线性水波为理论基础,以符号计算为工具,来介绍求解非线性水波方程的一般解析方法(准确和近似),适当强调了求解间断与离散这类强非线性问题的思路 and 技巧。

本书的研究内容汇集了多个学科的最新研究成果,综合运用,集中解决当代非线性科学前沿问题——孤立波的解析求解。为了满足不同学科读者的需求,本书在写作风格上不追求统一,既有适合工程研究人员的简单明了的叙述,也有数学专业的一些比较严格的证明。

本书共分 8 章,基本按照不同的解析方法来排序:第 1 章,绪论;第 2 章,水波

理论模型; 第 3 章, 同伦分析方法; 第 4 章, 非线性微分-差分方程——同伦分析方法; 第 5 章, 微分变换法; 第 6 章, 非线性发展方程的精确波解; 第 7 章, 微分-差分方程的精确解; 第 8 章, 求解多孤子解的几个直接方法.

感谢以下基金或者项目的支持. 国家自然科学基金创新研究群体科学基金: 海洋环境灾害与结构安全防护 (50921001); 国家重点基础研究发展计划项目: 复杂装备研发数字化工具中的计算力学和多场耦合若干前沿问题 (973-2010CB32700); 国家自然科学基金青年基金: 非线性水波的同伦分析研究 (50909017); 国家自然科学基金天元基金: 非线性孤立水波及其相互作用的解析近似研究 (11026165); 教育部博士点 (新教师类) 基金: 非线性孤立水波的解析研究 (20100041120037).

孤立水波有许多内容, 本书只是呈现了非常有限的一部分. 要把这个问题叙述清楚, 显然不是一件容易的事情. 由于成书时间仓促, 书中不妥之处, 恳请读者批评指正.

作 者

2011 年 5 月

目 录

前言	1
第 1 章 绪论	1
1.1 非线性水波	2
1.2 非线性解析方法	5
第 2 章 水波理论模型	7
2.1 水波的控制方程	7
2.2 小振幅波——线性水波	8
2.2.1 水面波形、水粒子速度和压强	9
2.2.2 波长、波速	9
2.2.3 能量、质量传递、动量传递和能量传递	9
2.2.4 波的叠加	10
2.3 有限振幅波——非线性水波	10
2.3.1 斯托克斯波理论	10
2.3.2 椭圆函数波、孤立波	11
2.3.3 KdV 方程	12
2.3.4 变形 KdV(mKdV) 方程	17
2.3.5 Boussinesq 方程	17
2.3.6 Benjimin-Ono 方程	17
2.3.7 Kadomtsev-Petviashvili(KP) 方程	18
2.3.8 Camassa-Holm(CH) 方程	18
2.3.9 非线性薛定谔方程	18
2.3.10 微分差分方程	19
第 3 章 同伦分析方法	21
3.1 同伦分析法简介	21
3.2 同伦-帕德逼近	24
3.3 选择基函数	25
3.3.1 由多项式表达的解	25
3.3.2 由分式表达的解	26
3.4 解的收敛区域可以调节控制	27
3.5 不依赖小参数	29
3.5.1 Duffing 方程	29

3.5.2 同伦分析解	29
3.5.3 结果分析	34
3.5.4 弱非线性不稳定性的一个模型	34
3.6 初始猜测解选择程式化	36
3.7 浅水中的一维非线性波	38
3.7.1 数学描述	38
3.7.2 孤立波解	41
3.7.3 结果分析	41
3.7.4 双孤立波解	43
3.8 浅水中的二维非线性波	44
3.8.1 问题描述	44
3.8.2 初始猜测解程式化	46
3.8.3 显式孤立波解	46
3.8.4 结果分析	47
3.9 浅水中的三维非线性波	49
3.9.1 问题描述	49
3.9.2 初始猜测程式化	50
3.9.3 显式孤立波解	51
3.9.4 结果分析	51
3.10 深水中的非线性波	52
3.10.1 深水波波列	53
3.10.2 数学描述	54
3.10.3 周期波群	55
3.10.4 包络孤立波	57
3.10.5 波数 k 给定时的波形情况	57
第 4 章 非线性微分-差分方程——同伦分析方法	60
4.1 微分-差分方程——同伦分析方法基本思想	60
4.2 离散的 KdV 方程	61
4.2.1 由分式表达的解	62
4.2.2 椭圆余弦波解	63
4.2.3 孤立波解	65
4.3 结果分析	66
4.3.1 由分式表达的解	66
4.3.2 椭圆余弦波解	68
4.3.3 孤立波解	69
4.4 应用到求解离散的改进的 KdV 方程	70

