新青年教师文库

仁者无敌面积法

RENZHEWUDI MIANJIFA

彭翕成　张景中　著

上海教育出版社

新青年教师文库

仁者无敌面积法

彭翕成　张景中　著

上海教育出版社

图书在版编目(CIP)数据
仁者无敌面积法 / 彭翕成,张景中著. —上海:
上海教育出版社,2011.5
(新青年教师文库)
ISBN 978-7-5444-3257-3

Ⅰ. ①仁… Ⅱ. ①彭… ②张… Ⅲ. ①中学数学课—教学研究
Ⅳ. ①G633.602

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第099993号

责任编辑 刘祖希
封面设计 一步设计

仁者无敌面积法
彭翕成 张景中 著

出版发行 上海世纪出版股份有限公司
上 海 教 育 出 版 社
易文网 www.ewen.cc
地 址 上海永福路 123 号
邮 编 200031
经 销 各地新华书店
印 刷 江苏启东人民印刷有限公司
开 本 700×1000 1/16 印张 14 插页 1
版 次 2011 年 6 月第 1 版
印 次 2011 年 6 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5444-3257-3/O·0141
定 价 28.00 元

序

——情有独钟面积法

我对面积法,有着很深厚的感情.因为面积法伴随了我30多年的科研和科普工作.说是情有独钟,一点都不为过.

20世纪70年代,我在给中学生讲课的时候,以及后来做竞赛题,发现面积法都非常有用.当时曾寻找过面积法的资料,只有零零散散的一些,系统的论述,没有找到.

20世纪80年代初,上海教育出版社的同志向我约稿.我就把那几年关于面积法的一些想法,写成一本小册子《面积关系帮你解题》.这本小册子多次印刷,流传甚广.

现在回过头来看,当初的一些想法还不太完善,有些解题走了弯路.但不管怎么说,从那本书开始,几乎以后的每本科普书里,我都会涉及面积法.

1986年,在著名数学家吴文俊先生的影响下,我开始从事数学机械化领域的研究.我把面积法这一古老的解题方法与当时最前沿的科学研究联系起来,竟然有了意外的收获,创建了可构造等式型几何可读证明自动生成的理论和方法,并在计算机上实现了.对于我来说,实属侥幸;同时,也更坚信面积法的威力.

现在,几乎所有的平面几何资料都把面积法作为基本解题方法来介绍.如果这和作者做的普及工作有关,是让我感到欣慰的.但在中小学教科书中,还很少看到面积法的踪影.我总认为面积法的作用还可以发挥更大一些.

我的助手彭翕成,平时喜欢用《超级画板》作研究,得到不少结论.他发现相当部分几何问题是可以用面积方法解决的.有些他认为难度较大,或是觉得不大可能用面积法解决的问题,在我的帮助下,也得到了较为简洁的证法.就这样,久而久之积累了不少面积法解题的案例.小彭勤快地整理成文,在一些普及性的杂志

上发表了.本书就是这些文章的整理、综合、系统化.

而我自己,近年来对面积法的研究,更着重于“下放三角”,即利用单位菱形面积定义正弦,来展开初等数学体系.有兴趣的读者可以看看我的新书《一线串通的初等数学》.在那里,你会看到面积法已经不仅仅是解题的利器,而且还是建立初等数学体系的中央枢纽.

本书书名《仁者无敌面积法》,是小彭的想法,很有些意思.但愿面积法这种古老的方法能够焕发出更加灿烂的光芒.

本书题目很多,收集、整理、排列,花费了不少工夫,但难免有错漏之处,欢迎来信批评指正.通常在3个工作日内,您可以得到回复.

张景中:zjz101@yahoo.com.cn　　彭翕成:pxc417@126.com

张景中

2010年5月1日

前　言

——《仁者无敌面积法》释题

《论语》有云：智者乐水，仁者乐山．智者动，仁者静；智者乐，仁者寿．

仁者心境平静，豁达开朗，宽容仁厚，能从山水之中找到自己的欢乐，坦然面对人生，自然长寿！

梁惠王曾向孟子请教治国之道．孟子回答：勇者无惧，智者无惑，诚者有信，仁者无敌！仁者无敌，是指有仁爱之心的人无敌于天下．

在今天，仁者无敌已经是一个意思相当稳定的成语．

本书书名则另有解释．仁者寿，与世无争；面积法历史悠久，用仁者为喻比较形象．长期以来，面积法没有受到足够的重视，直到数学机械化的研究工作深入之后，我们才发现古老的面积法能够形成解题的算法，并且所得的机器证明是可读的，结束了几何证题无定法的局面．因此说仁者无敌面积法，有其道理．

