工程力学丛书

力学与工程问题的分数阶导数建模

陈 文 孙洪广 李西成 等 著

科学出版社

工程力学丛书

力学与工程问题的分数阶导数建模

陈　文　孙洪广　李西成 等　著

科 学 出 版 社
北　京

内 容 简 介

本书较详细地介绍了分数阶微积分方法在复杂力学行为建模及其数值模拟方面的研究成果。本书侧重于分数阶微积分在力学和物理建模方面的应用，强调分数阶微积分建模的物理和力学背景和概念，但避免介绍过多的数学知识，省略了大量的严密数学证明；力求把相关知识以最简单的形式展现给读者。在内容上，本书还包含分数阶微积分理论及其应用方面的一些最新研究成果，如正定分数阶导数、分形导数、变导数、分布式导数及其应用等。

本书可作为高等学校工程力学、环境力学、岩土力学、生物力学、流变学、应用数学、计算数学、应用物理等专业的研究生教学用书以及科研院所研究人员的科研参考书。

图书在版编目(CIP)数据

力学与工程问题的分数阶导数建模 / 陈文，孙洪广，李西成等著. —北京：科学出版社，2010

(工程力学丛书)

ISBN 978-7-03-026857-0

Ⅰ.①力… Ⅱ.①陈…②孙…③李… Ⅲ.①微积分-应用-工程力学-研究 Ⅳ.①TB12

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 032736 号

责任编辑：童安齐 / 责任校对：柏连海

责任印制：吕春珉 / 封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010 年 12 月第 一 版 开本：787×1092 1/16

2010 年 12 月第一次印刷 印张：17

印数：1—1 500 字数：385 000

定价：60.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈双青〉)

销售部电话 010-62134988 编辑部电话 010-62137026(BA08)

前　言

经典牛顿力学认为空间和时间处处连续，基本物理量（例如，速度、加速度和力等）均可由整数阶微分算子来定义，因而物理和力学演化过程可以用整数阶微分方程来精确描述，例如经典力学中的傅里叶热传导方程、哈密顿方程等。这种科学研究方法和模式在经典力学、声学、电磁学、热传输、扩散理论，甚至现代量子力学和相对论中取得了巨大的成功。然而，物理学家、力学家和工程师也发现了越来越多不能用这一观点解释或进行物理、力学和工程建模的所谓“反常”现象。例如，Richardson 在 1926 年就指出湍流的速度场是不可微的，这也许是传统牛顿力学在湍流问题的解决上长期停滞不前的一个根本原因。又如，大量的实验表明，许多黏弹性材料（包括黏弹性体和流变物质）的应力松弛是非指数（非德拜）型的，有记忆性，传统的黏弹性整数阶微分本构模型不能精确地描述它们的力学行为。近年来引起广泛关注的“反常”扩散（anomalous diffusion）涉及物理和力学过程的记忆和遗传、路径依赖和全局相关性，经典的达西律、傅里叶热传导、牛顿黏性和 Fick 扩散不能准确描述这些“反常”物理和力学过程。

从力学建模上看，标准的整数阶时间导数由局部极限定义，不适合描述历史依赖过程；分数阶时间导数（fractional time derivative）实际上是微分-积分卷积算子，其定义中的积分项充分地体现了系统函数发展的历史依赖性，是记忆性较强过程建模的有力数学工具。另外，分数阶拉普拉斯算子（fractional Laplacian）是典型的非局部空间分数阶导数，可以精确描述复杂分形空间结构中反常力学行为的路径依赖、长程相关的特征，跨越了建立在欧几里得几何和绝对时空观基础上的经典力学理论范畴。

分数阶微积分是一个古老而又新鲜的概念。早在整数阶微积分创立的初期，就有一些数学家，如 L'Hospital、Leibniz 等开始考虑它的含义。然而，由于缺乏应用背景支撑等多方面的原因，它长期以来并没有得到较多的关注和研究。随着自然科学和社会科学的发展、复杂工程应用需求的增加，尤其是 20 世纪七八十年代以来对分形和各种复杂系统的深入研究，分数阶微积分理论及其应用开始受到广泛关注。进入 21 世纪以来，分数阶微积分建模方法和理论在高能物理、反常扩散、复杂黏弹性材料力学本构关系、系统控制、流变学、地球物理、生物医学工程、经济学等诸多领域有了若干非常成功的应用，凸显了其独特优势和不可替代性，其理论和应用研究在国际上已成为一个热点。

