21世纪经管类创新教材

微积分
习题精解

熊章绪　主编

上册

科学出版社

21世纪经管类创新教材

微积分习题精解

（上册）

熊章绪　主编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是与熊章绪主编的《微积分教程》(上册)相配套的参考书. 本书按教材的章节顺序分为6章,包括函数、极限与连续、一元微积分的概念、一元函数微分法、一元函数积分法、一元微积分的应用. 本书对教材中的全部习题给出了详细分析和精心解答,通过解题示范,揭示解题规律,使读者对于如何着手解题,如何思考有所启发. 本书对培养和提高学生的学习兴趣以及增强学生学好微积分这门课程的信心有较大的作用.

本书可作为高等学校经济管理类各专业微积分课程的教学参考书和学生的学习用书,也可供报考研究生的读者参考.

图书在版编目(CIP)数据

微积分习题精解. 上册/熊章绪主编. —北京：科学出版社,2011. 9

21世纪经管类创新教材

ISBN 978-7-03-032153-4

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①熊… Ⅲ. ①微积分—高等学校—题解 Ⅳ. O172-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第170293号

责任编辑：曾 莉 / 责任校对：董艳辉

责任印制：彭 超 / 封面设计：苏 波

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市新华印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011年9月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2011年9月第一次印刷 印张：15 3/4

印数：1—5 000 字数：307 000

定价：28.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

熊章绪主编的《微积分教程》(上册)习题分为三个部分,包括每节后的习题(A)、习题(B)和每章后的总习题. 习题(A)多为基础题,习题(B)多为提高题,总习题则是综合性习题,题量大,有坡度,能满足不同层次读者的需求.

本书是与《微积分教程》(上册)配套的参考书,它对教材中的全部习题给出了精心的解析,旨在帮助读者掌握一元微积分的基本内容和解题方法,提高学习兴趣以及分析问题和解决问题的能力. 值得一提的是,解题能力的提高需要动脑加动手,需要自身的实践和不断地积累经验. 因此,我们希望读者拿到题目,要先行思考,自己解题,然后与题解进行对照,这样,对提高学习效率是有益的.

本书可作为高等学校经济管理类各专业教师的教学用书和学生学习微积分课程的参考书,也可供报考研究生的读者参考.

本书由熊章绪主编,曾艳妮任副主编. 陶前功、曾艳妮、谢承义、陈兰、赵琼参加各章的编写,曾艳妮对全部习题进行了核查. 另外,易风华、邢婧等参加了部分编校工作. 最后由陶前功统稿、定稿.

本书不足之处,诚恳期望同行和读者批评指正.

编 者

2001 年 7 月

目　录

第1章 函数

习题 1.1

(A)

用区间表示满足下列不等式的所有 x 的集合,并在数轴上表示出来.

(1) $|x|<5$;　　(2) $|x-4|<1$;

(3) $0<|x+1|<2$;　　(4) $|x|\geqslant 5$;

(5) $|x-3|\geqslant 1$;　　(6) $|x+a|<\delta$ (a 为常数,$\delta>0$).

(B)

用区间表示满足下列不等式的所有 x 的集合.

(1) $2<|x-2|<5$;　(2) $1<|x+3|<5$;　(3) $1<|x-a|<\delta\ (\delta>1)$.

习题 1.2

(A)

1. 若 $g(x)=\begin{cases}2^x, & -1<x<0,\\ 2, & 0\leqslant x<1,\\ x-1, & 1<x\leqslant 3,\end{cases}$ 求 $g(3)$, $g(2)$, $g(0)$.

2. 若 $f(x)=x^2-2x+3$, 求 $f(-x)$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

3. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{4-x^2}$;　　(2) $y=\dfrac{1}{4-x^2}+\sqrt{x+2}$;

(3) $y=\lg(\log_2 3x)$;　　(4) $y=\sqrt{\ln\left(\dfrac{4x-x^2}{3}\right)}$.

4. 下列各题中的函数是否相同? 为什么?

(1) $f(x)=\dfrac{x}{x}$, $\varphi(x)=1$;　　(2) $f(x)=x\sqrt{x^2-1}$, $\varphi(x)=\sqrt{x^4-x^2}$;

(3) $f(x)=|x|$, $\varphi(x)=\sqrt{x^2}$;　　(4) $f(x)=\cos x$, $\varphi(x)=\sqrt{1-\sin^2 x}$.

(B)

1. 已知 $f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=\cos x+1$，求 $f\left(\cos\frac{x}{2}\right)$.

