W E I J I F E N Z H U A N T I S H U L I Y U J I E D U

大学数学专题梳理与解读丛书

微积分
专题梳理与解读

邵剑 李大侃 著

在读学生
复习考研者
必备宝典

同濟大學出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

大学数学专题梳理与解读丛书

微积分专题梳理与解读

邵　剑　李大侃　著

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书是作者根据自己几十年数学教学和20余年考研数学辅导的丰富经验，密切结合当前大学生微积分（高等数学）学习和考研复习的实际需求，潜心笔耕历时3年多著述而成的. 全书通过大量例题，以专题的形式十分深入地讲解微积分的问题、思路和方法，几乎对每个例题都以"注记"的形式给出深刻的解读. 全书分14章，内容涉及极限与连续、一元函数导数的概念与计算、微分中值定理及其应用、一元函数及其性态分析、一元函数积分的概念与性质、一元函数积分的计算与应用、无穷级数的敛散性、幂级数与傅里叶级数、多元函数微分学、重积分、矢量代数、解析几何、场论初步、曲面积分与曲线积分、常微分方程以及经济学中的若干数学问题，最后附录给出创新思维选读等内容. 本书是微积分教学内容的补充、延伸、拓展和深入，对教师教学和学生学习、复习中的疑难问题、不易展开的问题、需要思维剖析和思路总结与解读的问题均进行了详细的探讨，能够十分有效地帮助学生夯实数学基础和提高思维分析能力及解题能力.

本书可供普通高等院校学习"微积分"、"高等数学"的大学生、复习考研的各专业学生和从事大学数学教学的教师学习、研读. 对于学过高等数学的广大科技人员，本书也是值得收藏和供时常研阅的经典佳作.

图书在版编目（CIP）数据

微积分专题梳理与解读/邵剑，李大侃著. —上海：同济大学出版社，2011.6

ISBN 978-7-5608-4582-1

Ⅰ.①微… Ⅱ.①邵…②李… Ⅲ.①微积分—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第097421号

大学数学专题梳理与解读丛书

微积分专题梳理与解读

邵 剑 李大侃 著

责任编辑 曹 建 **责任校对** 徐春莲 **封面设计** 潘向蓁

出版发行	同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn （地址：上海市四平路1239号 邮编：200092 电话：021-65985622）
经 销	全国各地新华书店
印 刷	常熟市华顺印刷有限公司
开 本	787mm×1 092mm 1/16
印 张	28.75
印 数	1—4100
字 数	717 000
版 次	2011年6月第1版 2011年6月第1次印刷
书 号	ISBN 978-7-5608-4582-1
定 价	49.00元

前 言

朋友！你我不曾相识，但高兴的是我们有幸相聚于本书之中，这也是一种缘分，更是一种信任与情感的交流. 愿通过本书我们能成为好朋友——真正的好朋友！因为一切的美，数人最美，而情更美！

朋友，应以坦诚相处，以真诚交流. 我们**用心**教书，我们**用心**著书. 当然，也期望读者用心读此书，并祝福你在系统梳理数学知识的同时进入学术上更高的境界！因为用心是一个人的品格，是一个人的最高境界，而学术上的竞争有由低至高的三种境界：一是拼技巧与手段，二是拼思维的创新与思想方法，三是拼人的气质与品格.

我的教学理念是微笑教学：

讲台使我愉悦，学生是我朋友.

幽默一句话，从中领悟真谛；微笑一瞬间，从中感悟真情.

以玩的心态认真学习，在学习中享受玩的快乐，这是学习的最高境界.

我的教学理念是创新思维教学：

知识学习中融入创新思维，以创新思维解读专业知识.

教学是对美的一种追求，是一种美的享受.

我的教学理念又是情感的教学：

亲和力、感染力、震憾力.

以爱动其心，以严导其行；寓爱于严，寓严于情.

本书的著作正融入了上述理念，盼读者品味.

高等数学与初等数学之主要区别在于：高等数学是考虑**无限的、动态的**；初等数学却是考虑**有限的**，又是**静态的**. 其实，高等数学是相对于初等数学而言的. 但是很多人仅仅把微积分与常微分方程部分内容俗称为高等数学.

本书适用于工学、理学、经济学、管理学等各学科、各专业的如下几类读者：

(1) **正在学习"高等数学"(含"微积分"、"常微分方程"等)课程的读者**. 本书各章节的编排是与"高等数学"(含"微积分"、"常微分方程"等)课程的教材及其教学顺序相一致的,故对初学者来说它是一部极好的同步辅导用书.

(2) **报考硕士研究生的读者**. 本书是根据著者20余年来为攻读硕士研究生参加全国入学考试而举办的数学辅导复习班上的讲课内容与几十年的教学经验撰写而成的. 本书各个章节、各个专题的内容是严格按照教育部的硕士研究生入学数学考试大纲来确定的,它是一部广度与深度均较恰当的复习用书. 请读者根据自己报考研究生的专业要求,按照教育部当年颁布的数学考试大纲选用与略去本书中有关章节的相关内容.