另外，分数阶微积分的非局域性质，导致分数阶导数控制方程数值模拟的计算量和存储量随问题规模的增大而增加得比相应整数阶方程快得多，一些计算整数阶方程十分有效的数值方法对分数阶方程也完全失效。而且，目前大多数的分数阶微积分方程模型还是唯象模型，其内在的物理和力学机理还不是很清楚，有待进一步的深入研究。

目前，国际上已经有了一些介绍分数阶微积分的英文专著。例如，Oldham 和 Spanier 撰写的 *The Fractional Calculus*（Academic Press, Inc., San Diego, 1974）、Samko 等所

著的 *Fractional Intergrals and Derivatives: Theory and Applications*（1987 年俄文版，Naukai Tekhnika 出版；1993 年英文版出版）、Miller 和 Ross 著的 *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*（John Wiley & Sons, Inc.，New York，1993）、Podlubny 所著的 *Fractional Differential Equations*（Academic Press，New York，1999）以及 Kilbas 等所著的 *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*（Elsevier，Amsterdam，2006）。但是，这些专著侧重于分数阶微积分的数学理论或它在某个特定领域的应用，没有充分考虑到目前分数阶微积分及其应用对多数研究者还是一个新生事物。特别是在国内，至今还没有一本全面介绍分数阶微积分理论及其应用的中文专著。大多数国内的研究者需要一本关于分数阶微积分理论及其应用的中文入门书。

本书旨在提供一本适合作为研究生教材和关于分数阶微积分理论和应用的入门书籍。结合作者研究工作的内容，本书较详细地描述了分数阶微积分方法在复杂力学行为建模和数值模拟方面的研究成果，从分数阶微积分的数学基础、分形与分数阶微积分的关系、非常规统计与反常扩散、分数阶微积分的典型应用、分数阶微分方程数值解法等方面介绍了分数阶微积分理论及其应用，并探讨了分数阶微积分建模的发展前景。

本书侧重分数阶微积分在力学和物理建模方面的应用，强调分数阶微积分建模的物理和力学背景和概念；但避免介绍过多的数学知识，省略了大量的严密数学证明，力求把相关知识以最简单的形式展现给读者。有关的详细数学分析和证明，读者可参阅上述所提的专著和本书所列的参考文献。在内容上，本书还包含了分数阶微积分理论及其应用方面的一些最新研究成果，如正定分数阶导数、分形导数、变导数、分布式导数及其应用，分数阶导数湍流多尺度连续介质力学模型等。

为了加强读者对分数阶微积分定义和相关概念的掌握和理解，本书给出了大量不同类型的实例。每章也都讨论了相关方面存在的问题。最后一章还作了总结和发展展望，列出了 2008 年在土耳其举行的“第三届分数阶微积分及其应用”国际会议上一些学者提出的待解决的关键问题。我们希望这些内容能够给读者以启发，加深对分数阶微积分理论和应用的认识和理解。需要说明的是，现在关于分数阶微积分理论及应用的文献很多，并且数量增加得很快，本书不可能一一列举，感兴趣的读者可以把本书所列的参考文献为线索，查找自己所需资料，我们也十分欢迎读者的反馈意见。

本书由陈文、孙洪广和李西成主持撰写。全书的编写大纲由陈文提出。全书的撰写工作由陈文负责统筹安排。其中陈文负责第一章的撰写；陈文、孙洪广、叶霖娟负责第二章的撰写；胡帅、张晓棣负责第三章的撰写；陈文、孙洪广负责第四章的撰写；张晓棣、陈文、孙洪广、和成亮负责第五章的撰写；陈文、孙洪广、张晓棣负责第六章的撰写；陈文、李西成负责第七章的撰写；孙洪广、叶霖娟负责附录的撰写；李西成负责全书的修改与排版工作。陈阳泉教授、朱克勤教授、李常品教授、殷德顺副教授、陈宁副教授、李岩副教授等在写作过程中给予了指导和帮助，并且认真审阅了全书，提出了不少宝贵意见，作者在此表示由衷的感谢。

本书的部分研究工作得到国家自然科学基金项目(No. 10774038)、科技部国家重点基础研究发展计划("973")项目(No. 2010CB832702)、水利部行业公益性项目(No. 201101014)和教育部新世纪优秀人才支持计划项目(No. NCET-06-0480)的支持,特此致谢。