4.4.1 数学描述	70
4.4.2 同伦分析解	72
4.4.3 解的验证	73
4.5 应用到求解 Volterra 方程	74
4.5.1 数学描述	74
4.5.2 同伦分析解	76
4.5.3 解的验证	78
4.6 应用到求解 Lotka-Volterra 方程	80
4.6.1 数学描述	80
4.6.2 同伦分析解	82
4.6.3 解的验证	82
4.7 应用到两个变量的 Volterra 竞争系统	83
4.7.1 数学描述	83
4.7.2 同伦分析解	85
4.7.3 解的验证	85
4.8 本章小结	87
第 5 章 微分变换法	88
5.1 微分变换法求解不连续孤立波	88
5.1.1 基本理论	88
5.1.2 微分变换-帕德逼近方法	89
5.1.3 数学公式	90
5.1.4 波峰处导数不连续的求解	90
5.1.5 波峰处导数不连续的求解	91
5.1.6 波峰处导数不连续的解	92
5.1.7 波峰处导数连续的解	93
5.1.8 结论	94
5.2 $K(2, 2)$ 方程	94
5.2.1 紧致孤子解	94
5.2.2 尖波解	96
5.2.3 冲击-尖波解	97
5.2.4 结果分析	97
5.3 $K(3, 3)$ 方程	99
5.3.1 紧致孤子解	99
5.3.2 冲击-紧致孤子解	101
5.3.3 结论	102
5.4 广义微分变换法求解差分-微分方程	102

5.4.1	微分变换法求解微分-差分方程基本理论	102
5.4.2	离散的 Volterra 方程	103
5.4.3	离散的 Lotka-Volterra 方程	104
5.4.4	结果分析	105
5.4.5	离散 KdV 方程	107
5.4.6	离散 mKdV 方程	109
5.4.7	分析与结论	112
5.5	本章小结	112
第 6 章	非线性发展方程的精确波解	113
6.1	微分环上的微分方程求解	113
6.2	微分方程的展开阶次的确定	119
6.2.1	微分阶次及其性质	119
6.2.2	展开阶次的构造算法与实例	120
6.3	非线性方程多波解和相互作用解	127
6.3.1	扩张微分环	127
6.3.2	非线性作用求解和应用到 Burgers 方程	128
6.3.3	(2+1) 维 Boussinesq 方程	137
6.3.4	不可积 (2+1) 维 KdV 方程	141
6.4	(n+1) 维 Klein-Gordon 方程的双行波解	146
6.5	本章小结	150
第 7 章	微分-差分方程的精确解	151
7.1	微分-差分方程的展开阶次的确定	151
7.1.1	问题提出的背景	151
7.1.2	几个准备命题	152
7.1.3	算法	153
7.1.4	具体算例	154
7.2	离散的 Riccati 方程法	156
7.2.1	离散 Riccati 辅助方程算法	157
7.2.2	算法的应用	158
7.2.3	更多的算例及其它们的精确解	161
7.3	离散的椭圆方程法	162
7.3.1	椭圆辅助方程法的步骤	162
7.3.2	算法的应用	163
7.4	离散的射影 Riccati 方程法	171
7.4.1	算法的描述	171
7.4.2	算例	175

第 8 章 求解多孤子解的几个直接方法	181
8.1 齐次平衡法	181
8.2 齐次平衡法求解孤立水波的相互作用	182
8.2.1 浅水中的一维非线性波	182
8.2.2 浅水中的弱二维非线性波	187
8.2.3 深水中的非线性波	193
8.3 KP 方程约化为 Painleve-II 方程	195
8.3.1 KP 方程和 Painleve-II 方程的联系	196
8.3.2 通过 Painleve-II 方程构造 KP 方程的解	199
8.4 基于 Boussinesq 方程的 KP 方程解的直接构造	202
8.4.1 方法概述	203
8.4.2 应用于 $(2+1)$ 维 KP 方程	204
8.5 结论与讨论	208
附录 椭圆方程的某些特解和 Ricatti 方程的通解	209
参考文献	211