2. $f(x-1)=x^2+1$，求 $f(x+1)$.

3. 已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\phi(x)]=1-x$，且 $\phi(x)\geqslant 0$，求 $\phi(x)$.

4. 已知 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\geqslant 0,\\ x^3, & x<0,\end{cases}$ 求 $f(-x)$.

习　题　1.3

(A)

1. 判别下列函数的有界性.

(1) $y=\frac{1}{\ln x}$, $x\in(0,1)$;　　(2) $y=\frac{1}{x^2}$, $x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$;

(3) $y=a^x$ $(a>1)$, $x\in(-\infty,+\infty)$;　(4) $y=\frac{2x}{1+x^2}$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

2. 判断下列函数的单调性.

(1) $y=\frac{x}{x-1}$;　　(2) $y=x+\ln x$.

3. 下列函数中哪些是奇函数,哪些是偶函数,哪些既非奇函数又非偶函数?

(1) $y=x^2(1-x^2)$;　　(2) $y=\sin x-\cos x$;

(3) $y=\ln\frac{1+x}{1-x}$;　　(4) $y=x(x-1)(x+1)$.

4. 下列函数中哪些是周期函数? 对于周期函数,指出其周期.

(1) $y=\cos(3x-1)$;　　(2) $y=\tan 4x$;

(3) $y=1+\sin 2x$;　　(4) $y=\sin^2 x$.

(B)

1. 证明：两个偶函数之积是偶函数,两个奇函数之积是偶函数,一个奇函数与一个偶函数之积是奇函数.

2. 设 $f(x)$是定义在对称区间$(-l, l)$上的任意函数,证明：$\varphi(x)=f(x)+f(-x)$ 是偶函数,$\psi(x)=f(x)-f(-x)$ 是奇函数,并写出下列函数所对应的$\varphi(x)$和 $\psi(x)$.

(1) $f(x)=a^x$ $(a>0)$;　　(2) $f(x)=(1+x)^n$.

3. 利用第 2 题结论证明：定义在区间$(-l, l)$上的任意函数可以表示为一个

偶函数与一个奇函数的和.

4. 证明:(1) 两个单调增加(减少)的函数之和是单调增加(减少)的;

(2) 两个单调增加(减少)的正值函数之积是单调增加(减少)的.

习 题 1.4

(A)

1. 求下列函数的反函数.

(1) $y=\dfrac{x+2}{x-2}$;　(2) $y=1+\lg(x+2)$;

(3) $y=x^2-2x\ (x>1)$;　(4) $y=10^x+2$;

(5) $y=\sqrt[3]{x-2}$;　(6) $y=e^{x+1}$.

2. 将 y 表示为 x 的复合函数.

(1) $y=\sin u,\ u=1+\sqrt{v},\ v=x^2+2$;

(2) $y=\arctan u,\ u=\ln v,\ v=\sin x$.

3. 指出下列函数是由哪些简单函数复合成的.

(1) $y=\sin(1-3x^2)$;　(2) $y=5^{\sin^2 x}$;

(3) $y=3\sqrt{\log_5\sqrt[4]{1-x}}$;　(4) $y=2^{\ln\sin x}$.

(B)

1. 已知函数 $f(x-1)=x^2+1$,求 $f(x)$.

2. 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$,且 $x\neq 0$, $x\neq 1$,求 $f[f(x)]$.

3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & x>1,\end{cases}$ 求 $f[f(x)]$.

4. 设 $f(x)=5^x$, $g(x)=x^4$,求 $f[g(x)]$, $g[f(x)]$.

5. 设 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$,证明 $f\{f[f(x)]\}=f(x)$,并求 $f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]$,其中,$x\neq 0$, $x\neq 1$.

习 题 1.5

(A)

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\log_2(\log_3 x)$;　(2) $y=\sqrt{3-x}+\arcsin\dfrac{3-2x}{5}$;

(3) $y=\sqrt{2x+1}+\ln(1-x)$；　　(4) $y=\arctan\dfrac{1}{x}-\sqrt{2-x}$.

2. 下列函数中哪些是初等函数,哪些不是初等函数?

(1) $y=\sin\pi x+\cos\pi x$；　　(2) $y=\ln\sin\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$；

(3) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & -2\leqslant x<0,\\ 1+x^2, & 0\leqslant x<2;\end{cases}$　　(4) $y=|x-2|(x+1)$.