由于作者水平和时间所限,书中不妥之处在所难免,敬请广大读者批评指正。

作　者
2010年2月18日
于南京

主要符号说明

（按书中出现顺序排列）

${}_{a}^{GL}D_{t}^{\beta}$	Grünwald-Letnikov 型导数符号
${}_{a}^{RL}D_{t}^{\beta}$	Riemann-Liouville 型导数符号
${}_{a}^{C}D_{t}^{\beta}$	Caputo 型导数符号
	在上面的三个表达式中，GL、RL、C 分别代表相应定义类型的缩写，a 代表定义中积分的下限，β 表示求导的阶数
I^{α} 或 $D^{-\alpha}(\mathrm{Re}(\alpha)>0)$	分数阶积分
$\lfloor\alpha\rfloor$	非负实数 α 的整数部分
$\lceil\alpha\rceil$	大于或等于正实数 α 的最小整数
$\sum_{i=1}^{N} u_i$	级数求和符号
$\prod_{i=1}^{n} u_i$	连乘符号
$\int_0^M f(x)\mathrm{d}x$	积分符号，M 表示积分上限
$\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}x^p}$、$\frac{\partial^p}{\partial x^p}$（偏导）	p 阶分数阶导数符号
$(-\Delta)^{\beta}$	分数阶拉普拉斯算子符号，β 表示分数阶数
$\frac{\mathrm{d}u^{\beta}}{\mathrm{d}t^{\alpha}}$	分形导数，α、β 分别表示时间和空间的分形维数
$\frac{\mathrm{d}^{\lvert p\rvert}}{\mathrm{d}x^{\lvert p\rvert}}$	正定 p 阶分数阶导数
$u_i^j(x,y,z)$	具有上下标的量
$\dot{u}$、$\ddot{u}$、$u^{(n)}$	函数 u 的 1、2 和 n 阶导数
A^{-1}	矩阵 A 的逆
A^{T}	矩阵 A 的转置
$F(\ )$、$F^{-1}(\ )$	傅里叶正变换与逆变换
$L(\ )$、$L^{-1}(\ )$	拉普拉斯正变换与逆变换
Δ	拉普拉斯算子
∇	梯度算子
$\Gamma(\ )$	伽马函数
$E_{\alpha,\beta}(z)$	双参数 Mittag-Leffler 函数
$B(z,w)$	贝塔函数

$W(z;\alpha,\beta)$	Wright 函数
σ	正应力
τ	切应力
$\hat{\sigma}$	应力张量
ε	应变
$\dot{\varepsilon}$	应变率
$\hat{\varepsilon}$	应变张量
E	弹性模量
G	剪切模量
σ_s	屈服应力
$\max\limits_{0\leqslant i\leqslant N}\{u(i)\}$	数组的最大值
$\min\limits_{0\leqslant i\leqslant N}\{u(i)\}$	数组的最小值
$f * g$	函数 f 与 g 的卷积
$G(\ )$	格林函数
$\exp(\ )$	指数函数
D_s	分形维数
$H_{p,q}^{m,n}$	H-Fox 函数

目　　录

第一章 概 论

1.1 分数阶微积分的历史

牛顿(1642～1727)和莱布尼茨(1646～1716)发明的微积分是现代数学和古典数学的分水岭,数学的发展和应用自此发生了根本性的变化,分析、几何和代数一同成为数学的三个基本研究方向和工具[1]。对大多数研究人员和工程师而言,分数阶微积分也许还是一个陌生而新奇的概念和数学分析工具,但它实际上早在 300 多年前就已被提出。

莱布尼茨最先引入 $d^n y/dx^n$ 记号来表示导数,也正是因为这个符号的出现,促使了 L'Hōpital 对分数阶导数问题的思考。1695 年 9 月,L'Hospital 在给莱布尼茨的著名信中就写道:“对于简单的线性函数 $f(x)=x$,如果函数导数次数为分数而不是整数那会怎样,例如 $d^{1/2}x/dx^{1/2}$。”莱布尼茨在回信中写道:“这明显是一个谬论,但总有一天会得出有用的结论”[2~5]。后来,这个问题变成函数导数为任意数(分数、无理数或者复数)的问题,所以现在沿用的分数阶微积分是一个不准确也不正确的命名。但由于历史原因,分数阶微积分已成为大家的习惯术语,直到目前绝大多数的研究者还是继续使用这个名称。

历史上,莱布尼茨、欧拉、拉普拉斯、Lacroix 和傅里叶都注意到任意阶的导数。其中,欧拉迈出了关键性的第一步。他注意到,当 p 是非整数时,幂函数 x^a 的导数 $\frac{d^p}{dx^p}x^a$ 在数学上有意义。1812 年,拉普拉斯提出了积分形式的函数 $\int T(t)t^{-x}dt$ 的分数阶导数的想法。1819 年,Lacroix 重复了欧拉的想法,并第一次给出问题的答案:$d^{1/2}x/dx^{1/2}=2x^{1/2}/\sqrt{\pi}$。第一次真正使用分数阶算子的应该是 Abel。1823 年,Abel 求解等时曲线问题的积分方程时,引入了分数阶微积分来表示该方程的解。1832 年,Liouville 成功地应用了自己提出的分数阶导数的定义,解决了势理论问题。此后(1832～1837 年)Liouvile 发表的一系列文章使他成为分数阶微积分理论的实际创始人。继 Liouville 之后,Riemann、傅里叶、Willian Center、Augustus De Morgan、Cayley、Weyl 等也做了具有重要意义的工作,促进了分数阶微积分的发展。

但是第一本关于分数阶微积分理论的专著[6]直到 1974 年才出版,作者为 Oldham 与 Spanier。同一年,在美国国家自然基金的支持下,在美国康涅狄格州的纽黑文大学召开了第一次分数阶微积分的国际会议,参加会议的有许多当时著名的数学家。由 Springer-Verlag 出版了这次会议的论文集[7]。1982 年 B. B. Mandelbrot 首次指出自然界和工程中存在大量分数维的事实,并且在整体与部分之间存在自相似现象。此后,分数阶微积分成为研究分形几何和分数维动力学的有力工具[13]。1984 年在苏格兰斯特拉思克莱德区召开了第二次关于分数阶微积分的国际会议。第三次国际会议在东京日本大学召开。1987 年,Samko、Kilbas 和 Marichev 发表了一部比较全面介绍分数阶微积分的专著。该书原

版是俄文，1993 年出版英文版。

在分数阶微积分的发展历史中，除了前面提到的数学家，还有 Grünwald、Hadamard、Letnikov、Hardy、Riesz、Marchaud、Littlewood、Erdelyi、Fox、Kobe、Love、McBride、Ross、Srivastava、Caputo 等数学家或物理学家也做出了巨大的贡献。关于建立分数阶微积分数学理论的详细历史，读者可以参考 Samko、Kilbas 和 Marichev 的著作[5]。

当前，分数阶算子的定义主要有 Riemann-Liouville 型、Caputo 型、Grünwald-Letnikov型、Weyl 型、Erdelyi-Kober 型、Riesz 型以及 Marchaud-Hadamard 型分数阶微积分[8,9]。这些定义之间有内在的联系。经过许多学者的长期不懈努力，分数阶微积分的理论在一定程度上被建立起来了[3]。但是目前分数阶微积分的实际工程应用仍然遇到若干障碍，其中很重要的一个原因是分数阶微积分的数学基础仍未完善，一些情况下不同问题所用的定义形式也不相同，同时分数阶导数的傅里叶与拉普拉斯变换也存在问题。另外，分数阶微积分在被提出至今的 300 多年历史中，除了最近二三十年以外，在物理和力学等学科并未获得广泛的应用和关注，而仅仅作为一个数学领域内的纯理论问题，是好奇心驱动的数学家的一个研究对象。也许更重要的原因是分数阶算子与建立在光滑连续空间-时间观基础上的经典物理学体系的内在矛盾[2,3]。

19 世纪末，物理学家 Heaviside 发表的一系列文章表明，分数阶算子可以应用于求解特定的整数阶微分方程。从数学角度看，他的方法并不严格，但被证明对电缆中电流传输这类工程问题非常有效。后来 Heaviside 的结果被证明是正确的，但他的处理过程在数学上并不完善，直到 1919 年 Bromwich 才把这一工作完善[4]。这种方法被称为 Heaviside Operational Calculus。Heaviside 非凡的想法极大地促进了分数阶算子的发展，但当时分数阶微积分还没有被应用于科学和工程问题的物理和力学建模。

20 世纪 40 年代，力学家 Scott Blair[41] 和 Gerasimov[42] 分别独立地提出了介于牛顿流体和胡克定律表征的固体模型的分数阶导数模型。地球物理学家 Caputo[10] 和 Mainardi[11] 将分数阶微积分方法运用到复杂黏弹性和流变介质，发展了若干新的力学模型。更重要的是，Caputo[10] 发展了一个不同于传统的 Riemann-Liouville 分数阶导数定义的新定义（目前在文献中被称为 Caputo 定义），克服了前者的强奇异性，并且自然地将初始条件含在定义中，在解决实际问题中获得非常广泛的应用。分数阶微积分的黏弹性材料建模的第一篇博士论文是在 Torvik 指导下由 Bagley 完成的[12]。在这之后，将分数阶微积分应用于黏弹性材料及其他复杂力学过程的建模，开始日益受到越来越多的关注。

1965 年，美国耶鲁大学的 Mandelbrot 教授提出分形的概念，并认为自然界和工程中存在大量分数维的现象，其本质是整体和局部之间的自相似性[13]。他认为分数阶布朗运动与 Riemann-Liouville 提出的分数阶微积分定义有紧密的内在联系。从此，作为分形几何和分形动力学的基础，分数阶算子理论特别是分数阶微积分和分数阶微分方程的研究开始得到广泛关注[3]，分数阶微积分研究的重点也逐渐从纯数学领域转移到其他学科领域。

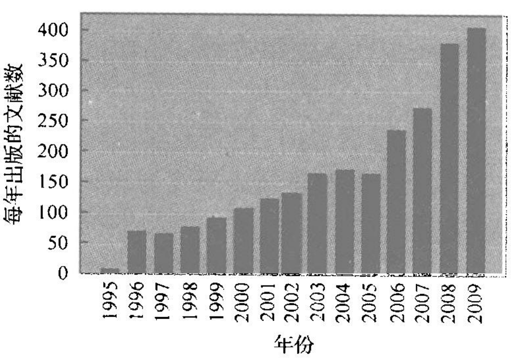
20 世纪末至今，由于反常扩散、多孔介质力学、非牛顿流体力学、黏弹性力学、软物质物理和力学[14] 研究的需要，分数阶导数的研究和应用再度引起广泛重视，有关的研究和文献增加得很快[15~18]。由于反常扩散所具有的历史依赖与全域相关的特征恰好可以由分数阶导数来表示，因此分数阶导数在反常扩散的研究中得到了广泛的应用。另外，连续

时间随机游走(CTRW)模型描述反常扩散的成功及其与分数阶微积分的密切联系[19],使得反常扩散成为复杂系统领域一个最为令人关注的研究方向。据统计[9],截至 2003 年,关于分数阶微积分在反常扩散现象中应用的文章已经达到 1791 篇,仅 1997～2003 年发表的文章就达到了 1047 篇,直到现在,反常扩散仍然是多个领域学者研究的热点。

目前,每两年举办一次的"分数阶微积分及其应用"系列国际会议,2004 年第一次在法国,2006 年在葡萄牙,2008 年在土耳其,2010 年在西班牙,2012 年计划在中国(河海大学承办)。除此之外,在美国机械工程师学会(ASME)主办的"国际多体系统、非线性动力学与控制"系列国际会议中,每届都有"分数阶导数及其应用"的专题分会场。同时,在其他的一些会议中有关分数阶微积分的小型会议也逐渐增多,如"中国力学大会"(2009)、"第三届国际动力学、振动与控制会议"(2010)、2010 年上海大学举办的"分数阶动力系统与控制学术日"等。

在学术期刊方面,*Journal of fractional Calculus*、*Fractional Dynamic Systems*、*Fractional Calculus and Applied Analysis*、*Fractional Dynamic Systems* 是有关分数阶微积分及其应用的专业期刊。其他经常发表本领域文章的学术期刊包括 *Chaos*、*Fractal*、*Solitons & Fractals*、*Physics Review Letters*、*Physica A*、*Physics Letters A*、*Physics Review E*、*Journal of Computational Physics*、*Computers and Mathematics with Applications*、*Nonlinear Dynamics* 等。

近年来,国际上每年发表的涉及分数阶微积分的研究论文超过 500 篇,相关的理论研究与应用已经渗入几乎所有的学科和应用领域(图 1-1)。本书主要涉及分数阶微积分基础数学理论的介绍;在应用方面,我们主要讲述分数阶导数的应用,分数阶积分的应用涉及较少。



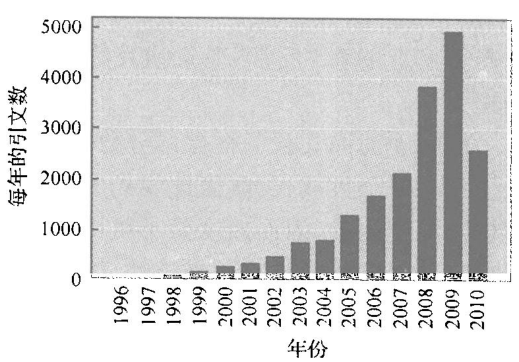


图 1-1 以关键词"fractional differential"或"fractional integral"或"fractional calculus"或"fractional order"在 Web of Science 上进行检索得到的统计结果

(检索的时间区间:1995～2009 年;检索时间:2010-5-23。以上述关键词的检索结果并未包含涉及分数阶微积分的所有文献,并且右图的 2010 年的引文数据截止到 2010-5-23)

1.2 分数阶导数方程的几何和物理解释

复杂物理、力学、生物和工程的建模问题是推动分数阶微积分理论和应用研究的主要

力量，这些模型中的分数阶微积分的阶数具有一定的物理意义或几何解释。从应用的角度看，分数阶导数模型和整数阶导数模型的本质区别在于：对时间而言，整数阶导数所表征的是一个物理或力学过程某时刻的变化或某种性质，而分数阶导数所表征的性质则与该现象的整个发展历史有关。整数阶空间导数描述的是一个物理过程在空间中某一确定位置的局部性质，而分数阶导数所描述的性质则与该物理过程涉及的整个空间有关。

基于绝对空间和时间以及欧几里得几何的假设，经典牛顿力学认为空间和时间没有起点和终点，且处处连续；所有导出的物理量，如速度、动量、加速度和力，均可由整数阶微分算子来定义，物理现象的演化过程因而可以用标准的整数阶微分方程来描述[3,20]。例如，经典力学中的 Euler-Lagrange 方程、Hamilton 方程。这种科学研究方法和模式在经典力学、声学、电磁学、热传输、扩散理论，甚至现代量子力学中取得了巨大的成功。然而，物理学家也发现了越来越多不能用这一观点解释和进行物理力学建模的所谓"反常"现象。例如，Richardson[21]在 1926 年指出湍流的速度场是不可微的，这也许是传统的牛顿力学在湍流问题的解决上长期停滞不前的一个重要原因。又如，大量的实验表明，许多黏弹性材料(包括黏弹性固体和流体物质)的应力松弛是非指数(非德拜)型的，具有记忆性，传统的黏弹性微分本构模型不能精确地描述它们的力学行为[22]。近年来引起广泛关注的"反常"扩散是高温高压下等离子体运动[23]、金融市场变化、污染物在自然环境中的迁移、湍流[24,25]以及软物质[26,27](又被称为复杂流体，介于理想固体和液体之间的复杂状态物质，大多由大分子或基团组成，经常是多相介质)的热传导、扩散、渗流[28]、耗散[29,30]、电子输运[31]等各种复杂现象的共性特征。"反常"扩散是相对于理想固体和流体的"正常"扩散而言的，本质上其本构关系不服从各种标准的"梯度"律(例如，达西律、傅里叶热传导、牛顿黏性、Fick 扩散等)[20,27]；相应实验测量数据拟合得到的经验公式表现为幂律(power law)函数形式。注意，这里的"扩散"应广义地理解，也包括反常能量耗散问题[29]。以上这些"反常"现象涉及物理和力学过程的记忆和遗传[32~34]，路径依赖性和全局相关性。

徐明瑜与谭文长[3]在探讨分数阶算子的物理和力学背景时，提到经典的物理力学理论受到的三个挑战：①湍流速度场的不规则起伏，大气湍流速度场中风在振幅和方向上是随机剧烈变化的，因而速度是不可微的；②布朗运动；③复杂黏弹性材料的本构关系。许多复杂黏弹性材料具有记忆特性，弹性固体的胡克定律和黏性流体的牛顿定律都无法准确地描述这个特征，复杂黏弹性材料实际上是介于理想弹性和黏性之间的介质。