第1章 绪 论

波浪是最美的自然现象之一。把一块石头投入湖中, 会看到层层波纹向外传播; 当我们站在海边, 就会看到朵朵浪花扑岸而来; 当一艘船在水中航行时, 在船后就会形成长长的波系。波浪充满了自然的精工与奥妙, 无不令人感到惊奇。

但同时, 波浪也对船舶与海洋工程结构物的安全造成很大的威胁, 是造成每年众多船舶和海洋平台事故的主要原因。海面上波浪高度可达二三十米, 对海洋中和海岸处的工程建筑物, 如船舶、采油平台和港口等, 会产生巨大的破坏力, 是这些建筑物的主要载荷^[1,3,7,12,15]。例如, 1954~1982 年的 28 年中, 全世界就有 36 座石油钻井平台因遭狂风恶浪的袭击而翻沉。在大洋上由于狂风恶浪引起的海难, 至今仍占世界上海难总数的 60% 以上。图 1.1 表示的是 1968 年 6 月 13 日 World Glory 号油轮在南非沿岸被大波击中断为两截而沉入海底。1984 年, 北海挪威海域 Ekofisk 油田位于平均海面以上 20m 的 2/4-A 采油平台因受风浪袭击而造成损坏, 图 1.2 所示为海洋平台被大浪袭击后受损倾斜^[20]。



图 1.1 油轮 World Glory 号被大波击中而沉入海底

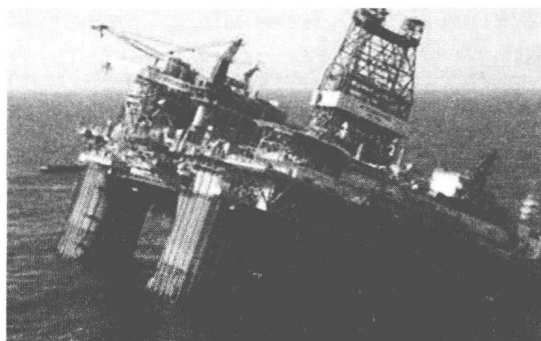


图 1.2 被大波袭击后受损的海洋平台

人类对水波和海浪的研究伴随着世界航海和海洋资源开发的发展而发展,比较成熟的是线性或者弱非线性波浪理论. 传统的船舶波浪载荷的设计多基于线性波浪理论^[3], 弱非线性理论以 Stokes 三阶或五阶理论以及椭圆余弦波理论最为常用, 在海洋工程中广泛应用. 但是, 造成船舶和海洋结构物灾难的波浪基本是巨浪, 具有强非线性特点. 每年众多的船舶和海洋平台的灾难说明现有的线性和非线性波浪理论不能满足工程的安全需求. 非线性波浪理论正在成为船舶和海洋结构物设计的重要工具.

非线性波浪理论是目前船舶和海洋工程水动力学的热点研究问题. 尽管对非线性波浪理论有较长的研究历史, 但是由于研究上具有困难性, 在非线性水波的领域仍然有大量的问题存在, 亟待解决. 随着全球人口的增加, 陆地上的资源已经难以满足要求, 海洋正在成为人类的资源基地和第二生存空间. 海洋资源开发利用首先依赖于海上工程设施, 随着海洋开发利用的规模日趋复杂和庞大, 港口、海岸以及近海油气开发不断向深水发展, 这些海洋平台及船舶有可能承受实际海况下强非线性波浪的作用, 这些强非线性波浪的能量很集中, 破坏力极大.

对非线性水波问题的求解主要通过三种途径: 解析求解、数值模拟和物理实验, 其中, 物理实验是将实际波浪场按照比例尺缩至实验室以进行观测分析流场特征的方法, 缺点是费用昂贵, 无法全面考虑各种因素对波浪场的影响. 不可否认, 在计算机高速发展的今天, 数值模拟^[145, 146, 188, 189] 已经成为一种可选的、高效可靠的方式. 但是, 用数值模拟处理大量离散的数据时, 我们要求的信息往往被大量的数据所淹没, 而解析的表达式则可以显示不同物理量的影响和变化趋势, 看出变化的过程, 有利于参数优化. 非线性解析方法, 经过逐步发展和完善, 已经成为求解非线性问题的一种有效方法, 可以为数值结果提供有效验证. 同时, 更容易揭示物理本质, 实施起来也更简单灵活.

本书选取了非线性水波中的一些重要的问题, 利用解析分析方法进行求解, 拓展了这类分析方法的应用范围, 所以本书的研究工作不仅有着重要的理论价值, 而且具有工程应用前景.