习 题 1.6

(A)

1. 当某商品价格为 P 时,消费者对该商品的月需求量为

$$D(P)=15\,000-300P$$

(1) 画出需求函数的图形;

(2) 将月销售额(即消费者购买此商品的支出)表示为价格 P 的函数;

(3) 画出月销售额函数的图形,并解释其经济意义.

2. 设某商品的需求函数与供给函数分别为

$$D(P)=\frac{3000}{P}\quad 和\quad S(P)=P-10$$

(1) 找出均衡价格,并求此时的供给量与需求量;

(2) 在同一坐标系中画出供给曲线与需求曲线;

(3) 何时供给曲线过 P 轴,这一点的经济意义是什么?

3. 某厂生产录音机的成本为 30 元/台,预计当以 x 元/台的价格卖出时,消费者每月购买 $(300-x)$ 台,请将该厂的月利润表达为价格 x 的函数.

4. 某化肥厂生产某产品 2000 t,每吨定价为 150 元,销售量在 800 t 以内时,按原价出售,超过 800 t 时超过的部分需打 9 折出售,请将销售总收益与总销售量的函数关系用数学表达式表出.

5. 某报纸的发行量以一定的速度增加,三个月前发行量为 30 000 份,现在为 45 000 份.

(1) 写出发行量依赖于时间的函数关系;

(2) 三个月后的发行量是多少?

6. 某厂生产的手掌游戏机售价为 110 元/台,固定成本为 7500 元,可变成本为 60 元/台.

(1) 要卖多少台手掌机,厂家才可保本(收回投资)?

(2) 卖掉 100 台的话,厂家赢利或亏损了多少?

(3) 要获得 1250 元利润,需要卖多少台?

(B)

1. 收音机售价为 85 元/台，成本为 60 元/台，厂方为鼓励销售商大量采购，决定凡是订购量超过 100 台以上的，每多订购 100 台售价就降低 1 元，但最低价为每台 70 元.

(1) 将每台的实际售价 P 表示为订购量 x 的函数；

(2) 将厂方所获的利润 L 表示成订购量 x 的函数；

(3) 某一商行订购了 1000 台，厂方可获利润多少？

2. 有两家健身俱乐部，第一家会费为 300 元/月，健身收费为 1 元/次，第二家会费为 200 元/月，健身收费为 2 元/次，若只考虑经济因素，你会选择哪一家俱乐部(根据你每月健身次数决定)？

3. 某大楼有 50 间办公室出租，若定价每间每月租金 120 元，则可全部租出，租出的办公室每月需由房主负担维修费 10 元，若每月租金每提高一个 5 元，将空出一间办公室，试求房主所获得利润与闲置办公室的间数的函数关系，并确定每间月租金多少时才能获得最大利润. 这时利润是多少？

4. 一种汽车出厂价 40 000 元，使用后它的价值按年降价率 $\frac{1}{5}$ 的标准贬值，试求此车的价值 y(元)与使用时间 t(年)的函数关系.

5. 每印一本杂志的成本为 1.22 元，每售出一本杂志仅能得 1.20 元的收入，但销售额超过 15 000 本时还能取得超过部分收入的 10%作为广告费收入，试问应至少销售多少本杂志才能保本？销售量达到多少时才能获利达 1000 元？

总 习 题 1

1. 单项选择题.

(1) 如果函数 $f(x)$ 的定义域为 $[1, 2]$，则函数 $f(1-\ln x)$ 的定义域为(　　).

A. $[1-\ln 2, 1]$　B. $(0, 1]$　C. $[1, \mathrm{e}]$　D. $\left[\frac{1}{\mathrm{e}}, 1\right]$

(2) 函数 $y=\frac{1-x^2}{1+x^2}$ 的值域是(　　).

A. $[0, 1]$　B. $(-1, 1]$　C. $[-1, 1]$　D. $(0, 1)$

(3) 函数 $y=\frac{2^x}{2^x+1}$ 的反函数是(　　).

A. $y=\log_2 \frac{x}{1-x}$　B. $y=\log_2 \frac{1-x}{x}$

C. $y=\log_2 \frac{x}{1+x}$　D. $y=\log_2 \frac{1+x}{x}$

(4) 设 $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=1-x$, 则 $f[g(x)]$等于(　　).

A. $1-\dfrac{1}{x}$　　B. $1+\dfrac{1}{x}$　　C. $\dfrac{1}{1-x}$　　D. x

(5) 下列函数中是奇函数的是(　　).