(3) **从事"高等数学"与"数学分析"教学工作的青年教师**. 本书可以作为有关教师的教学参考用书.

(4) **正在选学"数学分析"与"常微分方程"课程的读者**.

本书是一部具有可读易懂、内容全面、方法多样、综合性强等特点的大全;又是具有概念清晰、叙述严谨、思想丰富、思维活跃等特色的精粹. 其中,**最主要的特色**是在数学知识的专题梳理与例题解析相结合的过程中,特别强调**创新思维**的贯通与数学方法的分析,具有个性的"注记"是对有关专题的剖析与延拓以及其思想的最好解读. 本书的写作风格是以朋友交流的谈话形式撰写,是没有声音的讨论式课堂教学.

好人有如下三种定义:

考虑别人比考虑自己多一点的人是好人.

——北京大学教授　季羡林

考虑别人与考虑自己一样多的人是好人.

——北京大学教授　王　选

考虑自己的同时,有那么一点考虑到别人的人也是好人.

——浙江大学教授　邵　剑

这三种好人定义的类同之处是在考虑自己的同时都会考虑别人、尊重别人、关心帮助别人.

这里,要特别感谢本书的责任编辑、同济大学出版社副总编辑曹建同志,感谢他的关注,使本人长期创立的教学思想与教学风格在本书中得以部分展示. 他在每个细节中处处体现出来的考虑读者、关心作者的好人品质让我感动.

本书的不当甚至差错之处,唯望从各位同仁与朋友中多获教言以增益. 谢谢!

著　者

写于浙江大学・求是村

2011年

目　　录

1 极限与连续

极限是微积分学的核心与基础. 极限是建立在无限基础上的概念，它考虑的是一个动态过程. 其中的无限与有限、动态与静态就是高等数学与初等数学的质的区别之一.

1.1 极限的概念与性质

1.1.1 极限的基本概念

1. 极限的表示

如果引入理想元素无穷大∞，$+\infty$与$-\infty$，则各种类型的极限基本上可以统一表示为函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. 其极限中的 x_0 与 A 也可以分别理解为理想元素∞，$+\infty$与$-\infty$等，它们就表示相应的极限. 这是极限描述的统一美的一种追求.

根据自变量 x 的目标值 x_0 与函数 $f(x)$ 的目标值 A 的不同含义以及它们相应邻域的定义，就可以得到不同形式极限的意义. 例如，

当 $f(x)$ 的自变量 x 只取正整数 n，x_0 为$+\infty$时，就是数列$\{u_n\}$，$u_n = f(n)$ 的极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = A$；

当 $f(x)$ 的自变量 x 从点 x_0 左方趋于 x_0（或右方趋于 x_0）时，就是函数 $f(x)$ 的左极限 $f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A$（或右极限 $f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A$）；

当 $A = 0$ 时，极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ 表示 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时为无穷小；

特别，当 A 为∞时，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ 表示 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时为无穷大，它是极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在的一种形式. 其他各种形式所表示的极限也是容易理解的. 但是人们还是习惯性地认为 x_0，A 是一有限的常数. 为了遵循这种习惯，本书仍然认为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 蕴含着极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 是存在的，且等于有限数 A.

2. 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 的分析语言定义

极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 是研究自变量 x 趋向于 x_0 的过程中函数 $f(x)$ 的变化趋势. 通俗地讲，极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 的定义蕴含着自变量 x 落在点 x_0 的充分小邻域内时，函数 $f(x)$ 的值落在 A 的充分小邻域内. 极限的分析语

言描述，正是由这一思想给出的. 极限的几何意义也是由此得出的. 为此，掌握各种邻域的概念及其表达式是至关重要的，它有利于理解极限的分析语言描述的精神实质.

根据极限的意义以及邻域的表示，容易给出相应极限的分析语言的定义. 例如，函数 $f(x)$ 在 $x \to x_0$ 时的**极限** $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A,\ A \neq \infty$ 的分析定义是：

对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，总存在 $\delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 的该分析语言的定义是一种简洁美与和谐美的追求，它叙述严谨而有序，其意义直观而又深刻. 读者应能体会到以下几点：

1° 在极限的分析定义中，只要求正数 δ 存在即可，并未限定它的大小；而且 δ 依赖于 $\varepsilon > 0$，但又不是由 ε 所唯一确定的. 如果存在一个 $\delta > 0$ 能适合定义的要求，那么一切小于这个 δ 的正数也都能适合定义的要求.

2° 当 x 趋向于 x_0 时函数 $f(x)$ 的极限是一个局部性的概念，它所考虑的是其变化的趋势.

