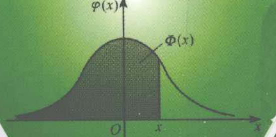
中国科学院“十一五”规划教材配套用书

经·济·管·理·类·数·学·基·础·系·列

概率论与数理统计
学习指导

李伯德 李战存 主编

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u$$



科学出版社

中国科学院“十一五”规划教材配套用书
经济管理类数学基础系列

概率论与数理统计学习指导

李伯德　李战存　主编

科学出版社
北京

前　　言

本书是中国科学院"十一五"规划教材——经济管理类数学基础系列《概率论与数理统计》(科学出版社出版)配套使用的学习辅导与解题指南,主要面向使用该教材的教师和学生,同时也可供报考研究生的学生作为复习之用.

全书以提高大学生的数学素养、领会概率论与数理统计基本概念和理论、掌握概率论与数理统计的基本解题方法和思路为目的,精心编写而成.书中包括教材全部内容:随机事件与概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、多维随机变量及其分布、大数定律与中心极限定理、抽样分布、参数估计、假设检验、回归分析.每章均有基本要求、内容提要、典型例题、教材习题选解、自测题及自测题参考答案六个部分.

基本要求,既是对学习内容的要求,也是学习的重点;内容提要,指明学习要点,对有关概念、性质和定理作了深入分析与归纳,以方便读者课后复习;典型例题,是在教材已有例题的基础上,进一步扩展了例题范围,通过对典型例题的深入分析和详尽解答,帮助读者弄懂基本概念、提高分析能力、熟悉解题方法、掌握解题技巧;教材习题选解,对教材中有一定特点或难度较大的习题,给予详细的解答,解决读者在学习该课程时遇到的困难;自测题,是对本章学习内容的进一步扩展,有针对性地给出了一些综合性练习题,同时提供参考答案,以帮助学生增强自主学习的能力.

书的最后附有模拟试题及参考解答,以方便学生考试前的总复习.

本书由李伯德教授、李战存副教授主编.第1章由李战存编写,第2、3章由智婕编写,第4、5章由李伯德编写,第6、7章由刘转玲编写,第8、9章由王嫒嫒编写,全书由主编统稿定稿.

由于作者水平所限,书中难免有不足之处,恳请读者及专家学者批评指正.

编　者

2011年3月

目　　录

第 1 章　随机事件与概率

一、基 本 要 求

(1) 了解随机现象与随机试验,了解样本空间的概念,理解随机事件的概念,掌握随机事件之间的关系与运算.

(2) 了解随机事件频率的概念,理解随机事件概率的公理化定义,熟练掌握概率的基本性质.

(3) 熟悉古典概型、几何概型的条件及计算公式,能够正确计算几种基本古典概型事件的概率和几何事件的概率.

(4) 理解条件概率的概念,熟练掌握条件概率的三个基本公式,并会求解有关的问题.

(5) 理解事件的独立性概念,能够判定两个或有限个事件是否独立,熟悉 n 重伯努利试验序列概型,掌握二项概率公式及其计算和等待概率的计算.

二、内 容 提 要

1. 随机事件及其有关概念

(1) 随机现象. 事先无法准确预知其结果的现象.

(2) 随机试验与样本空间. 对随机现象的观察称为随机试验,简称试验. 试验具有以下属性:①条件不变可重复;②结果可观察且所有结果是明确的;③每次试验将要出现的结果不确定. 随机试验的每个可能的结果称为该试验的一个样本点或基本事件,记作 ω; 一个随机试验的所有样本点构成的集合称为该试验的样本空间,记作 Ω.

(3) 随机事件. 样本空间中(具有某种性质)的子集称为随机事件,或试验的一个可观察特征称为该试验的随机事件,简称事件,记作 $A,B,\cdots$. 在试验中,一定发生的事件称为必然事件;一定不发生的事件称为不可能事件.

(4) 随机事件的集合表示. 既然随机事件是由满足相应特征的样本点构成的子集,那么事件可由集合表示. 事件 A 发生当且仅当样本点 $\omega\in A$.

2. 事件的关系与运算

(1) 事件的包含. 如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称事件 B 包含事件 A,记作 $A\subset B$.

(2) 事件的相等. 如果事件 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称两事件 A 与 B 相等,记作$A=B$.

(3) 事件的并(和). “A 与 B 中至少有一个事件发生”这一事件称为事件 A 与事件 B 的并(和),记作 $A\cup B$ 或 $A+B$;$\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$,$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 依次表示“相应事件 $A_1,A_2.\cdots,A_n$ 中至少一个发生”及“$A_1,A_2.\cdots,A_n,\cdots$中至少一个发生”的事件.

(4) 事件的交(积). “A 与 B 两个事件均发生”这一事件称为事件 A 与 B 的交(积),记作 $A\cap B$ 或 AB;$\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$,$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 依次表示“相应事件 $A_1,A_2.\cdots,A_n$ 均发生”及“相应事件 $A_1,A_2.\cdots,A_n,\cdots$均发生”的事件.

(5) 事件的差. “事件 A 发生而事件 B 不发生”这一事件称为事件 A 与事件 B 的差,记作 $A-B$.

(6) 互不相容事件. 若 $AB=\varnothing$,则称事件 A 与 B 互不相容.

(7) 对立事件. 若 $A\cup B=\Omega$ 且 $AB=\varnothing$,则称事件 A 与 B 互为对立事件.

(8) 完备事件组. 有限个事件 $A_1,A_2.\cdots,A_n$ 中(或可数个事件 $A_1,A_2.\cdots,A_n,\cdots$ 中),若 $A_iA_j=\varnothing,i\neq j$,且$\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k=\Omega$(或$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k=\Omega$),则称事件组 $A_1,A_2.\cdots,A_n$(或 $A_1,A_2.\cdots,A_n,\cdots$)为一个完备事件组.

3. 事件的运算性质

1) 基本运算

(1) $\varnothing\subset A\subset\Omega$;

(2) $A-B=A\overline{B}=A-AB$;

(3) $\overline{A}=\Omega-A$;

(4) $\overline{\overline{A}}=A$;

(5) $A\cup B=A\cup(B-A)=(A-B)\cup(B-A)\cup(AB)$.

2) 运算律

(1) 交换律 $A\cup B=B\cup A$;$A\cap B=B\cap A$;

(2) 结合律 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$;

$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C;$$

(3) 分配律 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C);$$

(4) De Morgan 对偶律

$$\overline{\bigcup_i A_i}=\bigcap_i\overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_i A_i}=\bigcup_i\overline{A_i}.$$

4. 事件的频率

在 n 次试验中,事件 A 发生的次数为 $r_n(A)$,称 $f_n(A)=\dfrac{r_n(A)}{n}$为事件A 在 n 次试验中发生的频率.

5. 随机事件的概率

(1) 描述性定义. 一个事件发生的可能性大小的度量.

(2) 统计定义. 在 n 次独立重复试验中，事件 A 发生的频率为 $f_n(A)$，当 $n\to\infty$ 时，$f_n(A)$ 趋于一个稳定值，这个稳定值就是事件 A 在每次试验中发生的概率.

(3) 公理化定义. 设 Ω 是样本空间，定义在 Ω 的事件类 F（全体事件构成的集合）上的实值函数 $P(\cdot)$，称为 Ω 上的一个概率测度或概率，它满足下列三条公理：

公理 1　正则性　$P(\Omega)=1$.

公理 2　非负性　对任意事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$.

公理 3　可列可加性　对任意可数个两两不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i).$$

6. 概率的性质

(1) $P(\varnothing)=0$；

(2) $0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(3) $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两不相容，则 $P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$；

(4) $P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$；

(5) $P(\overline{A})=1-P(A)$；

(6) $A\supset B$，则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$，$P(A)\geqslant P(B)$

(7) $P(A-B)=P(A)-P(AB)$；

(8) $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC).$$

7. 古典概型

1）古典概型的假设条件

(1) 随机试验只有有限个可能结果，即样本点（或基本事件）总数有限；

(2) 每一个样本点出现的可能性相同.

2）古典概型的概率计算公式

设 Ω 是古典概型的样本空间，A 是事件，则 A 的概率

$$P(A)=\frac{A\text{ 中样本点(基本事件)总数}}{\Omega\text{ 中样本点(基本事件)总数}}.$$

8. 几何概型

1）几何概型的假设条件

（1）试验的样本空间 Ω 是 $\mathbf{R}$ 中的区间或 $\mathbf{R}^k$，$k\geqslant 2$ 中的区域；

（2）每一个样本点出现的可能性相同.