A. $f(x)=\sin x-\cos x$　　B. $f(x)=x\sin x$

C. $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$　　D. $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

(6) 在区间$(-1, 0)$内由(　　)给出的函数是单调增加的.

A. $y=|x|+1$　　B. $y=5x-2$

C. $y=-4x+3$　　D. $y=|x|-2x$

(7) 函数 $y=|\sin x|$ 的周期是(　　).

A. 4π　　B. 2π　　C. π　　D. $\dfrac{\pi}{2}$

(8) 函数 $y=\lg(x-1)$ 在区间(　　)内有界.

A. $(1, +\infty)$　　B. $(2, +\infty)$　　C. $(1, 2)$　　D. $(2, 3)$

2. 填空题.

(1) 已知 $f(x)=x+1$, 则 $f(2)=$________, $f(-2)=$________, $f(a+b)=$________, $f(x^2)=$________, $f[f(x)]=$________.

(2) 设 $f(x)$的定义域为$[0, 1]$,则 $f(x+1)$ 的定义域为____________.

(3) 周期函数 $f(x)=3\sin 2x$ 的最小正周期是____________.

(4) 已知 $2^x=a$, $2^y=b$, $3^x=c$, 则 $2^{x+y}=$________, $2^{x-y}=$________, $(2\cdot 3)^x=$________, $2^{3x}=$________, $2^{\frac{x}{3}}=$________(用 a, b, c 表示).

(5) 设 $\log_a x=b$, $\log_a y=c$, 则 $\log_a(xy)=$________, $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right)=$________, $\log_a x^3=$________, $\log_a\sqrt[3]{y}=$________.

3. 求下列函数的反函数.

(1) $y=3\sin 2x\ \left(x\in\left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]\right)$;(2) $y=1+2\sin\dfrac{x-1}{x+1}\ (x\geqslant 0)$;

(3) $y=2+\ln(x+1)$;　　(4) $y=\begin{cases} x, & -\infty<x<1, \\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 4, \\ 2^x, & 4<x<+\infty. \end{cases}$

4. 指出下列函数的复合过程.

(1) $y=1+\cos\pi x$;　　(2) $y=|\sin x|$;

(3) $y = x\sin\dfrac{1}{x}$；　　　　(4) $y = \sin\pi x + \cos\pi x$.

5. 求函数 $y = \log_{(x-1)}(16 - x^2)$ 的定义域.

6. 设 $f(x) = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ 1, & x < 0. \end{cases}$ 求：

(1) $f(x-1)$；　　　　(2) $f(x) + f(x-1)$.

7. 设 $f(x) + f\left(\dfrac{x-1}{x}\right) = 2x$，其中 $x \neq 0$，$x \neq 1$，求 $f(x)$.

8. 若函数 $f(x)$既是奇函数，又是偶函数，证明：$f(x) \equiv 0$.

9. 设 $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ -x^2, & x > 0 \end{cases}$　$g(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$

求 $f[f(x)]$，$g[g(x)]$，$f[g(x)]$，$g[f(x)]$.

10. 设 $f(x)$的定义域是$[0, 1]$，求下列函数的定义域.

(1) $f(x^2)$；　　　　(2) $f(\ln x) + f(x-2)$；

(3) $f(\sin x)$；　　　　(4) $f(\arctan x)$.

11. 设 $f(x)$，$g(x)$和 $h(x)$为增函数，满足 $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ $(x \in \mathbf{R})$，证明：$f[f(x)] \leqslant g[g(x)] \leqslant h[h(x)]$ $(x \in \mathbf{R})$.

12. 若 $f(t) = 2t^2 + \dfrac{2}{t^2} + \dfrac{5}{t} + 5t$，证明：$f(t) = f\left(\dfrac{1}{t}\right)$.

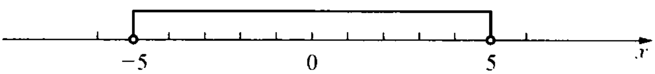
13. 设函数 $f(x)$满足 $af(x) + bf\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{c}{x}$ (a, b, c 均为常数)且 $|a| \neq |b|$，证明：$f(-x) = -f(x)$.