金庸先生在《倚天屠龙记》中写道：

便在这万籁俱寂的一刹那间，张无忌突然间记起了九阳真经中的几句话："他强由他强，清风拂山冈．他横任他横，明月照大江．"他在幽谷中诵读这几句经文之时，始终不明其中之理，这时候猛地里想起，以灭绝师太之强横狠恶，自己决非其敌，照着九阳真经中要义，似乎不论敌人如何强猛、如何凶恶，尽可当他是清风拂山，明月映江，虽能加于我身，却不能有丝毫损伤．然则如何方能不损我身？经文下面说道："他自狠来他自恶，我自一口真气足．"

面积消点法亦然已达此种境界．不管题目如何复杂，如何来的，就如何去！

Contents | 目 录

第1章

面积法与勾股定理

1.1 面积法的起源

利用面积关系来说明数学中的某些恒等式、不等式，或证明某些定理，这是一个古老而又年轻的方法.

说它古老，是因为早在三千多年前，在几何学还没形成一门系统学科时，人们已经会用这种方法来解决某些问题了.

说它年轻，是因为直到今天，人们并没有给它足够的重视，这种方法的潜力远没有得到发挥. 它广泛的、五花八门的用途，虽然已经逐步被各种竞赛教材所吸收，但还很少在教科书、教学参考书和各种学生读物中得到系统的阐述.

几何学的产生，源于人们对土地面积测量的需要. 翻开任何一本关于数学史的通俗读物，差不多都记载着这样的故事：在古埃及，尼罗河每年定期泛滥. 洪水带来了尼罗河肥沃的淤积泥土，这为人们在干旱的沙漠地区种植农作物提供了很好的条件. 随之也带来了一个问题，洪水在带来肥沃土壤的同时，也抹掉了田地之间的界限标志. 洪水消退后，人们要重新画出田地的界限，这就必须丈量和计算田地的面积. 年复一年，这就积累了最基本的几何知识.

这样看来，从一开始，几何学就和面积结下不解之缘. “几何”的英文是“Geometry”，这个单词的字头“Geo-”，便含有土地的意思.

利用面积关系证明几何定理，最早的例子是勾股定理的证明. 勾股定理是几何学中的一颗璀璨明珠，历史悠久，证法繁多. 千百年来人们对它的探讨从未停止过，不断提出新的证法，其中既有著名的数学家，也有业余的数学爱好者；既有普通的老百姓，也有尊贵的政要权贵，甚至有国家总统.

图 1－1 和图 1－2 都是勾股定理的经典证明. 图 1－1 取自赵爽（三国时代人，生活于公元 3 世纪）注《周髀算经》（1213 年宋版），该证法一般被称为赵爽弦图证法；图 1－2 取自徐光启、利玛窦合译的《几何原本》，该证法一般被称为欧几里得证法.

图 1－1


图 1－2

2002 年 8 月 20 日至 28 日，世界数学家大会在北京召开，大会所使用的会标(图 1-3)就是根据赵爽弦图设计的.

勾股定理相当重要，被称为是几何学的基石. 经过不断探索研究，据说到现在，勾股定理已经有 400 多种证法了，勾股定理无疑成为数学中证法最多的定理.

勾股定理被发现之后，数学家们除了不断寻找新证法，也在寻找应用.

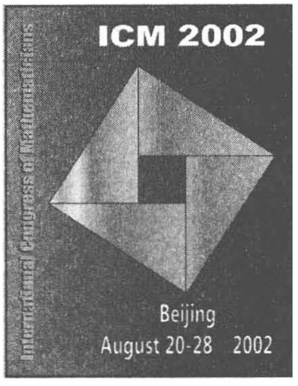

图 1-3

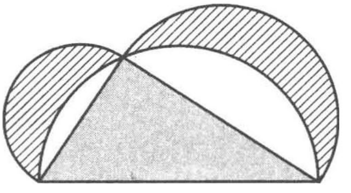

图 1-4

勾股定理的一个直接应用就是古希腊几何学家希波克拉底发现的月牙定理. 如图 1-4，直角三角形的面积等于两个月牙面积之和.