下面分析在五种特定的领域内，分数阶导数算子所表示的物理和力学意义。

1.2.1　任意频率依赖的能量耗散过程

本节以分数阶微分的 Riemann-Liouville 定义为例，阐述经典模型与分数阶模型的区别。下面是分数阶微分的 Riemann-Liouville 定义

$$\left.\frac{\mathrm{d}^p f(t)}{\mathrm{d}t^p}\right|_a^t = \frac{1}{\Gamma(m+1-p)}\frac{\mathrm{d}^{m+1}}{\mathrm{d}t^{m+1}}\int_a^t (t-\tau)^{m-p} f(\tau)\mathrm{d}\tau \quad (m \leqslant p < m+1) \tag{1-2-1}$$

式中：p 为任意非负实数；m 为非负整数。

上述定义表明，该分数阶微分算子为微分-积分形式，也就是包含了从初始时刻 a 到当前时刻 t 的整个过程的影响，因此分数阶微分算子具有长程相关性和记忆性。其中 $(t-\tau)^{m-p}$ 为表征记忆的核函数。

在式(1-2-1)中，当 $a=-\infty$ 时，对分数阶微分算子做傅里叶变换，可以得到

$$F\left\{\frac{\mathrm{d}^p u(t)}{\mathrm{d}t^p},\ \omega\right\}=(\mathrm{i}\omega)^p U(\omega) \tag{1-2-2}$$

由此就得到响应的频域表达形式。由于 p 可以为任意非负实数，因而分数阶微分算子可以描述任意阶频率依赖。它的应用背景是实际的物理、力学过程通常是任意阶频率依赖，而整数阶算子只能表示整数阶频率依赖的情况，因此在复杂的物理、力学现象建模时有很大的局限性，详细内容见 5.5 节。$(\mathrm{i}\omega)^p$ 可以分解成 $a\mathrm{i}+b$ 的复数形式，实部值表示耗散的速率，虚部值表示振荡频率。

1.2.2 分形描述和幂律现象

Mandelbrot[35] 指出，自然界和工程中存在大量的分数维现象，涉及复杂的物理、力学过程。研究这类过程时要改变时空尺度，时空尺度变为 (x^β, t^α) [20]。在这些分数维过程中，整数阶梯度率是不存在也不被满足的。因此，人们开始尝试引入分数阶微积分，重新定义这些物理和力学理论中的基本概念，使之能够不受整数维尺度的限制。

整数阶微积分定义下的经典物理和力学理论大多建立在封闭保守系统中，也就是系统内外无能量交换，即能量守恒。相反，分数阶定义下的系统是开放系统，是有能量耗散的系统，是非保守的。传统的整数阶动态系统可以看成是分数阶动态系统的一个特例。

分形并没有明确的数学定义，而是通过对分形的特征加以描述来对分形进行定义。所谓分形是指：①在任意小的尺度下都具有精细结构；②自相似性，即部分与整体、部分与部分以及整体与整体相似（一种是严格的数学意义上的相似，另一种是指统计意义上的相似）；③标度不变性，即没有特征尺度，将部分放大后特性不发生变化；④从几何的角度看，分形的几何不是欧几里得几何，而是非欧几何。也就是说，分形的维数不能简单地通过自由度维数来定义，而是通过豪斯多夫（Hausdorff）维数等来定义[20]。而这样得到的维数值一般不是整数，分形维数大于它的拓扑维数，小于它所在空间的欧几里得维数。

分数阶微分算子的阶数与分数维的维数密切相关。这种关系在研究多孔介质（特别是具有分形结构的多孔介质）中的反常扩散现象或者溶质传输问题时显得尤为重要。但是分形与分数阶微积分之间的确切联系目前仍没有彻底搞清楚，还有待进一步研究。

还有必要提到的是分形函数的概念。它与湍流、布朗运动在数学意义上有很大的相似性。例如，Weiestrass 提出的处处连续但处处不可微的 Weiestrass 函数就是一种分形函数。分形函数没有特征尺度，不可微，具有尺度不变性。同时，尺度不变性与重整化群理论及记忆积分密切相关，都是分形所具有的特征。也就是说，分形函数是分数维的，它是研究分形与分数阶微积分之间内在联系的桥梁之一。虽然分形函数整数阶不可微分，但是它具有分数阶可微分性，可以用分数阶微积分的理论对它进行分析。

幂律现象在自然界广泛存在，也是当今科学研究的一个热点。在自然科学中，人们发