习 题 解 答

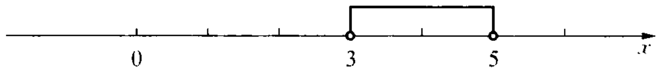
习 题 1.1

(A)

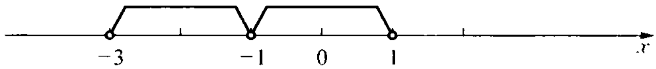
解　(1) $(-5, 5)$；



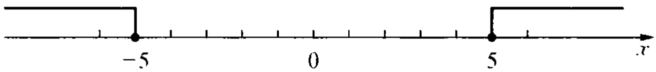
(2) $(3, 5)$；



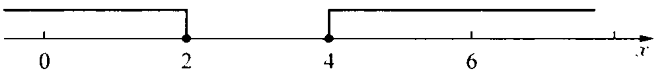
(3) $(-3, -1) \cup (-1, 1)$;



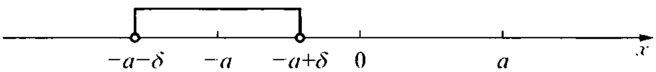
(4) $(-\infty, -5] \cup [5, +\infty)$;



(5) $(-\infty, 2] \cup [4, +\infty)$;



(6) $(-a-\delta, -a+\delta)$.



(B)

解 (1) $(-3, 0) \cup (4, 7)$;

(2) $(-8, -4) \cup (-2, 2)$;

(3) $(a-\delta, a-1) \cup (a+1, a+\delta)$.

习　题　1.2

(A)

1. 解　$g(3) = (x-1)\big|_{x=3} = 2$, $g(2) = (x-1)\big|_{x=2} = 1$, $g(0) = 2$.

2. 解

$$f(-x) = (-x)^2 - 2(-x) + 3 = x^2 + 2x + 3$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{x}\right) + 3 = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 3$$

3. 解　(1) $4 - x^2 \geqslant 0 \Rightarrow x^2 \leqslant 4 \Rightarrow x \in [-2, 2]$.

(2) $\begin{cases} 4 - x^2 \neq 0 \\ x + 2 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq \pm 2 \\ x \geqslant -2 \end{cases} \Rightarrow x \in (-2, 2) \cup (2, +\infty)$.

(3) $\begin{cases} 3x > 0 \\ \log_2 3x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x > 0 \\ 3x > 1 \end{cases} \Rightarrow x > \frac{1}{3}$,即 $x \in \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$.

(4) $\begin{cases}\ln\left(\dfrac{4x-x^2}{3}\right)\geqslant 0\\ \dfrac{4x-x^2}{3}>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{4x-x^2}{3}\geqslant 1\\ 4x-x^2>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0<x<4\\ x-1>0\\ x-3<0\end{cases}$或$\begin{cases}0<x<4\\ x-1<0\\ x-3>0\end{cases}$

$\Rightarrow x\in[1,3]$.

4. 解 (1) 不同. $D_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, $D_\varphi=(-\infty,+\infty)$,定义域不同.

(2) 不同. $f(x)=x\sqrt{x^2-1}$, $\varphi(x)=|x|\sqrt{x^2-1}$,对应规则不同.

(3) 相同. 对应规则相同,且定义域一样.

(4) 不同. $f(x)=\cos x$, $\varphi(x)=|\cos x|$,对应规则不同.

(B)

1. 解 因为

$$f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=\cos x+1=2\cos^2\frac{x}{2}=2\left(1-\sin^2\frac{x}{2}\right)$$

所以
$$f(x)=2(1-x^2)$$

从而
$$f\left(\cos\frac{x}{2}\right)=2\left(1-\cos^2\frac{x}{2}\right)=2\sin^2\frac{x}{2}$$

2. 解 令 $x-1=u$,代入 $f(x-1)=x^2+1$,得

$$f(u)=(1+u)^2+1=2+2u+u^2$$

于是
$$f(x+1)=2+2(x+1)+(x+1)^2=x^2+4x+5$$

3. 解 由 $f[\phi(x)]=e^{\phi^2(x)}=1-x$,得 $\phi^2(x)=\ln(1-x)$. 又 $\phi(x)\geqslant 0$,故

$$\phi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$$

4. 解 由 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\geqslant 0,\\ x^3, & x<0,\end{cases}$得

$$f(-x)=\begin{cases}(-x)^2+1, & -x\geqslant 0,\\ (-x)^3, & -x<0\end{cases}=\begin{cases}x^2+1, & x\leqslant 0,\\ -x^3, & x>0.\end{cases}$$

习 题 1.3

(A)

1. 解 (1) 因为当 $x\in(0,1)$ 时,$y=\dfrac{1}{\ln x}\in(-\infty,0)$,故函数无界.