就是这么一个简单的图形，掀起了很大的风波，误导了很多数学爱好者.

月牙形是曲线形，直角三角形是直线形，直线和曲线是如此的不同，因此很容易使人产生错觉，似乎直线形的面积是不可能等于曲线形的面积的. 然而正是希波克拉底的这个月牙图形，证明了直线形的面积是完全可能等于曲线形的面积的. 这在当时，数学发展的初期，对开阔大家的眼界，有着极大的意义. 同时，月牙图形的出现也让很多数学研究者，包括希波克拉底本人在内，陷入了一个死胡同——他们"坚信"化圆为方问题是可以实现的. 其实，希波克拉底只是解决了化月牙形为方这一特殊情况，而该方法很难推广解决直线形和曲线形等面积转化的一般情况.

古代数学，不管是东方还是西方，都擅长用几何图形来说明问题. 这可看作是无字证明(without words proof)的源头. 很大程度上，这是由于当时代数研究不系统，缺乏方便使用的符号工具造成的. 图 1-5 是月牙定理的图形证明，多个图形连在一起，生动再现了面积转化的过程，十分直观. 如果利用现代信息技术，譬如用超级画板做成动画形式，或以 gif 格式的动态图片展示，则更有趣了.

有关面积割补的证明大多可以用图形证明来表示. 图 1-6 和图 1-7 是将多幅图形连在一起，构成勾股定理的动画证明，这两种证明多次用到了等底等高的平行四边形面积相等.

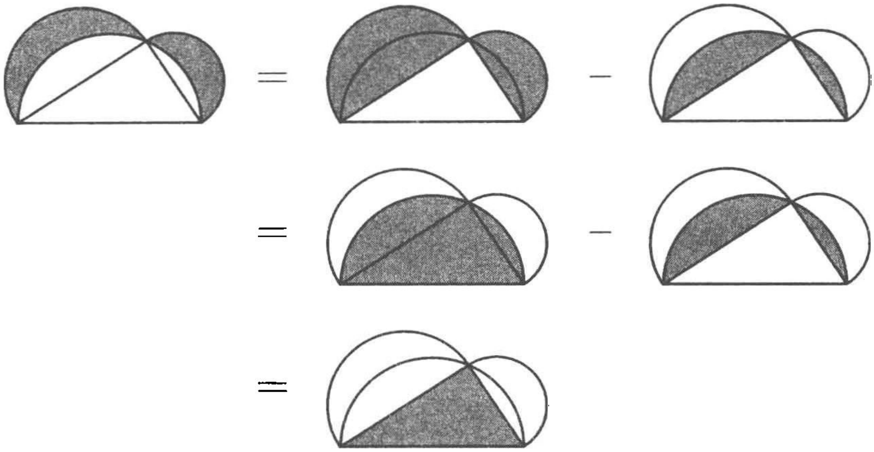

图 1－5

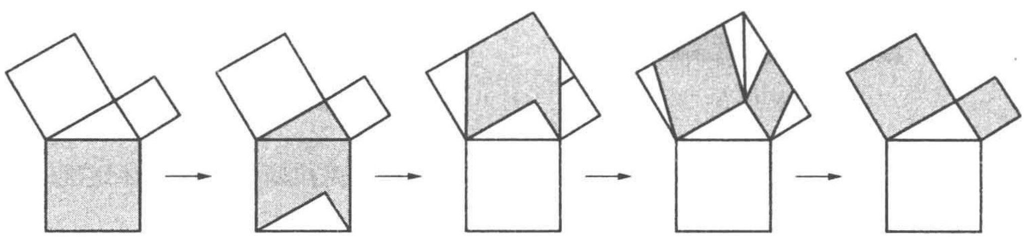

图 1－6

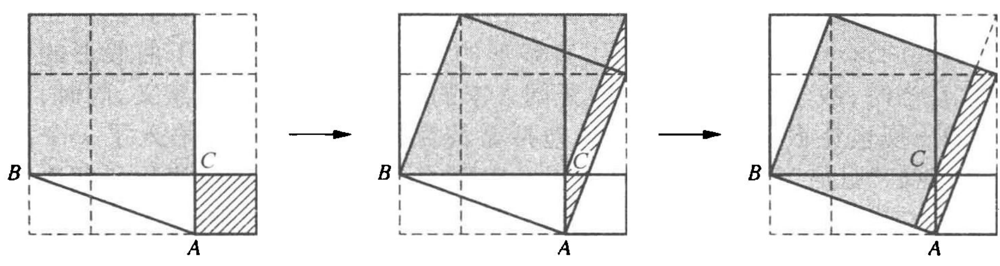

图 1－7

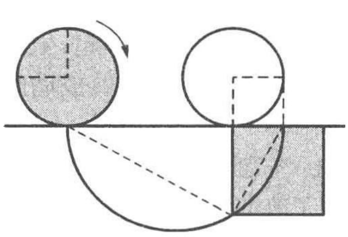

图 1－8

而化圆为方问题实质上等价于用直尺圆规作出线段 π 的问题. 1882 年,法国数学家林德曼证明了 π 是超越数,而尺规作图所能完成的线段是代数数,所以化圆为方问题是尺规作图所不能完成的.

假若不受尺规作图的限制,化圆为方问题并非难事. 如图 1－8,将一个半径为 R 的圆滚动半圈,得到的正方形的面积与圆的面积相等. 设正方形的边长为 a,

根据射影定理可得

$$a^2 = \pi R \cdot R = \pi R^2.$$

勾股定理的证明方法很多,但多数来之不易,可谓是古今中外数学爱好者集体智慧的结晶.很多的巧证,都是冥思苦想而成.本书中,我们会给出两种批量生成勾股定理证明的方法,一种是拿两个三角形拼摆,另一种则需借助计算机(见附录),所得证法之多,让人惊讶.

1.2 勾股定理的拼摆证明

下面讨论勾股定理的拼摆证明.

如图1-9,以Rt$\triangle ABC$的三边为边长向外作三个正方形,其中$\angle ACB = 90^\circ$,$AB = c$, $AC = b$, $BC = a$,作$CN \perp IH$,CN交AB于点K.据说欧几里得就是利用此图形证明勾股定理的.易证$\triangle EAB$[①]$\cong \triangle CAH$(可将$\triangle CAH$看作是$\triangle EAB$旋转而成),进而可得$S_{正方形ACDE} = S_{矩形AHNK}$,同理可得$S_{正方形BFGC} = S_{矩形KNIB}$,所以

$$S_{正方形AHIB} = S_{正方形ACDE} + S_{正方形BFGC},$$
$$c^2 = b^2 + a^2.$$

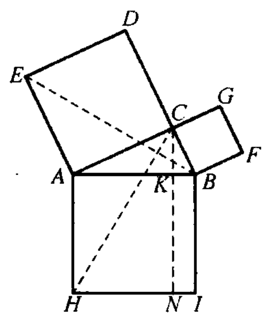

图1-9

此处还有一个副产品:由$S_{正方形ACDE} = S_{矩形AHNK}$,得$AC^2 = AK \cdot AB$,无需用到相似,轻松可得射影定理.

假若$\triangle ABC$不是直角三角形呢?如图1-10,$\triangle ABC$的三条高的延长线将三个正方形分为6个矩形,而且面积两两相等,则

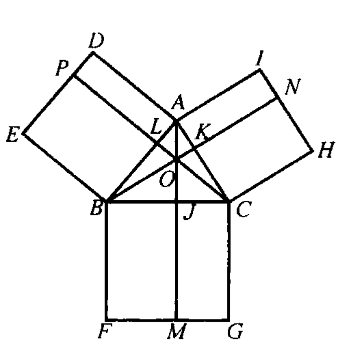

图1-10

$$S_{矩形BFMJ} = S_{矩形BLPE} = ac\cos B,$$
$$S_{矩形MGCJ} = S_{矩形CHNK} = ab\cos C,$$
$$S_{矩形KNIA} = S_{矩形LADP} = bc\cos A,$$

则

$$b^2 + c^2 = 2bc\cos A + ac\cos B + ab\cos C$$
$$= 2bc\cos A + a^2,$$

轻松可得余弦定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

① 为简洁起见,本书中类似联结EB之类的辅助线不特别指明.

若将图 1－10 加以变化，深入探究，还会有新的收获.

如图 1－11，从点 D 出发向斜边 AB 作垂线段 DK. 显然可以从图 1－11 中抽取出图 1－12，由作图可知 $DK \perp AB$，易证 $\triangle ABC \cong \triangle DLC$，从而 $BC = LC$，$AB = DL$. 由面积关系

$$S_{\triangle BCL} + S_{\triangle ACD} = S_{\text{四边形}ALBD},$$

得

$$\frac{1}{2}BC \cdot LC + \frac{1}{2}AC \cdot DC = \frac{1}{2}AB \cdot DL,$$

$$\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 = \frac{1}{2}c^2, \text{即 } a^2 + b^2 = c^2.$$

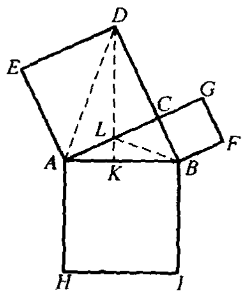

图 1－11

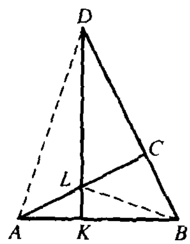

图 1－12

这一证明应该引起我们的重视和反思. 勾股定理研究的是直角三角形三边之间的关系，这一关系与直角三角形的三边上是否存在正方形无关，长期以来我们总是不自觉地由数的方(平方)联想到形的方(正方形). 去掉正方形，从图 1－11 中抽取出图 1－12，图形显得简洁多了，可看作是将$\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转90°得到$\triangle DLC$.

如果我们用动态的眼光看图 1－12，那么会得到更多的勾股定理证明.

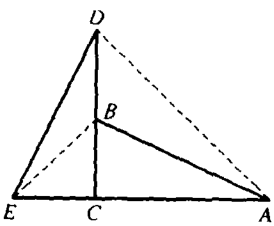

图 1－13

考虑到看图的习惯，首先将图 1－12 转变成图 1－13 的形式，其本质是一样的. 如图 1－13，将 Rt$\triangle ABC$ 绕点 C 逆时针旋转90° 得到 Rt$\triangle DEC$，由

$$S_{\triangle ECB} + S_{\triangle ACD} = S_{\text{四边形}BEAD},$$

得

$$\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 = \frac{1}{2}c^2, \text{即 } a^2 + b^2 = c^2.$$

将图 1－13 中的 Rt$\triangle CDE$ 按$\overrightarrow{EC}$平移，得到图 1－14，由

$$S_{\triangle CDB} + S_{\triangle CAD} = S_{\text{四边形}CADB},$$

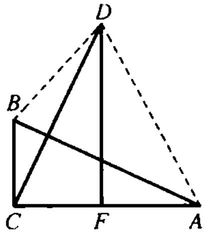

图 1-14

得

$$\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2=\frac{1}{2}c^2\text{，即 }a^2+b^2=c^2.$$

将图 1-14 中的 Rt$\triangle CDF$ 再平移一点，得到图 1-15，由

$$S_{\triangle EFB}+S_{\text{四边形}FADB}=S_{\text{四边形}EADB}，$$

得

$$a^2+b^2=c^2.$$

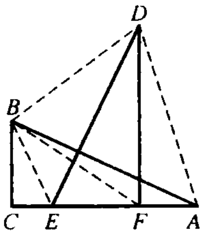

图 1-15

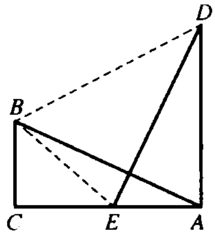

图 1-16

将图 1-13 中的 Rt$\triangle CDE$ 按$\overrightarrow{CA}$平移，得到图 1-16，由

$$S_{\triangle ABE}+S_{\triangle ABD}=S_{\text{四边形}ADBE}，$$

得

$$a^2+b^2=c^2.$$

将图 1-13 中的 Rt$\triangle CDE$ 按$\overrightarrow{EA}$平移，得到图 1-17. 图 1-17 就是通常所说的总统证法，也可看作是赵爽弦图证法的取半.