1.1 非线性水波

非线性水波理论是流体力学中一个重要而又十分困难的课题, 一直引起力学、应用数学及船舶与海洋工作者的广泛关注^[8, 14]. 但由于非线性波问题十分困难, 人们把主要的注意力集中在线性水波——Airy 理论^[31] 方面. 非线性水波理论得到迅速发展是近 40 年的事^[4, 10], 究其原因, 随着海洋开发、海洋运输的要求日益迫切, 应用数学中各种奇异摄动理论、偏微分方程的数值方法与数值模拟和计算流体力学的发展, 以及计算机技术的迅速发展, 都为非线性水波理论提供了必备的条件和

强有力的解决工具.

在水波领域内取得的第一个富有理论性的成果是 Stokes 理论^[140]. Stokes 得到的非线性周期波渐近解不仅证明了周期波列的存在, 而且指出了波数及频率与振幅有关这一重要结论, 这正是非线性波在本质上有别于线性波的重要特征, 导致各种非线性效应. 直到 1921 年, Nekrasov^[125] 在研究非线性周期是否存在的工作中, 提出了一个积分方程, 指出对于相当小的波振幅, 此积分方程有周期波解. 1925 年, Levi-Civita^[99] 证明当波的陡度充分小时, Stokes 展式收敛. 1960 年, Krasovskii 给出了比较完整的证明.

浅水波理论所研究的非线性水波在某种意义上是“弱”非线性的, 这使得能用小参数描述非线性效应, 从而可以用各种摄动方法来求解方程. 有两个小参数十分重要, 一个是 $\alpha = a/H$ (a 为波幅), 它表征非线性加速度项对当地时间导数项的比, 表现了振幅弥散, 它使重力波的波峰变尖而波谷变平; 另一个是 $\beta = (H/\lambda)^2$ (λ 为波长), 它表征相位的弥散, 波长越长, 传播越快. 这两个小参数之比 α/β 称为 Ursell 数. 以前的浅水波理论认为 $\alpha \gg \beta$, 方程中保留 α 忽略 β 的影响就得到 $h_t + (uh)_x = 0, u_t + uu_x + gh_x = 0$, 可以与气体力学一维非定常运动相比拟. 二维浅水波方程以及它的适当修改的形式可用来研究水跃现象、河口潮汐波、河渠流动、近海环流以及其他某些大范围流动问题, 特别是对于近海环流的数值计算有很大发展. 但由于这种理论只强调了振幅弥散作用, 振幅不大的波动将沿传播方向使波的陡度越来越大, 以致破碎, 因此, 不存在有周期波. 这显然是不符合实际的.

浅水波理论的发展着重在对浅水弥散波的研究. 要同时考虑到 α, β 的影响, 控制方程就变成著名的方程以及各种类似的方程. Ablowitz 和 Segur^[25] 用多重尺度法推导了二维重力-表面张力浅水弥散波的调制方程, 他所研究的情形实际上是“近一维”的, 即主波沿一个方向传播, 但允许在两个方向上进行调制. 最初研究它的动机是水池试验的需要, 因为要想水池所造出的波真正是单方向传播的, 除非水池的宽度比波长窄得多, 否则这是难以办到的. 因此, 要在试验中考虑到两个方向调制的影响. 孤子 (soliton) 是最早在自然界观察到的, 并且可以在实验室产生的非线性现象之一, 是 19 世纪苏格兰一位造船工程师 Russell 发现的. Russell^[135, 136] 是第一个观察到孤立波, 并且注意加以研究的人, 不过他未能在理论上证明孤立波的存在. Boussinesq^[38] 以水深对波长的比为小参数得到了以他命名的近似方程, 找到了孤立波解. Korteweg 和 de Vries^[89] 通过类似的处理导出了著名的方程, 找到了由雅可比 (Jacobi) 椭圆函数表示的周期解, 用 Cnoidal Wave 命名这种周期波. Keller^[85] 从浅水波高阶近似的研究中重新得到了孤立波和周期波. 在 19 世纪 60 年代早期, Zabusky 和 Kruskal^[181] 通过数值模拟发现了浅水波中的孤立子, 这一突破促使了一种新的数学物理方法——逆散射方法的重大发现. Gardner 等^[66] 提出的逆散射变换方法是求解非线性发展方程的开创性工作, 有力地促进了非线性浅水波理论的

发展. 椭圆余弦 (cnoidal) 波理论和孤立波理论^[6, 89] 都是适用于不同水深范围的, 有大量的文献 [66, 96, 127, 182, 183] 可供参考.