在极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 的定义中，函数 $f(x)$ 可以在点 x_0 处没有定义. 故极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 是否存在以及存在时其极限值是多少，可以与函数 $f(x)$ 在点 x_0 处是否有定义，或其函数值 $f(x_0)$ 是多少以及距离 x_0 较远的点的函数值都没有关系，而只与点 x_0 的去心邻域内函数有关. 于是，即使极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 不存在，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处也可以有定义；同样，即使极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，而函数 $f(x)$ 在点 x_0 处也可以没有定义.

也正是这个原因，数列 $\{u_n\}$ 的极限 $\lim\limits_{n \to \infty} u_n$ 与 $\{u_n\}$ 的前有限项无关.

3° 考虑到在极限的上述分析定义中的正数 $\varepsilon > 0$ 是**任意**的，$\delta > 0$ 只要存在**某一个**即可，对 x_0 的 δ 去心邻域 $\{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$ 内**任意**一点 x 都使 $|f(x) - A| < \varepsilon$；再考虑到"任意"与"某一个"的关系，则按照逆向思维容易给出极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq A$ 的分析定义是：

存在某个 $\varepsilon_1 > 0$，对任意的 $\delta > 0$，总存在点 x_1 满足 $0 < |x_1 - x_0| < \delta$ 时，使 $|f(x_1) - A| \geqslant \varepsilon_1$.

请读者自行分别给出其他各种类型极限等于 A 与不等于 A 的分析语言定义，以加深对极限概念的理解. 当然，这些分析语言表述都是相应极限的充分必要条件.

4° **无穷大量**是在自变量的某一变化过程中，其绝对值无限增大的变量. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ 是当 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限不存在的一种形式，它仅仅表示当 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 的一种变化趋势. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ 的分析定义是：

对任意给定的 $G > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时恒有 $|f(x)| > G$.

令 $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$，可以把 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ 转化为极限 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$，其中函数 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域内不等于零，但 $f(x)$ 在点 x_0 处可以等于零. 即在自变量的同一变化趋势下，无穷大量的倒数为无穷小量. 同理，无穷小量的倒数为无穷大量. 请注意：对无穷大量的讨论，一般都是经这一变换转化为其倒数的无穷小量的讨论.

3. 若干基本极限

利用极限的分析语言可以证得如下几个基本极限，它们在今后的极限计算中要经常用到：

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$；　$\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$；　$\lim\limits_{x \to +\infty} x q^x = 0,\ |q| < 1$；

$\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0,\ |q| < 1$；　$\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1,\ a > 0$；　$\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$；

$\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$；　$\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$，常数 $a > 0$；　$\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$；

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0,\ \alpha > 0$；　$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^\alpha}{a^x} = 0,\ a > 1,\ \alpha > 0$；

$\lim\limits_{x \to a^-} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{1}{a}}, & a \neq 0, \\ 0, & a = 0; \end{cases}$　$\lim\limits_{x \to a^+} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{1}{a}}, & a \neq 0, \\ +\infty, & a = 0. \end{cases}$

4. 极限的分析语言证明

例 1 用分析语言证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-n-3}{3n^2+2n-4}=\dfrac{1}{3}$.

证明 对于任意给定的 $\varepsilon>0$，要使不等式

$$\left|u_n-\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{n^2-n-3}{3n^2+2n-4}-\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{-5n-5}{3(3n^2+2n-4)}\right|<\varepsilon$$

成立. 因为当 $n\geqslant 5$ 时有

$$\left|u_n-\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{5n+5}{3(3n^2+2n-4)}\right|\leqslant\frac{6n}{9n^2}<\frac{1}{n}, \tag{*}$$

故只要使 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$，则取 $N=\max\left\{5,\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]\right\}$，则当 $n>N$ 时恒有 $\left|\dfrac{n^2-n-3}{3n^2+2n-4}-\dfrac{1}{3}\right|<\varepsilon$，所以按极限定义证得原极限结论成立.

例 2 用分析语言证明 $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{a}$, $a>0$.

证明 因自变量 $x\to a$, $a>0$，故可以限制 $|x-a|<a$，即有 $0<x<2a$.

对任意给定的 $\varepsilon>0$，要使不等式

$$\left|\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}\right|=|x-a|\left(\left|\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}\right|\right)^{-1}<\varepsilon.$$

注意到已限制 $0<x<2a$，只要

$$\left|\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}\right|<|x-a|\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^{-1}<\varepsilon.$$

则取 $\delta=\min\{a,\sqrt[3]{a^2}\,\varepsilon\}$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时恒有 $|\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}|<\varepsilon$，所以按极限定义证得原极限结论成立.

例 3 利用极限的分析语言可以证明如下命题：

(1) 若数列 $\{u_n\}$ 的 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$, $A\neq 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=1$.

(2) 若数列 $\{u_n\}$ 的 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=l$, $l<1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

(3) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=l$, $l>1$，则数列 $\{u_n\}$ 无界.

(4) 若正项数列 $\{u_n\}$ 的 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=l$，且 $0<l<+\infty$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$.

(5) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$，又在 x_0 的某去心邻域内 $|\psi(x)|\leqslant K$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}[\varphi(x)+\psi(x)]=\infty$，其中 K 为某一正常数.

(6) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$，又在 x_0 的某去心邻域内 $|\psi(x)|\geqslant\eta>0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\psi(x)=\infty$，其中 η 为某一正常数.

证明略. 请读者熟知这些命题，因为这些结论在往后的知识学习中是十分实用的. 例如，

1° 无穷大量与有界量之和仍为无穷大量.

2° 任意两个正(负)无穷大量之和是正(负)无穷大量，但任意两个非同号的无穷大量之和可能为正无穷大量，可能为负无穷大量，也可能为某一常数，甚至可能其和的极限不存在，又不为∞. 例如，当 $n\to+\infty$ 时 $\{n\}$ 与 $\{-n\}$ 都是无穷大量，但它们的和显然不是无穷大量；又如，$\{n+(-1)^n\}$ 与 $\{-n\}$ 在 $n\to+\infty$ 时都是无穷大量，而它们的和 $\{(-1)^n\}$ 在 $n\to+\infty$ 时极限却不存在.

3° 无穷大量 $\varphi(x)$ 与满足 $|\psi(x)|\geqslant\eta>0$ 的 $\psi(x)$ 乘积仍是无穷大量. 然而，无穷大量与无穷小量的乘积可能为无穷大量，可能为零，可能为某一常数，也可能为一有界量但其极限不存在，甚至可能为一无界量但其不为无穷大量. 例如，数列 $\{n^2n^{(-1)^n}\}$ 与 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ 的乘积 $\{n^{1+(-1)^n}\}$ 是无界的，因为该乘积的偶数项子数列趋于 $+\infty$；但它又不为无穷大量，因该乘积的奇数项子数列是收敛于 1 的收敛子数列.

1.1.2 极限的性质与法则

极限有着很多重要的性质与法则，读者都应熟练掌握.其中连续函数的性质将在 1.2 节中阐述；极限存在的准则将在 1.3 节中展开.这里，将对极限的其他一些性质加以分析.

1. 性质的一般性分析

性质是指某事件所具有的根本属性，一般表现为当事件 P 成立时它必具有结论 Q，通常以"$P\Rightarrow Q$"的定理给出.请读者在学习它的过程中还必须按照逆向思维考虑下述两个问题：

1° 该定理的逆否定理"非 $Q\Rightarrow$非 P"是必定成立的.当然，读者必须能正确表述它的逆否定理.

2° 考虑该定理的逆向结论"$Q\Rightarrow P$"是否成立？如果要使其逆向结论"$Q\Rightarrow P$"成立，它的条件与结论需如何修正等？如下述的极限保号性的两个性质正是互为逆方向的两个结论，但需略加修正.

2. 极限的基本性质

(1) 若某函数的极限存在，则其极限是唯一的；反之，若函数的某一极限不唯一，则它的极限不存在.

(2) 极限的**有界性**是指：

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则函数 $f(x)$在点 x_0 的充分小的去心邻域内有界.这就是说，函数 $f(x)$有界只是其极限存在的必要条件，而非充分条件，故它蕴含着如下结论：

若函数 $f(x)$无界，则其极限必不存在；若函数 $f(x)$有界，则其极限不一定存在.

例如，数列$\{n^{(-1)^n}\}$是无界的，故它的极限不存在，即$\{n^{(-1)^n}\}$是发散数列.

(3) 极限的**保号性**是指：

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且它的极限值$A>\alpha$，则存在正数$\eta>0$，使得函数 $f(x)$ 在点 x_0 的充分小的去心邻域内有 $f(x)>\alpha+\eta$；若 $A<\alpha$，则 $f(x)$ 在相应邻域内有 $f(x)<\alpha-\eta$.

它的逆向命题修正为：若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且函数 $f(x)$ 在点 x_0 的充分小的去心邻域内有 $f(x)>\alpha$，则它的极限值 $A\geqslant\alpha$；若 $f(x)$ 在相应邻域内有 $f(x)<\alpha$，则它的极限值 $A\leqslant\alpha$.

如果考虑特殊性情形 $\alpha=0$，那么上述相应结果就充分体现了函数 $f(x)$在相应邻域内与其极限值保持相同的符号这一事实.它就是"个性体现共性"思想在数学命题中的反映.

(4) 极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $f(x_0-0)=f(x_0+0)=A$.

例 4 设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=l,\ l>0$，证明：函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 的邻域内恒有不等式$f(x)\geqslant f(a)$，也即 $f(x)$ 在 $x=a$ 处取得极小值.

证明 因为$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=l,\ l>0$，故由极限的保号性知，存在$\delta>0$和$\eta>0$，使得当$0<|x-a|<\delta$时，恒有

$$\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}>\eta>0.$$

即当$x\in\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$时有 $f(x)>f(a)$.

特别，当 $x=a$ 时，显然有 $f(x)=f(a)$.综合二者即得，在点 $x=a$ 的邻域内必有 $f(x)\geqslant f(a)$.

注记 注意，本例条件中函数 $f(x)$没有可导的要求，故只能用极限的保号性证明.如果题设条件改为：函数 $f(x)$在点 $x=a$ 处具有二阶连续导数，则可利用二阶泰勒公式得

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=\lim_{x\to a}\frac{f'(a)(x-a)+\dfrac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2+o((x-a)^2)}{(x-a)^2}=l>0,$$

故有 $f'(a)=0,\ f''(a)=2l>0$.于是根据函数极值的充分条件知，$f(x)$ 在点 $x=a$ 处取得极小值.

3. 无穷小的性质

无穷小是以零为极限的变量,它有如下重要的性质:

1° $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\alpha(x)=f(x)-A$ 在 $x\to x_0$ 时为无穷小,即

$$f(x)=A+\alpha(x),\text{其中}\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0.$$

2° 当 $x\to x_0$ 时,有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

注意,当 $x\to x_0$ 时 $\alpha(x)$ 为无穷小,$\beta(x)$ 为有界量仅仅是它们的乘积 $\alpha(x)\beta(x)$ 为无穷小的充分条件,而非必要条件.例如,如果数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$,那么当 $n\to\infty$时若$\{x_n\}$为无穷小,则$\{y_n\}$未必有界;若$\{x_n\}$有界,则$\{y_n\}$未必为无穷小.

3° 当 $x\to x_0$ 时,有限个无穷小的和为无穷小;有限个无穷小的乘积为无穷小.

4° 当 $x\to x_0$ 时,$|\alpha(x)|$为无穷小的充要条件是 $\alpha(x)$为无穷小,即 $\lim\limits_{x\to x_0}|\alpha(x)|=0$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$. 然而,一般情形是:

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则$\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|A|$;若$\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|\neq|A|$,则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq A$.

这里,当 u_n 恒正或恒负时,数列$\{|u_n|\}$与$\{u_n\}$同时敛散.但是,若 u_n 非恒正或非恒负,则当$\{|u_n|\}$收敛时,$\{u_n\}$可能收敛,也可能发散.例如,$\{|(-1)^n|\}$是收敛的,但$\{(-1)^n\}$是发散的.

5° 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=a$, $a\neq\infty$,且$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$,则$\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$.

它表明:当 $x\to x_0$ 时,若分式$\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}$的极限存在,且其分母 $\alpha(x)$是无穷小,则它的分子 $\beta(x)$必定也是无穷小.显然,当 $a\neq0$ 时,分子 $\beta(x)$是分母 $\alpha(x)$的同阶无穷小;当 $a=0$ 时,分子 $\beta(x)$是分母 $\alpha(x)$的高阶无穷小;当 $a=1$ 时,分子 $\beta(x)$是分母 $\alpha(x)$的等价无穷小.这一性质在极限计算中是很重要的,它的另一种表述是:

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=a$, $a\neq0$,且$\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$,则$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

它们可以通过极限的保号性与夹逼准则证得,也可以由极限的运算法则证得.

6° 设当 $x\to x_0$ 时,$\alpha(x)$与 $\beta(x)$都是无穷小,且 $\beta(x)\neq0$,那么 $\alpha(x)$与 $\beta(x)$可以进行无穷小的比较.当 $x\to x_0$时,$\alpha(x)$是 $\beta(x)$的**高阶无穷小**、**同阶无穷小**、**等价无穷小**等是读者必须掌握的概念.注意,把各种类型的函数都统一到同一种结构内函数进行比较,这是数学中结构统一美思维的一种体现.

在 $x\to0$ 时,通常取 $\beta(x)$为 x 的幂函数 x^a. 常用的等价无穷小有:

$$\begin{aligned}
&\sin kx\sim kx, && \arcsin kx\sim kx,\ k\neq0;\\
&\tan kx\sim kx, && \arctan kx\sim kx,\ k\neq0;\\
&e^{kx}-1\sim kx, && a^{kx}-1\sim kx\ln a,\ a\neq0,\ a\neq1;\\
&1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2; && \ln(1+kx)\sim kx;\\
&(1+x)^\lambda-1\sim\lambda x; && x+x^{1+\lambda}\sim x,\ \lambda>0.
\end{aligned}$$

其中,在进行无穷小的比较时,必须要求:(1)相比较的两个量 $\alpha(x)$与 $\beta(x)$在自变量的同一变化过程 $x\to x_0$ 中都为无穷小.例如,当 $x\to0$ 时,不能误认为 $e^x\sim1+x$, $(1+x)^\lambda\sim1+\lambda x$. (2)极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$存在,或为$\infty$. 否则两个量不可比较.(3)作为分母的 $\beta(x)$不能等于零.

例 5 当 $x\to0$ 时,试求下列无穷小 $\alpha(x)$关于 x 的无穷小的阶数及其等价无穷小.

(1) $\alpha_1(x)=\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}$; (2) $\alpha_2(x)=\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x}}$.

解 设 k 为正常数,按无穷小的阶的定义,考虑

$$(1)\ \lim_{x\to0}\frac{\alpha_1(x)}{x^k}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^k}\ \frac{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^k} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^k}\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^k},$$

要让该极限等于非零常数 A,必须取 $k=3$,则在 $x\to 0$ 时,无穷小 $\alpha_1(x)$ 是 x 的三阶无穷小,且 $\alpha_1(x)$ 与 $\frac{1}{4}x^3$ 为等价无穷小.

(2) 要使 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha_2(x)}{x^k} = \lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^{2-2k} + \sqrt[3]{x^{1-6k}}}$ 等于非零常数,必须取 $k=\frac{1}{6}$,则在 $x\to 0$ 时,无穷小 $\alpha_2(x)$ 是 x 的 $\frac{1}{6}$ 阶无穷小,且其等价无穷小为 $x^{\frac{1}{6}}$.

4. 极限的四则运算法则

(1) 应用极限的四则运算法则的前提是其各个因子的极限都存在,且其分母的极限不为零,否则便不可以进行四则运算. 注意,当一函数的极限存在时,并不能说明它的各个因子的极限都存在. 也就是说,各个因子的极限都存在只是该函数极限存在的充分条件,而非必要条件. 例如,极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)$ 存在且等于零,并不能认定极限 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 也存在,故不可以把 $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)$ 写为 $\lim\limits_{x\to 0}x\ \lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$,也不可以有 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)\cdot(\lim\limits_{x\to 0}x)^{-1}$.

(2) 这里,以数列为例讨论两数列的通项乘积构成的数列的敛散性.

根据极限的运算法则知,若数列 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$ 都收敛时,则数列 $\{a_nb_n\}$ 必收敛. 而当两数列 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$ 中至少有一个数列为发散时,数列 $\{a_nb_n\}$ 的收敛性却不能肯定,现分析如下:

1° 若数列 $\{a_n\}$ 收敛,且不收敛于零,数列 $\{b_n\}$ 发散,则数列 $\{a_nb_n\}$ 必定发散. 这是因为若 $\{a_nb_n\}$ 收敛,且 $\{a_n\}$ 不收敛于零,则从恒等式 $b_n = \frac{a_nb_n}{a_n}$ 及极限的相除法则即知 $\{b_n\}$ 必收敛,这与条件矛盾.

2° 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = 0$,且 $\{b_n\}$ 发散,则 $\{a_nb_n\}$ 可能收敛,也可能发散.

例如,取 $a_n = \frac{1}{n}$,$b_n = n$ 时,$\{a_n\}$ 收敛,$\{b_n\}$ 发散,则 $a_nb_n = 1$,故 $\{a_nb_n\}$ 收敛;取 $a_n = \frac{1}{n}$,$b_n = (-1)^n n$ 时,$\{a_n\}$ 收敛,$\{b_n\}$ 发散,则 $a_nb_n = (-1)^n$,故 $\{a_nb_n\}$ 发散.

注意,若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = 0$,$\{b_n\}$ 发散但有界,则仍有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n = 0$.

3° 若数列 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$ 都发散,且两者至少有一个是无穷大,则 $\{a_nb_n\}$ 必发散.

这是因为如果 $\{a_nb_n\}$ 收敛,而 $\{a_n\}$ 为无穷大,由恒等式 $b_n = \frac{a_nb_n}{a_n}$ 便得到 $\{b_n\}$ 收敛于零,这与条件矛盾.

4° 若数列 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$ 都不是无穷大且都发散,则数列 $\{a_nb_n\}$ 可能收敛,也可能发散. 例如,取 $a_n = b_n = (-1)^n$ 时,$\{a_n\}$,$\{b_n\}$ 都发散,有 $a_nb_n = 1$,故数列 $\{a_nb_n\}$ 收敛;取 $a_n = (-1)^n$,$b_n = 1-(-1)^n$ 时,$\{a_n\}$,$\{b_n\}$ 都发散,有 $a_nb_n = (-1)^n - 1$,故数列 $\{a_nb_n\}$ 发散.

例 6 若两数列 $\{x_n\}$,$\{y_n\}$ 的通项乘积的数列 $\{x_ny_n\}$ 的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n = 0$,试讨论数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 之间在 $n\to\infty$ 时的下述关系是否成立:

(A) 若 $\{x_n\}$ 为无穷小,则 $\{y_n\}$ 有界;　　(B) 若 $\{x_n\}$ 有界,则 $\{y_n\}$ 必为无穷小;

(C) 若 $\{x_n\}$ 无界,则 $\{y_n\}$ 必有界;　　(D) 若 $\{x_n\}$ 为无穷大,则 $\{y_n\}$ 必为无穷小.

解 注意到有界量与无穷小量是它们的乘积为无穷小的充分条件而非必要条件便知,结论(A)与(B)为假. 按由特殊否定一般的思想举一反例为:设

$$\{x_n\}: 0,\ 1,\ 0,\ \frac{1}{2},\ \cdots,\ 0,\ \frac{1}{n},\ \cdots;\ \{y_n\}: 1,\ 0,\ 2,\ 0,\ \cdots,\ n,\ 0,\ \cdots.$$

显然 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n = 0$,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = 0$,但 $\{y_n\}$ 却为无界;又 $\{x_n\}$ 有界,但 $\{y_n\}$ 不是无穷小.

结论(C)的反例为:

$$\{x_n\}: 0,\ 1,\ 0,\ 2,\ \cdots,\ 0,\ n,\ \cdots;\ \{y_n\}: 1,\ 0,\ 2,\ 0,\ \cdots,\ n,\ 0,\ \cdots.$$

显然，$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，$\{x_n\}$无界，但$\{y_n\}$也无界，故结论(C)为假.

若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$，则有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n^{-1}=0$，且有 $y_n=(x_ny_n)x_n^{-1}$，
于是，由极限的四则运算法则即知 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，故结论(D)为真.

5. 复合函数的极限

考虑复合函数的极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]$. 若$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，且当 $x\neq x_0$ 时 $\varphi(x)\neq u_0$，令 $u=\varphi(x)$，则

1° 当 $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)$ 存在且为 A 时，必有 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$.

2° 当 $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=\infty$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=\infty$.

3° 当 $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)$ 不存在时，不要误认为极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]$ 也不存在. 事实上，$\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]$ 有可能存在. 例如，设 $f(u)=e^{-\frac{1}{u}}$，则它的极限$\lim\limits_{u\to 0}f(u)$ 是不存在的. 若取 $u=\varphi(x)=x^2>0$，则有$\lim\limits_{x\to 0}u=0$. 此时却有 $\lim\limits_{x\to 0}f[\varphi(x)]=\lim\limits_{x\to 0}e^{-x^{-2}}=0$.

1.1.3 函数、数列、子数列之间的关系

本节从函数、数列、子数列的关系来讨论数列与函数的收敛、发散、无界、不是无穷大等性质.

1. 一般性分析

数列与其子数列、函数与其数列的关系，其实就是一种一般性与特殊性、整体与局部的关系.

依据"一般性概括了特殊性"的思想，人们在判定某一命题为真时，要给以严格的数学证明；而判断某一命题为假时，只要举出一个反例即可. 后者是利用由特殊否定一般的思想，它在数学的发展过程中曾发挥过许多重要的作用. 人们经常使用的反证法的思想也正是利用关系"若命题 P 在特殊情况下为假，则它在一般情况下也为假"的否定作用，因为用反证法证明"若 A，则 B"的结论就是证明"既 A，且非 B"的结论为假的.

数列相对于其子数列是一般的，子数列相对于其原来数列来说是特殊的，因此，一命题对某一子数列不真时，该命题对于其原来数列来说也是不真的. 根据这种思维，利用数列与其子数列的收敛性就可以给出判断原数列是发散的，是无界的，不是无穷大的等方法.

2. 数列$\{u_n\}$的敛散性判断

许多教材中已证明了数列与其子数列的下述重要命题：

数列$\{u_n\}$收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A(A\neq\infty)$ 的充分必要条件是$\{u_n\}$的任何一个子数列$\{u_{n_k}\}$都收敛，且有相同的极限 A.

注意，如果仅仅是$\{u_n\}$的某个子数列收敛，则并不能保证原数列$\{u_n\}$一定收敛. 例如，数列$\{(-1)^n\}$.

按照逆向思维可知："$\{u_n\}$的任何一个子数列都收敛，且有相同的极限 A"的否定形式是"$\{u_n\}$的某一个子数列发散"或者"$\{u_n\}$的某两个子数列都收敛，但它们的极限值不相等". 于是，作为上述命题中必要条件的逆否结果正是数列$\{u_n\}$发散的判别准则.

证明数列$\{u_n\}$发散，即它的极限$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 不存在的常用方法是：

1° 找出数列$\{u_n\}$的一个发散子数列.

例如，数列$\{u_n\}$，$u_n=2^{(-1)^n n}$ 的子数列$\{u_{2k}\}$，$u_{2k}=2^{2k}$，当 $k\to\infty$时 $u_{2k}\to\infty$，即子数列$\{u_{2k}\}$发散，故原数列$\{u_n\}$发散.

易知，若证明了$\{u_n\}$是无界，也就表明它有一发散子数列，则即证得$\{u_n\}$发散.

2° 找出数列$\{u_n\}$的两个收敛的子数列，但它们有不同的极限值.

例如，数列$\{u_n\}$，$u_n=\sin\frac{n\pi}{4}$ 中有两个子数列$\{u_{4k}\}$和$\{u_{8k+2}\}$的极限值不相等，即

$$\lim_{k\to\infty}u_{4k}=\lim_{k\to\infty}\sin k\pi=0,\quad \lim_{k\to\infty}u_{8k+2}=\lim_{k\to\infty}\sin\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi=1,$$

故原数列$\left\{\sin\frac{n\pi}{4}\right\}$发散.

显然,当数列$\{u_n\}$有界且发散时,它必有两个不同极限的收敛子数列.

3. 无界量与无穷大量

注意,无界量与无穷大量是两个不同的概念,请不要混淆.如果数列$\{u_n\}$无界,则它未必一定有$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=+\infty$;如果数列$\{u_n\}$是无穷大,则它必定无界.

(1) 数列与其子数列关系中还有一条重要的性质:

数列$\{u_n\}$无界的充分必要条件是它存在一子数列是无穷大.

这条性质的充分性就是判断数列$\{u_n\}$是无界的常用方法:

若找到$\{u_n\}$的一个无穷大子数列$\{u_{n_k}\}$,$\lim\limits_{k\to\infty}|u_{n_k}|=+\infty$,则数列$\{u_n\}$就是无界的.

反之,若数列$\{u_n\}$有界,则它必有其收敛的子数列.

(2) 判断数列$\{u_n\}$不是无穷大的常用方法是,找出该数列的一个收敛的子数列.

例如,数列$\{u_n\}$,$u_n=n^{(-1)^n}$的子数列$\{u_{2k-1}\}$有$\lim\limits_{k\to\infty}u_{2k-1}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{2k-1}=0$,则该数列$\{u_n\}$不是无穷大;而其子数列$\{u_{2k}\}$有$\lim\limits_{k\to\infty}u_{2k}=\lim\limits_{k\to\infty}2k=\infty$,则该数列$\{u_n\}$无界.

总之,按极限性质可知:若数列$\{u_n\}$为无穷大,则它的任何子数列都是无穷大;或者说,若数列$\{u_n\}$不是无穷大,则它存在收敛的子数列.所以如果数列$\{u_n\}$的某个子数列收敛,那么该数列$\{u_n\}$就不是无穷大.

证明数列$\{u_n\}$不是无穷大的另一种方法是反证法:反设$\{u_n\}$为无穷大,使其与题设条件矛盾而获得证明.

4. 函数与其数列

阐述函数极限与数列极限关系的海涅定理是大家所熟知的,该定理中的函数相对于其数列是一般的,数列相对于其函数是特殊的,如$x\to x_0$,$x\neq x_0$,与$x_n\to x_0$,$x_n\neq x_0$;$f(x)$与$f(x_n)$;$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$与$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$之间等都得遵循一般性与其特殊性的哲学原理.

海涅定理必要条件的否定可以判断某些函数极限的不存在,这是由特殊否定一般的思想的应用.按照类比思维,类似于数列与其子数列的有关结果,下面指出数列极限在讨论函数极限时的应用:

1° 证明函数极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在的常用方法是:找出一个数列$\{x_n\}$,$x_n\to x_0$,$x_n\neq x_0$,使$\{f(x_n)\}$为无穷大数列;或者找出两个收敛于$x_0$又不等于$x_0$的数列$\{x_n\}$,$\{y_n\}$,使数列$\{f(x_n)\}$与$\{f(y_n)\}$有不同的极限.

2° 证明函数$f(x)$在区间I上无界的常用方法是:找出数列$\{x_n\}$,$x_n\in I$,而$\{f(x_n)\}$为无穷大数列.

3° 证明$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq\infty$的常用方法是:找出一个数列$\{x_n\}$,$x_n\to x_0$,$x_n\neq x_0$,而数列$\{f(x_n)\}$收敛.

证明函数$f(x)$在$x\to x_0$时不是无穷大的另一种方法是反证法.

例 7 设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq\infty$,试判断下列结论的真假:

(1) 若$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$,则必有$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=0$;

(2) 若$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\neq 0$,则必有$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)\neq 0$;

(3) 若在$x=x_0$的某邻域内$g(x)$无界,则必有$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=\infty$;

(4) 若在$x=x_0$的某邻域内$g(x)$有界,则必有$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)\neq\infty$.

解 (1) 取函数$f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$,则在$x\to 0$时$f(x)$不为无穷大,$\lim\limits_{x\to 0}f(x)\neq\infty$.这里因为取$x_n=\frac{1}{n\pi}$,有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n\pi}=0$,$x_n\neq 0$,而$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}n\pi\sin n\pi=0$,即函数$f(x)$中有一收敛的数列