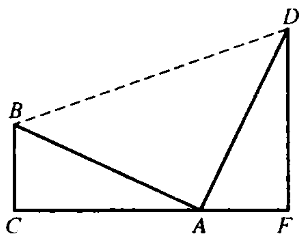

图 1-17

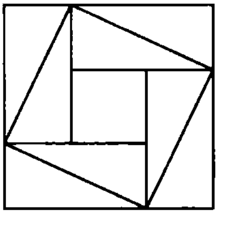
图 1-18

图 1-18 是赵爽弦图，此图其实包含了勾股定理的两种证法. 把图 1-18 中外部的正方形去掉得到图 1-19. 对于图 1-19，常规的证明是

$$AB^2=4\cdot\frac{1}{2}AF\cdot BF+(AF-BF)^2,$$

化简,得

$$AB^2=AF^2+BF^2.$$

从另一个角度来看,因为

$$S_{\triangle CDG}+S_{\triangle ABG}=\frac{1}{2}S_{正方形ABCD},$$

所以

$$\frac{1}{2}CH\cdot DG+\frac{1}{2}AG\cdot BF=\frac{1}{2}AB^2,$$

即

$$AB^2=AF^2+BF^2.$$

这一证明的好处就是无需用到平方和公式,小学生都能接受.

对于图 1-19,我们还可以这样分析.

$$\begin{aligned}S_{\triangle ABD}&=S_{\triangle ADG}+S_{\triangle BDG}+S_{\triangle ABG}\\&=S_{\triangle ADG}+S_{\triangle FDG}+S_{\triangle ABG}\\&=S_{\triangle ADF}+S_{\triangle ABG},\end{aligned}$$

即

$$\frac{1}{2}AB^2=\frac{1}{2}AF\cdot DG+\frac{1}{2}AG\cdot BF,$$

即

$$AB^2=AF^2+BF^2.$$

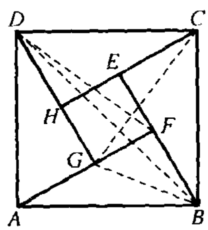

图 1-19

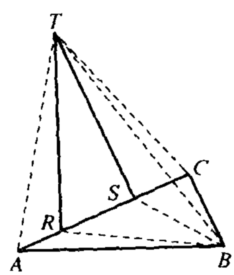

图 1-20

将图 1-19 中的 Rt$\triangle AGD$ 平移一点,得到图 1-20,由

$$\begin{aligned}S_{\triangle TAC}+S_{\triangle BRS}&=S_{\triangle TAS}+S_{\triangle TSC}+S_{\triangle BRS}\\&=S_{四边形TARB},\end{aligned}$$

得

$$a^2+b^2=c^2.$$

将图 1-20 中的 Rt$\triangle RST$ 再平移一点，使得点 S 与点 C 重合，得到图 1-13. 这就说明欧几里得证法和赵爽弦图证法本质上都可以看作是两个直角三角形拼摆而成，东西方两种经典的证明由此联系，合为一体.

这说明，证明勾股定理并不需要花心思构造太复杂的图形. 拿两个完全一样的直角三角形拼摆，再根据面积关系就能简单证明了，而且证法是多种多样的.

直角三角形的三边符合勾股定理，这本是一个天然的性质，却需要另外一个"自我"才能证明. 就好像有人寄东西给你，当你去邮局取时，自己却不能证明自己的身份，此时身份证就成了你的另一个"自我".

下面再给出勾股定理的两种拼摆证法.

如图 1-21，由 $S_{\triangle ABB'}+S_{\triangle BCB'}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACB'}$

得

$$\frac{1}{2}c^2+\frac{1}{2}a(b-a)=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}b^2,$$

所以

$$a^2+b^2=c^2.$$

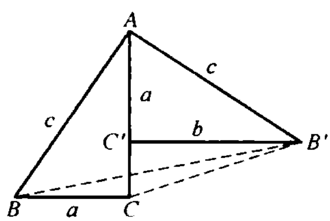

图 1-21

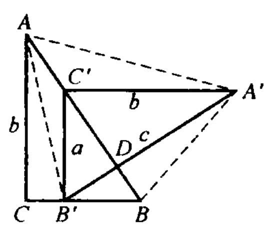

图 1-22

如图 1-22，作 $C'B'\perp CB$，则

$$BB'=\frac{a^2}{b}, A'D=\frac{b^2}{c},$$

由

$$S_{\text{四边形}AB'BA'}=S_{\triangle AB'B}+S_{\triangle ABA'},$$

得

$$\frac{1}{2}c^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{b}b+\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2}{c}c,$$

所以

$$a^2+b^2=c^2.$$