Benjamin-Feir 关于二维波在边波段干扰下当 $kH > 1.363$ 时不稳定的结论, 在两个方面推动了非线性波的研究: ①Stokes 波是对时间变量进行调制而得的非线性波, 而 Benjamin-Feir 关于边波段干扰的理论是基于对振幅进行调制. 因此, 能否对频率和振幅同时进行调制而得到新的调制方程, 从这个新的方程出发研究波的稳定性? ②波在斜向和横向干扰下稳定性如何? 这些问题的研究导致有限水深的非线性波调制理论的发展.

首先是 Benney 和 Rosks^[36] 应用多重尺度方法研究弱非线性水波调制的长时间发展, 得到了波列的波包缓慢变化的发展方程. 1972 年, Hasimoto 和 Ono^[70] 用同样的方法处理了一维波列问题, 指出其波包满足非线性薛定谔 (Schrödinger) 方程, 并通过此方程研究了 Stokes 波的稳定性, 得到了与 Benjamin-Feir 相同的结果. 他还指出沿此途径研究稳定性问题的优点. 后来, Davey 和 Stewartson 研究了二维波缓慢调制, 导出其波包发展方程为两个非线性偏微分方程, 它在形式上与薛定谔方程相似, 还得到了不同于一维情形的新的不稳定性判别准则. 不过他们的工作仅限于重力波, 在这方面最普遍性的研究是 Djordjevic 和 Redekopp^[58] 的工作. 他们考虑了重力 - 表面张力二维水波调制, 给定了稳定性判别准则. 从事这方面研究工作的还有 Longuet-Higgins^[110, 111], Anker 和 Freeman^[32] 以及 Stuart 和 Diprima^[141]. 最近, Ablowitz 和 Segur^[25] 的工作综合了这方面的发展概况, 研究了在有限水深情况下孤立波和波包的稳定性, 指出了二维波所特有的聚焦 (focusing) 现象.

由 Yuen 和 Lake^[92, 180] 完成的两个试验都证实了非线性方程能很好地描写深水水波的调制过程. 1975 年的试验说明一个其波包为紧支型的波列随时间发展为一串以孤立波为包络的波列. 1977 年, 又对深水均匀波列做了试验, 还对记录作了波谱分析, 指出波列随时间的发展服从 Fermi-Pasta-Ulam 循环现象, 分为三个阶段: 第一阶段调制服从 Benjamin-Feir 不稳定规律, 测得边波段 (干扰波) 依指数增长; 第二阶段, 波能从集中于个别几个频率传递到许多频率上, 调制变强, 以至个别的波峰调制为 0, 在强调制下, 这个阶段产生以孤立波为包络的波列; 第三阶段是反调制过程, 能量又重新集中到初始波形的几个频率上, 波形回复到原来的形状. 测试结果还指出, 波长在三个阶段保持不变. 他们对方程做了数值计算, 证实了这种循环现象的存在.

Le Roux^[94] 给出了一种函数基于椭圆余弦波在破碎时的长度, 从而确定从深水到浅水的波长. Zakharov^[182, 183] 建立的方程现在以他的名字命名, 随后建立的约化方程已经被称为非线性薛定谔 (NLS) 方程, 主要由于其简单性, 故非线性薛定谔方程被波浪理论研究人員所重视, NLS 方程包含的非线性项仅到三阶. 三阶非线性薛定谔方程是研究深水和中等水深波列非线性调制的最简单的方程. Osborne^[127]

用了散射反演法 (IST) 的傅里叶公式来提供基于众所周知的非线性薛定谔方程的深水波群行为的新视角.

国内的学者对非线性水波也作了研究, 其中, 王言英及其合作者对高阶波和波浪力作了相关研究^[156, 132]; 邹志利^[19] 对 Boussinesq 方程进行了进一步改进, 提高了色散性精度和二阶传递函数的精度; 刘应中和缪国平^[8] 采用水深平均雷诺方程和 $k-\varepsilon$ 模式对黏性流和渡对直立圆柱联合作用的数值研究; 李玉成和滕斌^[7] 就直墙上不规则破波波浪力的概率分布做了研究, 并且李玉成对斜坡上波谱的变形和波浪破碎提出了一种杂交方法.