2）几何概型的概率计算公式

对事件 $A\subset\Omega$，有 $P(A)=\dfrac{m(A)}{m(\Omega)}$，这里 $m(\cdot)$ 表示 A 的长度、面积或体积.

9. 条件概率及其性质

1）条件概率定义

若 $P(A)>0$，称 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 为事件 A 发生的条件下 B 发生的条件概率.

2）条件概率的性质

条件概率满足以下三条公理：

（1）$P(\Omega|A)=1$；

（2）$P(B|A)\geqslant 0$；

（3）$A_1, A_2, \cdots$ 为一列两两不相容的事件，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \mid A\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \mid A).$$

10. 乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式

1）乘法公式

（1）两个事件的情形

$$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2 \mid A_1),\quad P(A_1)>0;$$
$$P(A_1A_2)=P(A_2)P(A_1 \mid A_2),\quad P(A_2)>0.$$

（2）n 个事件的情形. 若 $P(A_1, A_2, \cdots, A_{n-1})>0$，则

$$P(A_1, A_2, \cdots, A_n)=P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2)\cdots P(A_n \mid A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

2）全概率公式

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是一个完备事件组，且 $P(A_i)>0$，$i=1,2,\cdots,n$ 则对任意事件 B，有

$$P(B)=\sum_{i-1}^{n} P(A_iB)=\sum_{i-1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i).$$

3）贝叶斯公式

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是一个完备事件组，且 $P(A_i)>0$，$i=1,2,\cdots,n$ 则对任意事件 B，$P(B)>0$，有

$$P(A_i \mid B)=\frac{P(BA_i)}{P(B)}=\frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B \mid A_j)},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

11. 事件的独立性

1）两两独立的定义

$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件，若其中任何两个事件均相互独立，即 $P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j)$，$i\neq j$，$i,j=1,2,\cdots,n$，则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两独立.

2）相互独立的定义

$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件，若对任意 $2\leqslant k\leqslant n$，及 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$，均有

$$P(A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}),$$

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

3）相互独立的性质

(1) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则其中任意 $k(2\leqslant k\leqslant n)$ 个事件均相互独立，特别地 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两独立.

(2) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，将其中任意一个或若干个事件换成相应的对立事件，则新的事件组相互独立.

(3) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = 1-P(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}) = 1-\prod_{i=1}^{n} P(\overline{A}_i) = 1-\prod_{i=1}^{n} (1-P(A_i)).$$

(4) 任意事件与不可能事件相互独立，也与必然事件相互独立.

(5) 任意两个非零概率事件，若其不相容，则一定不独立.

4）可数个事件的两两独立与相互独立

(1) 两两独立 $A_1,A_2,\cdots$是可数个事件，如果其中任意两个事件均相互独立，则称 $A_1,A_2,\cdots$两两独立.

(2) 相互独立 如果 $A_1,A_2,\cdots$中任意有限个事件均相互独立，则称 $A_1,A_2,\cdots$相互独立.

12. 独立试验序列概型

(1) 独立试验序列. 如果一系列试验，各次试验的结果之间相互独立，则称这一系列试验为一个独立试验序列.

(2) 伯努利试验. 只有两个可能结果的试验称为伯努利试验.

(3) 伯努利试验序列. 独立重复进行的一系列伯努利试验称为伯努利试验序列.

(4) 伯努利定理. 在一次试验中，事件 A 发生的概率为 $p(0<p<1)$，则在 n 次独立重复试验中"事件 A 恰好发生 k 次"的概率为

$$b(k,n,p) = \mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k},$$

其中 $q=1-p$.

(5) 等待概率. 在伯努利试验序列中，设每次试验中事件 A 发生的概率为 p，则"直到第 k 次试验事件 A 才首次发生"的概率为

$$g(k,p) = q^{k-1}p.$$

三、典型例题

1. 有关基本概念、运算与基本性质

例 1　观察 1h 中落在地球某一区域的宇宙射线数，则其样本空间可取为(　　).

解　该试验的可能的结果一定是非负整数，且很难指定一个数作为它的上界，故该试验的样本空间可取为 $\Omega=\{1,2,3,\cdots\}$.

例 2　设 A,B,C,D 是四个事件，试用它们表示下列各事件：

(1) A,B 都发生而 C,D 都不发生；

(2) A,B,C,D 恰好发生 2 个；

(3) 至少发生 1 个；

(4) 至多发生 1 个.

解　(1) $AB\overline{C}\overline{D}$.

(2) $AB\overline{C}\overline{D}+A\overline{B}C\overline{D}+\overline{A}BC\overline{D}+\overline{A}\overline{B}CD+\overline{A}B\overline{C}D+A\overline{B}\overline{C}D$.

(3) $\Omega-\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$ 或 $A+B+C+D$.

(4) $A\overline{B}\overline{C}\overline{D}+\overline{A}B\overline{C}\overline{D}+\overline{A}\overline{B}C\overline{D}+\overline{A}\overline{B}\overline{C}D$.

例 3　设 A,B,C 为三个事件，则"A,B,C 中至少有一个不发生"这一事件可表示为(　　).

(A) $AB+AC+BC$；　　(B) $A+B+C$；

(C) $AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$；　　(D) $\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$.

分析　根据事件的并得意义，凡是出现"至少有一个"，均可由"并"来表示，本题中，要表示的事件是"至少有一个不发生"，由于不发生可由对立事件来表示，于是"A,B,C 至少有一个不发生"等价于"$\overline{A},\overline{B},\overline{C}$ 中至少有一个发生"故答案(D)正确.

答案　(D).

例 4　设三个元件寿命分别为 T_1,T_2,T_3，并连接成一个系统，则只要有一个元件能正常工作，系统便能正常工作，事件"系统的寿命超过 t"可表示为(　　).

(A) $\{T_1+T_2+T_3>t\}$；　　(B) $\{T_1T_2T_3>t\}$；

(C) $\{\min\{T_1,T_2,T_3\}>t\}$；　　(D) $\{\max\{T_1,T_2,T_3\}>t\}$.

分析　"系统的寿命超过 t"等价于"至少有一个元件的寿命超过 t"，这又等价于"三个元件中最大的寿命超过 t"，即(D)是正确的.

答案　(D).

例 5　A,B 是两个事件，则下列关系正确的是(　　).

(A) $(A-B)+B=A$；　　(B) $AB+(A-B)=A$；

(C) $(A+B)-B=A$；　　(D) $(AB+A)-B=A$.

分析　这类问题关键在于正确理解事件运算的定义和性质，可借助韦恩图来分

选项析.(A)的左边的运算结果应该等于 $A+B$ 而不是 A;选项(C)左边运算的含义是 A 发生且 B 不发生,应为 $A-B$;选项(D)左边的括号中运算结果实际上等于 A,从而左边运算结果为 $A-B$; 选项(B)左边实际上等于 $AB+A\bar{B}=A(B+\bar{B})=A$,从而选项(B)是正确的.

答案　(B).

2. 用概率的性质计算或估计概率

例 6　已知 $P(A)=0.6, P(AB)=0$,则 $P(\bar{A}\cup B)=$______.

解　$P(\bar{A}\cup B)=P(\bar{A})+P(B)-P(\bar{A}B)=P(\bar{A})+P(B)-(P(B)-P(AB))$

$=P(\bar{A})+P(AB)=1-P(A)=0.4$,

所以,$P(\bar{A}\cup B)=0.4$.

例 7　已知 $P(B)=0.4, P(AB)=0.2, P(A\bar{B})=0.6$,则 $P(\bar{A}\bar{B})=$______.

解　$P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-(P(A)+P(B)-P(AB))$

$=1-0.2-P(A)=0.8-(P(AB)+P(A\bar{B}))=0.8-0.8=0$,

所以,$P(\bar{A}\bar{B})=0$.

例 8　设 $P(A)=0.6, P(B)=0.7$,证明 $0.3\leqslant P(AB)\leqslant 0.6$.

证明　因为 $AB\subset A, AB\subset B$,所以 $P(AB)\leqslant P(A), P(AB)\leqslant P(B)$,因此

$$P(AB)\leqslant \min\{P(A),P(B)\}=0.6.$$

又

$$1\geqslant P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB),$$

所以,

$$P(AB)\geqslant P(A)+P(B)-1=0.6+0.7-1=0.3.$$

总之,$0.3\leqslant P(AB)\leqslant 0.6$.

注　一般 $P(A)=p, P(B)=q$,则 $p+q-1\leqslant P(AB)\leqslant \min\{p,q\}$.

例 9　设 $A_i\subset A, i=1,2,3$. 证明:

$$P(A)\geqslant P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-2.$$

证明　$P(A)\geqslant P(A_1A_2A_3)\geqslant P(A_1A_2)+P(A_3)-1$

$\geqslant P(A_1)+P(A_2)-1+P(A_3)-1=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-2$

注　上述结果可推广到 n 个事件的情形.

3. 古典概型的概率计算

1) 袋中取球问题

例 10　一袋中有 $m+n$ 个球,其中 m 个黑球,n 个白球,现随机地从袋中取出 k 个球($k\leqslant m+n$),求其中恰好有 l 个白球 $l\leqslant n$ 的概率.

分析　这是古典概型中的一类最基本的问题,因为许多问题常常归结为此类问题(如超几何分布).它的特点是所考虑的事件中只涉及球的结构,不涉及球的顺序,因而计算样本点数(即基本事件数)时,只需考虑组合数.

解　设 A="恰好有 l 个白球". 首先,从 $m+n$ 个球中任取 k 个,取法共有 C_{m+n}^{k} 种,即试验的基本事件总数为 C_{m+n}^{k}. 其次,这些取法中恰好有 l 个白球的取法共有 $C_n^l C_m^{k-l}$,即 A 所含基本事件总数为 $C_n^l C_m^{k-l}$. 所以 $P(A)=\frac{C_n^l C_m^{k-l}}{C_{m+n}^{k}}$.

例 11　一袋中装有 $m+n$ 个球,其中 m 个黑球,n 个白球,现随机地从中每次取一个球,求下列事件的概率:

(1) 取后不放回地取,A="第 i 次取到的是白球";

(2) 取后有放回地取,B="第 i 次取到的是白球".

分析　本题(1)中取球是按顺序取的,涉及取球的顺序,所以在计算样本点数(即基本事件数)时,要用排列数. 本题(2)中是有放回的取球,计算取法要用重复排列数,比如 $m+n$ 个球,每次取一个球,有 $m+n$ 种取法.

解　(1) $m+n$ 个球按顺序依次取完共有 $(m+n)!$ 种取法,其中第 i 次取出的是白球的取法,按乘法法则共有 $C_n^1(m+n-1)!$ 种,于是事件 A 的概率

$$P(A)=\frac{C_n^1(m+n-1)!}{(m+n)!}=\frac{n}{m+n}.$$

(2) 第 i 次取球的取法共有 $(m+n)^i$ 种,"第 i 次取到的是白球"的取法,根据乘法法则,共有 $C_n^1\ (m+n)^{i-1}$ 种. 从而所求事件 B 的概率.

$$P(B)=\frac{C_n^1\ (m+n)^{i-1}}{(m+n)^i}=\frac{n}{m+n}.$$

注　尽管两事件的概率相等,但含义不同,算法不同. 还应注意两种不同试验样本空简样本点的计算. 此外,(1)即为抽签问题.

例 12　一袋中装有 $m+n$ 个球,其中 m 个黑球,n 个白球,现随机地从中每次取一个球,求下列事件的概率:

(1) 取后不放回地取,C="第 i 次才取到白球";

(2) 取后有放回地取,D="第 i 次才取到白球".

分析　对于(1)而言,同前例(1),样本空间基本事件总数为 $(m+n)!$,而 C="第 i 次才取到白球"等价于"前 $i-1$ 次取到的全是黑球,而且第 i 次取到的是白球",这里与顺序有关. 同前例(2),本题(2)的样本空间基本事件总数为 $(m+n)^i$. 而 D="第 i 次才取到白球"等价于"前 $i-1$ 次取到的都是黑球(共有 m^{i-1} 种取法)且第 i 次取到的是白球(共有 n 中取法)

解　(1) 由乘法法则,C 的取法共有 $C_n^1 P_m^{i-1}(m+n-i)!$ 种. 于是

$$P(C)=\frac{C_n^1 P_m^{i-1}(m+n-i)!}{(m+n)!}=\frac{nP_m^{i-1}}{P_{m+n}^{i}}.$$

(2) 再由乘法法则 i 次才取球到白球的取法共有 nm^{i-1} 种,于是事件 D 的概率

$$P(D)=\frac{m^{i-1}n}{(m+n)^i}=\left(\frac{m}{m+n}\right)^{i-1}\frac{n}{m+n}.$$

注　(2) 亦可由伯努利试验序列的概率计算公式解出.

例 13　一袋中装有 $m+n$ 个球,其中有 m 个黑球,n 个白球,每次从中任取一球,

求下列事件的概率:

(1) 取后不放回地取,E="前 i 次能取到白球";

(2) 取后有放回地取,F="前 i 次能取到白球".

分析　两种情形的样本空间同前例相应的情形.

解　(1) 中的对立事件 $\bar{E}$="前 i 次没有取到白球"的种数为 $\mathrm{P}_m^i(m+n-i)!$,所以

$$P(\bar{E})=\frac{\mathrm{P}_m^i(m+n-i)!}{(m+n)!}=\frac{\mathrm{P}_m^i}{\mathrm{P}_{m+n}^i}=\frac{\mathrm{C}_m^i}{\mathrm{C}_{m+n}^i}.$$

因此

$$P(E)=1-\frac{\mathrm{P}_m^i(m+n-i)!}{(m+n)!}=1-\frac{\mathrm{P}_m^i}{\mathrm{P}_{m+n}^i}=1-\frac{\mathrm{C}_m^i}{\mathrm{C}_{m+n}^i}.$$

(2) 中的对立事件 $\bar{F}$="前 i 次没有取到白球"的种数为 m^i,

$$P(\bar{F})=\frac{m^i}{(m+n)^i}=\left(\frac{m}{m+n}\right)^i.$$

因此

$$P(F)=1-P(\bar{F})=1-\left(\frac{m}{m+n}\right)^i.$$

注　(1) 中的对立事件 $\bar{E}$ 的概率的计算还可视为一次取 i 个球,用组合的方法算出.

例 14　一袋中装有 $m+n$ 个球,其中有 m 个黑球,n 个白球,每次从中任取一球,求下列事件的概率:

(1) 取后不放回地取,G="前 i 次恰好取到 l 个白球"($l\leqslant i\leqslant m+n, l\leqslant n$);

(2) 取后有放回地取,H="前 i 次恰好取到 l 个白球",($l\leqslant n$).

解　(1) 首先在 i 次中选取 l 个白球共有 C_i^l 种选取法,其次每次取到的白球是 n 个球中的一个,取到 l 个白球,共有 P_n^l 种取法. 然后其他 $i-l$ 次取球应为黑球. 共 P_m^{i-l} 种,最后将所剩的 $m+n-i$ 个球排列,所以 G 的基本事件总数是 $\mathrm{C}_i^l\mathrm{P}_n^l\mathrm{P}_m^{i-l}(m+n-i)!$ 种. 因此

$$P(G)=\frac{\mathrm{C}_i^l\mathrm{P}_n^l\mathrm{P}_m^{i-l}(m+n-i)!}{(m+n)!}=\frac{\mathrm{C}_i^l\mathrm{P}_n^l\mathrm{P}_m^{i-l}}{\mathrm{P}_{m+n}^i}=\frac{\mathrm{C}_n^l\mathrm{C}_m^{i-l}}{\mathrm{C}_{m+n}^i}.$$

(2) 在 i 次中,l 次取白球共有 C_i^l 种选取法,每次取到的白球是 n 个球中的一个,共 n 种取法. l 次共有 n^l 种取法. 然后其他 $i-l$ 次取球应为黑球. 共 m^{i-l}种. 从而第 i 次中恰好取到 l 个白球的取法共有 $\mathrm{C}_i^l n^l m^{i-l}$种,因此

$$P(H)=\frac{\mathrm{C}_i^l n^l m^{i-l}}{(m+n)^i}=\mathrm{C}_i^l\left(\frac{n}{m+n}\right)^l\left(\frac{m}{m+n}\right)^{i-l}.$$

注　(1) 还可由例 10 直接(一次取 i 个球,其中 l 个白球,$i-l$ 个黑球)算出;(2) 还可由伯努利定理算出.

例 15　一袋中装有 $m+n$ 个球,其中有 m 个黑球,n 个白球,每次从中任取一球,求下列事件的概率:

(1) 取后不放回地取，J=“到第 i 次为止才取到 l 个白球”($l\leqslant i\leqslant m+n,l\leqslant n$)；

(2) 取后有放回地取，K=“到第 i 次为止才取到 l 个白球”.

解 (1)事件 J 等价于“前 $i-l$ 次恰好取到 $l-1$ 个白球，而第 i 次取到的是白球.”由乘法法则. 其取法有 $C_{i-1}^{l-1}P_n^{l-1}P_m^{(i-1)-(l-1)}C_{n-l+1}^1(m+n-i)!$ 种，因此

$$P(J)=\frac{C_{i-1}^{l-1}P_n^{l-1}P_m^{(i-1)-(l-1)}C_{n-l+1}^1(m+n-i)!}{(m+n)!}$$

$$=\frac{(i-1)!C_n^{l-1}C_m^{i-l}C_{n-l+1}^1}{P_{m+n}^i}=\frac{C_n^{l-1}C_m^{i-l}(n-l+1)}{iC_{m+n}^i}.$$

(2) 事件 K 等价于“前 $i-1$ 次恰好取到 $l-1$ 个白球，而第 i 次取到的是白球”. 由乘法法则，其取法有 $C_{i-1}^{l-1}n^{l-1}m^{(i-1)-(l-1)}\cdot n=C_{i-1}^{l-1}n^lm^{i-l}$种. 于是

$$P(K)=\frac{C_{i-1}^{l-1}n^lm^{i-l}}{(m+n)^i}=C_{i-1}^{l-1}\left(\frac{n}{m+n}\right)^l\left(\frac{m}{m+n}\right)^{i-l}.$$

2) 排序问题

例 16 将标号为 1,2,…,50 的 50 个文档随意排成一行，求下列事件的概率：

(1) A=“标号是递增或递减”；

(2) B=“第一号文档排在最左或最右”；

(3) C=“第一号文档与第二号文档相邻”；

(4) D=“第一号文档在第二号文档右边(不一定相邻)”；

(5) E=“第一号文档与第二号文档之间恰有 r 个文档($r<49$)”.

解 (1) 50 个数随意排序共有 50! 种排法，而递增或递减的排法仅有两种，因此所求事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{2}{50!}.$$

(2) 样本空间基本事件总数同(1)；对 B 而言，因为第一号文档排在最左或最右仅有两种，而其余 49 个位置可随意排放，所以 B 的基本事件总数是 $2\times49!$. 因此所求事件 B 的概率为

$$P(B)=\frac{2\times49!}{50!}=\frac{2}{50}.$$

(3) 样本空间基本事件总数同(1)；对 C 而言，共有 49 对相邻位置，而第一号文档与第二号文档相邻又有两种，其余 48 个位置可随意排放，由乘法规则知 C 的基本事件总数是 $2\times49\times48!$. 因此所求事件 C 的概率为

$$P(C)=\frac{2\times49\times48!}{50!}=\frac{2}{50}.$$

(4) 样本空间基本事件总数同(1)；由于第一号文档在第二号文档右边(不一定相邻)与第一号文档在第二号文档左边对称，各占一半，因此 D 的基本事件总数是 $50!\times\frac{1}{2}$，所求事件 D 的概率为

$$P(D)=\frac{50!/2}{50!}=\frac{1}{2}.$$

(5) 样本空间基本事件总数同(1)；第一号文档与第二号文档之间恰有 r 个文档表明两文档之间有 r 个位置，这样剩下的位置有 $50-r-1$；第一号文档与第二号文档对调有两种；其余 48 个位置随意排放，有 48！种排法. 据乘法规则，E 的基本事件总数是 $2\times(49-r)\times48!$，所求事件 E 的概率为

$$P(E)=\frac{2\times(49-r)\times48!}{50!}=\frac{2\times(49-r)}{50\times49}.$$

例 17(配对问题) 50 对新人同时举行婚礼. (1) 假如随机地把他们分成 50 对，试求每对恰好为夫妻的概率；(2) 假如将新郎随机地排好，再将新娘配对，试求每对恰好为夫妻的概率.

解 (1) 同上例，共有 100 个人排序，样本空间基本事件总数是 100!. 每对恰好为夫妻的种数分两步：第一步，各对之间的排序有 50！种；第二步，每对新人内部均有 2 种. 由此可知每对新人恰好为夫妻的基本事件总数是 $2^{50}50!$. 从而，每对恰好为夫妻的概率是$\frac{2^{50}\cdot50!}{100!}$.

(2) 新郎随机地排序有 50！种，由此知样本空间基本事件总数是 50！种，其中每对恰好为夫妻的种数仅有一种. 由此知有利于事件总数仅有一种. 所以，每对恰好为夫妻的概率是$\frac{1}{50!}$.

3) 放球入箱问题

例 18 将 n 个球随意放入 N 个箱子中，其中每个球等可能放入任意一个箱子，求下列事件的概率：

(1) 指定的 n 个箱子各放入一球(设 $N\geqslant n$)；

(2) 每个箱子最多放入一球；

(3) 第 i 箱子不空；

(4) 第 i 箱子恰好放入 $k(k\leqslant n)$个球.

分析 每个箱子可以被重复使用，因此每个球有 N 种放法，从而 n 个球的总放法为 N^n. 这说明样本空间基本事件总数为 N^n.

解 (1) 样本空间基本事件总数为 N^n，记 A=“将 n 个球放入指定的 n 个箱子中，每个箱子各放入一球”，A 含有 n！个基本事件，于是该事件的概率为

$$P(A)=\frac{n!}{N^n}.$$

(2) 样本空间基本事件总数仍为 N^n. 记 B=“每个箱子最多放入一球”. 由于有 n 个箱子各放入一球，这相当于在 N 个箱子中任意取 n 个箱子，将选出的 n 个箱子中随意各放入一球，根据乘法法则，共有 $\mathrm{P}_N^n=\mathrm{C}_N^n n!$，种方法，于是事件 B 的概率为

$$P(B)=\frac{\mathrm{P}_N^n}{N^n}=\frac{\mathrm{C}_N^n n!}{N^n}.$$

(3) 记 C=“第 i 箱子不空”，先计算对立事件 $\overline{C}$ 的概率. 基本事件总数为 N^n，而 $\overline{C}$ 表明 n 球任意放入第 i 箱子以外的其他 $N-1$ 个箱子中，共有 $(N-1)^n$ 种方法，

于是

$$P(\bar{C})=\frac{(N-1)^n}{N^n}=\left(\frac{N-1}{N}\right)^n.$$

故

$$P(C)=1-\left(\frac{N-1}{N}\right)^n.$$

(4) 记 $D=$“第 i 箱子恰好放入 k 个球”. 样本空间基本事件总数仍为 N^n，第 i 箱子恰好放入 k 个球可分成两步：n 个球中任意取 k 个球放入第 i 箱子，共有 C_n^k 种取法，然后其他 $n-k$ 个球随意放入其余的 $N-1$ 个箱子中，共有 $(N-1)^{n-k}$ 种放法. 由乘法规则，第 i 箱子恰好放入 k 个球的方法有 $C_n^k(N-1)^{n-k}$，从而该事件 D 的概率为

$$P(D)=\frac{C_n^k(N-1)^{n-k}}{N^n}=C_n^k\left(\frac{1}{N}\right)^k\left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-k}.$$

注 对问题(3)(4)，可以将该放球过程视为伯努利试验序列，每一次放球视为一次试验，每次实验中考虑事件 A：“球放入第 i 箱子”，则有 $P(A)=\frac{1}{N}$. 那么“第 i 箱子不空”等价于“事件 A 至少发生一次”，而“第 i 箱子恰好放入 k 个球”等价于“事件 A 恰好发生 k 次”. 由伯努利概型也可得到上述结果.

例 19(生日问题) 有一个 5 人小组，问：(1) 5 人生日都在星期天的概率有多大？(2) 5 人生日都不在星期天的概率有多大？(3) 5 人生日不都在星期天的概率有多大？

解 因为每人生日可在 7 天中的任何一天，而且可以认为这 7 天中任何一天出生是等可能的. 故可用古典概率来计算，由乘法法则，5 人生日有 $7\times7\times7\times7\times7=7^5$ 种可能情况.

(1) 5 人生日都在星期天仅有一种情况，所以

$$P(5\text{ 人生日都在星期天})=\frac{1}{7^5}.$$

(2) 5 人生日都不在星期天，每人只能是星期一到星期六的 6 种情况之一，故由乘法法则生日在星期一到星期六的共有 $6\times6\times6\times6\times6=6^5$ 种情形，所以

$$P(5\text{ 人生日都不在星期天})=\frac{6^5}{7^5}=\left(\frac{6}{7}\right)^5.$$

(3) 根据(1)和对立事件的概率公式得

$$P(5\text{ 人生日不都在星期天})=1-\left(\frac{1}{7}\right)^5.$$

4. 几何概型的概率计算

例 20 某公共汽车站每隔 10min 有一辆公共汽车到达，一位乘客到达汽车站的时间是随意的，求他等候时间不超过 3min 的概率.

解 由于乘客到达汽车站时间是随意的，那么他在相继两辆公共汽车到站的时间间隔中任意时刻到达是可能的，因而符合几何概型的条件. 设前一辆汽车到站时间