1.2 非线性解析方法

高速计算机的出现使得线性问题的求解变得简单^[168]. 然而, 求解非线性问题仍然非常困难, 尤其是寻求非线性问题的解析解^[13, 16] 更是如此. 摄动方法^[40, 52, 67, 76, 86, 90, 121, 124, 153] 是一种被广泛地应用于解析求解非线性问题的工具之一, 最早应用于天体力学, 用来计算小天体对大天体运动的影响, 后来广泛应用于物理学和力学的理论研究. 摄动方法作为一般的数学方法, 也是控制理论研究中的一种工具. 通过摄动方法, 很多有趣的非线性现象和重要属性被揭示出来. 然而, 摄动方法的有效性强烈地依赖于小参数, 这给摄动方法的应用带来了很大的局限. 首先, 很多非线性问题, 尤其是那些强非线性问题, 根本没有小参数. 其次, 即使这样的参数存在, 摄动方法给出的结果也可能不令人满意. 因此, 有必要发展一种新的不完全依赖于小参数的解析方法.

基于同伦^[47, 75, 160, 163, 164] 这一拓扑学^[59, 123, 128] 中的基本概念, 廖世俊等^[100-106] 提出了一种新的解决非线性问题的解析方法, 即同伦分析方法 (homotopy analysis method, HAM).

摄动方法本质上依赖于小参数, 而同伦分析方法的有效性性与所研究的非线性问题是否含有小参数无关. 在同伦分析法的应用上, 廖世俊和他的团队做了大量的工作. 廖世俊在他的著作^[108] 中, 讨论了具有简单分岔的非线性问题、具有多解的非线性问题、非线性特征值问题、托马斯-费米 (Tomas-Fermi) 原子模型、Volterra 生态学模型、自由振动系统、多维动力系统、布拉休斯 (Blasius) 黏性流、呈指数衰减的边界层流、呈代数衰减的边界层流、冯·卡门 (Von Karman) 黏性涡流、Stokes 深水波等.

除了同伦分析方法, 近年还出现了多种非线性方程的解析方法^[11, 18, 21, 60, 114, 139, 158, 174], 如微分变换法、齐次平衡法等.

本书就是以非线性水波为工程应用背景, 介绍多种求解非线性水波方程的解析

方法, 为该领域的研究者提供一个参考工具, 能够迅速地进入该领域. 因此, 本书的主要内容是求解非线性水波领域中的一些经典的非线性问题.

第2章 水波理论模型

最令人感到不可思议的是水波完全可以用偏微分方程来描述.

在一定的假设下, 尽管水波的运动和形状非常复杂, 但是可以用非线性的偏微分方程来精确地描述. 本章主要叙述描述水波的偏微分方程, 以及在不同条件下这些方程的简化形式. 在后续章节中将用到这些方程.

2.1 水波的控制方程

风和海底变动等都会给予水面扰动, 这种扰动在受到回复力的作用下则以波动的形式传播. 在讨论水波时, 回复力一般有表面张力、重力和科里奥利力, 而回复力所产生的波动, 在时间-空间尺度上是向外传播的. 表面张力波主要是以表面张力为回复力所产生的波. 而波浪 (风浪、波涛) 主要是以重力为回复力所产生的波. 此外, 在海啸和潮汐方面, 叠加在重力上的还有科里奥利力. 本章主要处理重力所产生的波浪^[7, 12].

建立如图 2.1 所示的坐标系, 其中, 空间坐标系为 $OXYZ$, 时间为 t . 采用欧拉观点, 空间任一点的速度为 (u, v, w) .

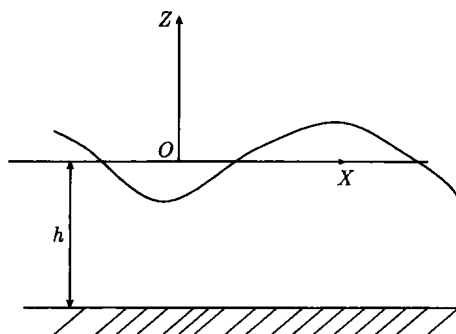


图 2.1 坐标系

分析水波时, 通常都忽略流体的黏性和压缩性, 并假定流动为无旋流. 于是存在速度势 $\phi(x, y, z, t)$, 它和流体速度 (u, v, w) 之间有如下简单的关系式:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

其中速度势 $\phi(x, y, z, t)$ 满足如下的连续性方程: