经典教材辅导用书

JINGDIAN JIAOCAI FUDAO YONGSHU

陈光大 编

# 高等代数
## 学习指导与题解

高教版《高等代数》（第5版）

（张禾瑞　郝钢新）

华中科技大学出版社

http://www.hustp.com

经典教材辅导用书

# 高等代数学习指导与题解

高教版《高等代数》(第5版)
(张禾瑞 郝钢新)

陈光大 编



华中科技大学出版社
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

高等代数学习指导与题解/陈光大　编.—武汉：华中科技大学出版社，2011.4

ISBN 978-7-5609-6994-7

Ⅰ.高…　Ⅱ.陈…　Ⅲ.高等代数-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 044236 号

高等代数学习指导与题解　　陈光大　编

策划编辑：周芬娜
责任编辑：王汉江
封面设计：潘　群
责任校对：张　琳
责任监印：周治超
出版发行：华中科技大学出版社(中国·武汉)
　　　　　武昌喻家山　　邮编：430074　　电话：(027)87557437
录　　排：武汉佳年华科技有限公司
印　　刷：湖北新华印务有限公司
开　　本：850mm×1168mm　1/32
印　　张：10.75
字　　数：364 千字
版　　次：2011 年 4 月第 1 版第 1 次印刷
定　　价：19.80 元

本书若有印装质量问题，请向出版社营销中心调换
全国免费服务热线：400-6679-118　竭诚为您服务

# 前　言

由高等教育出版社出版的张禾瑞、郝钢新编的《高等代数》曾获国家教委高等学校优秀教材一等奖，长期以来在全国高等院校被广泛用作教科书.

本书对《高等代数》(第5版)中的习题作了详尽的解答.作为教学辅助读物，希望能给广大读者的学习和使用带来帮助和便利.

本书的特点如下.

**1.** 每章题解之前，对该章知识要点作了简明扼要的概述，便于读者理解、回顾和掌握主要内容、知识要领和单元概貌.

**2.** 对新增题和其他部分习题给出了独立的全新的解答或解答方法，从中特别注意了科学的严密性和可接受性，一切分析论证都以所服务的教材及其他已学知识为依据和出发点.

**3.** 对各种与计算有关的问题，不仅给出了结果，也给出了解答过程，以求更全面地揭示解题思路、方法与步骤，便于读者检查、比较和参考.

**4.** 在各章末尾的“补充讨论”中，给出了部分习题的其他解法或适当说明、相关知识的拓展及简介等.

**5.** 书末选编了8套近100道综合练习题及其全部解答，这些题都出自一些著名高校、科研院所的考试用题和全国历届考研试题，相信读者从中会得到有益的训练和启示.

本书在编写过程中得到华中科技大学周芬娜同志和武汉纺织大学黄光谷同志的热情帮助和悉心指导，谨向他们致以深切的谢意.

由于时间仓促，水平所限，书中难免存在种种疏漏之处，恳请各位读者提出宝贵意见.

编　者

2011.1

# 目　　录


**第 1 章　基本概念** …………………………………………………… (1)

知识要点 …………………………………………………… (1)

习题解答 …………………………………………………… (3)

1.1　集合 …………………………………………………… (3)

1.2　映射 …………………………………………………… (5)

1.3　数学归纳法 …………………………………………………… (8)

1.4　整数的一些整除性质 …………………………………………………… (9)

1.5　数环和数域 …………………………………………………… (10)

补充讨论 …………………………………………………… (12)

**第 2 章　多项式** …………………………………………………… (14)

知识要点 …………………………………………………… (14)

习题解答 …………………………………………………… (19)

2.1　一元多项式的定义和运算 …………………………………………………… (19)

2.2　多项式的整除性 …………………………………………………… (20)

2.3　多项式的最大公因式 …………………………………………………… (22)

2.4　多项式的分解 …………………………………………………… (31)

2.5　重因式 …………………………………………………… (33)

2.6　多项式函数　多项式的根 …………………………………………………… (36)

2.7　复数和实数域上多项式 …………………………………………………… (40)

2.8　有理数域上多项式 …………………………………………………… (42)

2.9　多元多项式 …………………………………………………… (44)

2.10　对称多项式 …………………………………………………… (46)

补充讨论 …………………………………………………… (50)

**第 3 章　行列式** …………………………………………………… (52)

知识要点 …………………………………………………… (52)

习题解答 …………………………………………………… (54)

3.1　线性方程组和行列式 …………………………………………………… (54)

3.2　排列 …………………………………………………… (54)

3.3 $n$ 阶行列式 …… (55)
3.4 子式和代数余子式 行列式的依行依列展开 …… (59)
3.5 克拉默法则 …… (66)
补充讨论 …… (69)
**第 4 章 线性方程组** …… (73)
知识要点 …… (73)
习题解答 …… (77)
4.1 消元法 …… (77)
4.2 矩阵的秩 线性方程组可解的判别法 …… (82)
4.3 线性方程组的公式解 …… (86)
4.4 结式和判别式 …… (92)
补充讨论 …… (97)
**第 5 章 矩阵** …… (100)
知识要点 …… (100)
习题解答 …… (103)
5.1 矩阵的运算 …… (103)
5.2 可逆矩阵 矩阵乘积的行列式 …… (108)
5.3 矩阵的分块 …… (114)
补充讨论 …… (117)
**第 6 章 向量空间** …… (120)
知识要点 …… (120)
习题解答 …… (124)
6.1 定义和例子 …… (124)
6.2 子空间 …… (127)
6.3 向量的线性相关性 …… (129)
6.4 基和维数 …… (133)
6.5 坐标 …… (136)
6.6 向量空间的同构 …… (140)
6.7 矩阵的秩 齐次线性方程组的解空间 …… (141)
补充讨论 …… (143)
**第 7 章 线性变换** …… (146)
知识要点 …… (146)

习题解答 …… (150)
7.1　线性映射 …… (150)
7.2　线性变换的运算 …… (153)
7.3　线性变换和矩阵 …… (156)
7.4　不变子空间 …… (161)
7.5　本征值和本征向量 …… (163)
7.6　可以对角化的矩阵 …… (172)
补充讨论 …… (177)
**第8章　欧氏空间和酉空间** …… (181)
知识要点 …… (181)
习题解答 …… (184)
8.1　向量的内积 …… (184)
8.2　正交基 …… (187)
8.3　正交变换 …… (197)
8.4　对称变换和对称矩阵 …… (204)
8.5　酉空间 …… (208)
8.6　酉变换和对称变换 …… (211)
补充讨论 …… (216)
**第9章　二次型** …… (219)
知识要点 …… (219)
习题解答 …… (223)
9.1　二次型和对称矩阵 …… (223)
9.2　复数域和实数域上的二次型 …… (227)
9.3　正定二次型 …… (232)
9.4　主轴问题 …… (235)
9.5　双线性函数 …… (239)
补充讨论 …… (244)
**第10章　群、环和域简介** …… (247)
知识要点 …… (247)
习题解答 …… (249)
10.1　群 …… (249)
10.2　剩余类加群 …… (255)

10.3 环和域 …………………………………………… (257)
补充讨论 …………………………………………… (264)
**附录 向量空间的分解和矩阵的若尔当标准形式** …………… (266)
知识要点 …………………………………………… (266)
习题解答 …………………………………………… (269)
向量空间的准素分解 凯莱-哈密顿定理 ………………… (269)
线性变换的若尔当分解 ……………………………… (272)
幂零矩阵的标准形式 ………………………………… (275)
若尔当标准形式 …………………………………… (276)
**综合练习题及解答** …………………………………… (279)
综合练习题 …………………………………………… (279)
综合练习题(一) …………………………………… (279)
综合练习题(二) …………………………………… (280)
综合练习题(三) …………………………………… (282)
综合练习题(四) …………………………………… (284)
综合练习题(五) …………………………………… (285)
综合练习题(六) …………………………………… (287)
综合练习题(七) …………………………………… (288)
综合练习题(八) …………………………………… (290)
综合练习题解答 ……………………………………… (291)
综合练习题(一)解答 ………………………………… (291)
综合练习题(二)解答 ………………………………… (297)
综合练习题(三)解答 ………………………………… (302)
综合练习题(四)解答 ………………………………… (307)
综合练习题(五)解答 ………………………………… (313)
综合练习题(六)解答 ………………………………… (317)
综合练习题(七)解答 ………………………………… (323)
综合练习题(八)解答 ………………………………… (328)
**参考文献** …………………………………………… (334)

# 第1章 基本概念

## 知识要点

**1.** 适合一定条件的事物的全体称为**集**或**集合**. 组成集合的事物叫做该集合的**元素**. 如果 $a$ 是集合 $A$ 的元素,就说 $a$ **属于** $A$,记作 $a \in A$;或者说 $A$ 包含 $a$,记作 $A \ni a$. 否则,就说 $a$ **不属于** $A$,记作 $a \notin A$;或者说 $A$ 不包含 $a$,记作 $A \not\ni a$. 含有有限多个元素的集合称为**有限集合**,由无限多个元素组成的集合称为**无限集合**,不含任何元素的集合称为**空集**,记为 $\varnothing$. 如果一个集合 $A$ 是由一切具有某一性质的元素所组成的,就用记号 $A=\{x \mid x$ 具有某一性质$\}$ 来表示.

如果集合 $A$ 的每一元素都是集合 $B$ 的元素,就说 $A$ 是 $B$ 的**子集**,记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$. 约定空集是任意集合的子集. 如果集合 $A$ 与 $B$ 是由完全相同的元素组成的,就说 $A$ 与 $B$ **相等**,记作 $A=B$.

由集合 $A$ 的一切元素和集合 $B$ 的一切元素所组成的集合叫做 $A$ 与 $B$ 的**并集**,记作 $A \cup B$;由集合 $A$ 与 $B$ 的公共元素所组成的集合叫做 $A$ 与 $B$ 的**交集**,记作 $A \cap B$.

设 $A$、$B$ 是两个集合,$A \times B=\{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$ 称为 $A$ 与 $B$ 的**笛卡儿积**(简称积).

**2.** 设 $A$、$B$ 是两个非空集合. $A$ 到 $B$ 的一个**映射**指的是一个对应法则,通过这个法则,对于集合 $A$ 中每一元素 $x$,有集合 $B$ 中一个唯一确定的元素 $y$ 与它对应. 常用字母 $f, g, \cdots$ 表示映射,用记号 $f: A \to B$ 表示 $f$ 是 $A$ 到 $B$ 的一个映射. 如果通过映射 $f$,与 $A$ 中元素 $x$ 对应的 $B$ 中元素是 $y$,就写为 $f: x \mapsto y$,$y$ 叫做元素 $x$ 在 $f$ 之下的**象**,记作 $f(x)$. $A$ 中一切 $x$ 的象作成 $B$ 的一个子集,用 $f(A)$ 表示,即 $f(A)=\{f(x) \mid x \in A\}$,它叫做 **$A$ 在 $f$ 之下的象**,或**映射 $f$ 的象**. 如果 $f(A)=B$,就称 $f$ 是 $A$ 到 $B$ 上的一个**满射**. 如果对于 $A$ 中任意两个元素 $x_1$ 和 $x_2$,只要 $x_1 \neq x_2$,就有 $f(x_1) \neq f(x_2)$,就称 $f$ 是 $A$ 到

$B$ 的一个**单射**. 如果 $f:A\to B$ 既是满射,又是单射,就称 $f$ 是 $A$ 到 $B$ 的**双射**. 如果存在集合 $A$ 到 $B$ 的一个双射,也说在 $A$ 与 $B$ 的元素之间存在着**一一对应**.

设 $f:A\to B$ 是 $A$ 到 $B$ 的一个映射,$g:B\to C$ 是 $B$ 到 $C$ 的一个映射,规定 $g\circ f:A\to C$;对一切 $x\in A$,$(g\circ f)(x)=g(f(x))$. $g\circ f$ 称为 $f$ 与 $g$ 的**合成**.

若给定映射 $f:A\to B$,$g:B\to C$,$h:C\to D$,那么 $h\circ(g\circ f)$ 和 $(h\circ g)\circ f$ 都是 $A$ 到 $D$ 的映射,且 $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$.

设 $j_A$、$j_B$ 分别是非空集合 $A$、$B$ 上的**恒等映射**,令 $f:A\to B$ 是集合 $A$ 到 $B$ 的一个映射,那么以下两个条件等价:(i) $f$ 是一个双射;(ii) 存在 $B$ 到 $A$ 的一个映射 $g$,使得 $g\circ f=j_A$,$f\circ g=j_B$,并且当条件(ii)成立时,映射 $g$ 是由 $f$ 唯一确定的. 满足条件(ii)的映射 $g:B\to A$ 叫做 $f$ 的**逆映射**,记作 $f^{-1}$.

设 $A$ 是一个非空集合,那么 $A\times A$ 到 $A$ 的映射叫做集合 $A$ 的一个**代数运算**.

**3.** 正整数集 $\mathbf{N}_+$ 的任意一个非空子集 $S$ 必含有一个最小数,也就是这样一个数 $a\in S$,对于任意 $c\in S$,都有 $a\leqslant c$.

设有一个与正整数 $n$ 有关的命题. 如果(i) 当 $n=1$ 时,命题成立;(ii) 假设 $n=k$ 时命题成立,则 $n=k+1$ 时命题也成立;那么这个命题对于一切正整数 $n$ 都成立. 这就是被广泛应用的**第一数学归纳法原理**. 至于第二数学归纳法原理,只要将上面的假定(ii)换成"假定命题对于一切小于 $k$ 的自然数成立,则命题对于 $k$ 也成立",其余不做任何改动即可得到.

**4.** 设 $a,b$ 是两个整数,如果存在一个整数 $d$,使得 $b=ad$,就说 $a$ **整除** $b$(或 $b$ 被 $a$ 整除),用符号 $a|b$ 表示,这时 $a$ 叫做 $b$ 的一个**因数**,$b$ 叫做 $a$ 的一个**倍数**. 如果 $a$ 不整除 $b$,就记作 $a\nmid b$. 整除有许多基本性质,如 $a|b$ 且 $b|a\Rightarrow b=a$ 或 $b=-a$ 等.

设 $a,b$ 是整数且 $a\neq0$,那么存在一对整数 $q$ 和 $r$,使得 $b=aq+r$ 且 $0\leqslant r<|a|$. 满足以上条件的整数 $q$ 和 $r$ 是唯一确定的. $q$ 和 $r$ 分别称为 $a$ 除 $b$ 所得的**商**和**余数**.

设 $a,b$ 是两个整数. 满足下列条件的整数 $d$ 叫做 $a$ 与 $b$ 的一个**最大公因数**:(i) $d|a$ 且 $d|b$;(ii) 如果 $c\in\mathbf{Z}$,且 $c|a$,$c|b$,则 $c|d$. $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的最大公因数类似定义. 如果 $d$ 是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的一个最大公因数,那么 $-d$ 也是一个最大公因数;$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的两个最大公因数至多相差一个符号,非负的那一个记作 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$. 如果 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)=1$,就说这 $n$ 个整数 $a_1,a_2,\cdots,$

$a_n$ 互素.

设 $d$ 是整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的一个最大公因数,那么存在整数 $t_1,t_2,\cdots,t_n$,使得 $t_1a_1+t_2a_2+\cdots+t_na_n=d$. $n$ 个整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 互素的充要条件是存在整数 $t_1,t_2,\cdots,t_n$,使得 $t_1a_1+t_2a_2+\cdots+t_na_n=1$.

一个正整数 $p>1$ 叫做素数,如果除 $\pm1$ 和 $\pm p$ 外,没有其他的因数. 一个素数如果整除两个整数 $a$ 与 $b$ 的乘积,那么它至少整除 $a$ 与 $b$ 中的一个.

**5.** 设 $S$ 是复数集 $\mathbf{C}$ 的一个非空子集,如果对于 $S$ 中任意两个数 $a,b$ 来说,$a+b,a-b,ab$ 都在 $S$ 内,那么就称 $S$ 是一个数环. 设 $F$ 是一个数环,又:(i) $F$ 含有一个不等于零的数;(ii) 如果 $a,b\in F$,且 $b\neq0$,则 $\frac{a}{b}\in F$;那么就称 $F$ 是一个数域. 任何数域都包含有理数域 $\mathbf{Q}$.

# 习题解答

## 1.1 集合

**1.** 设 $\mathbf{Z}$ 是一切整数的集合,$X$ 是一切不等于零的有理数的集合. $\mathbf{Z}$ 是不是 $X$ 的子集?

**答** 不是. 因为 $0\in\mathbf{Z}$,但 $0\notin X$.

**2.** 设 $a$ 是集合 $A$ 的一个元素,记号$\{a\}$表示什么? 写法$\{a\}\in A$ 对不对?

**答** $\{a\}$表示仅有一个元素 $a$ 构成的集合. $\{a\}\in A$ 写法不对,应为$\{a\}\subseteq A$.

**3.** 设 $A=\{x\mid x\in\mathbf{R},-1\leqslant x\leqslant1\}$;$B=\{x\mid x\in\mathbf{R},x>0\}$;$C=\{x\mid x\in\mathbf{R},-1<x<2\}$;写出 $A\cap(B\cup C)$和 $A\cup(B\cup C)$.

**解** 由 $B\cup C=\{x\mid x\in\mathbf{R},-1<x<+\infty\}$,进一步得到

$$A\cap(B\cup C)=\{x\mid x\in\mathbf{R},-1<x\leqslant1\};$$

$$A\cup(B\cup C)=\{x\mid x\in\mathbf{R},-1\leqslant x<+\infty\}.$$

**4.** 写出含有四个元素的集合$\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$的一切子集.

**解** 共有 $2^4$ 个子集. 它们是$\varnothing$,$\{a_1\}$,$\{a_2\}$,$\{a_3\}$,$\{a_4\}$,$\{a_1,a_2\}$,$\{a_1,a_3\}$,$\{a_1,a_4\}$,$\{a_2,a_3\}$,$\{a_2,a_4\}$,$\{a_3,a_4\}$,$\{a_1,a_2,a_3\}$,$\{a_1,a_2,a_4\}$,$\{a_1,a_3,a_4\}$,$\{a_2,a_3,a_4\}$,$\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$.

**5.** 设 $A$ 是含有 $n$ 个元素的集合,$A$ 中含有 $k$ 个元素的子集共有多少个?

**答**　共有$\binom{n}{k}$个.

**6. 下列论断哪些是对的,哪些是错的？对于错的举出反例,并且把错误的论断改正过来.**

(i) $x\in A\cup B$ 且 $x\notin A\Rightarrow x\in B$;

(ii) $x\in A$ 或 $x\in B\Rightarrow x\in A\cap B$;

(iii) $x\notin A\cap B\Rightarrow x\notin A$ 且 $x\notin B$;

(iv) $x\notin A\cup B\Rightarrow x\notin A$ 且 $x\notin B$.

**解**　(i)对.

(ii) 错. 例如,$A=\{1,2\}$,$B=\{2\}$,$1\in A$ 但 $1\notin A\cap B$. 应改为$x\in A$或 $x\in B\Rightarrow x\in A\cup B$.

(iii) 错. 例如,$A$、$B$ 同(ii)所设,$1\notin A\cap B$ 但 $1\in A$. 应改为$x\notin A\cap B\Rightarrow x\notin A$或 $x\notin B$.

(iv) 对.

**7. 证明下列等式:**

(i) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$;

(ii) $A\cap(A\cup B)=A$;

(iii) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

**证**　(i) $x\in(A\cup B)\cup C\Rightarrow x\in A\cup B$ 或 $x\in C$. 当 $x\in C$ 时,$x\in B\cup C$,从而 $x\in A\cup(B\cup C)$;当 $x\in A\cup B$ 时,$x\in A$ 或 $x\in B$,即有 $x\in A$ 或 $x\in B\cup C$,从而 $x\in A\cup(B\cup C)$,故对任意 $x\in(A\cup B)\cup C$,总有 $x\in A\cup(B\cup C)$,于是 $(A\cup B)\cup C\subseteq A\cup(B\cup C)$.

类似可证 $A\cup(B\cup C)\subseteq(A\cup B)\cup C$,故$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$.

(ii) 显然 $A\cap(A\cup B)\subseteq A$;又 $x\in A\Rightarrow x\in A\cup B$,所以 $x\in A\cap(A\cup B)$,于是 $A\subseteq A\cap(A\cup B)$,故 $A\cap(A\cup B)=A$.

(iii) $x\in A\cup(B\cap C)\Rightarrow x\in A$ 或 $x\in B\cap C$. 若 $x\in A$,则 $x\in A\cup B$且 $x\in A\cup C$,从而 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$;若 $x\in B\cap C$,则$x\in B$且 $x\in C$,从而 $x\in A\cup B$且 $x\in A\cup C$,于是 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$,这就证明了 $A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C)$. 反之,若 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$,则 $x\in A\cup B$ 且 $x\in A\cup C$. 由此可知 $x\in A$,或者 $x\in B$ 且 $x\in C$,即 $x\in B\cap C$. 于是 $x\in A\cup(B\cap C)$,这就证明了$(A\cup B)\cap(A\cup C)\subseteq A\cup(B\cap C)$. 综上所述,可得

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

**8.** 证明例 2 的第二个等式.

**证** 设 $x\in C-(A\cup B)$,那么 $x\in C$,但 $x\notin A\cup B$,$x\notin A$ 且 $x\notin B$,从而 $x\in C-A$且 $x\in C-B$,故 $x\in(C-A)\cap(C-B)$. 反之,设 $x\in(C-A)\cap(C-B)$,那么 $x\in C-A$ 且 $x\in C-B$,故 $x\in C$ 但 $x\notin A$ 且 $x\notin B$. 于是 $x\in C$ 且 $x\notin A\cup B$,从而 $x\in C-(A\cup B)$,所以 $C-(A\cup B)=(C-A)\cap(C-B)$.

**9.** 证明:$A\cap(B-C)=(A\cap B)-C$;$A-B=\varnothing\Leftrightarrow A\subseteq B$.

**证** 先证第一个结论. 如果 $x\in A\cap(B-C)$,那么 $x\in A$,同时 $x\in B-C$,由后者知 $x\in B$ 但 $x\notin C$. 于是 $x\in A\cap B$ 且 $x\notin C$,故 $x\in(A\cap B)-C$. 反之,如果 $x\in(A\cap B)-C$,那么 $x\in A\cap B$ 但 $x\notin C$,即 $x\in A$ 且 $x\in B$ 但 $x\notin C$,故 $x\in A\cap(B-C)$. 这就证明了第一个结论成立.

再证第二个结论. 如果 $A-B=\varnothing$,那么当 $x\in A$ 时,必有 $x\in B$(否则,$x\in A$ 且 $x\notin B$,就有 $x\in A-B$,这与 $A-B=\varnothing$ 矛盾),故 $A\subseteq B$. 反过来,如果 $A\subseteq B$,那么对任何 $x\in A$,都有 $x\in B$,因而不存在 $x$ 满足 $x\in A$ 但 $x\notin B$,故 $A-B=\varnothing$. 于是第二个结论成立.

## 1.2 映　　射

**1.** 设 $A$ 是前 100 个正整数所成的集,找一个 $A$ 到自身的映射,但不是满射.

**解** 令 $f:A\to A$,$f(x)=|x-50|+1$. 对任意 $x\in A$,有唯一 $f(x)\in A$ 与之对应,故 $f$ 是 $A$ 到自身的映射,但 $f(A)\neq A$. 例如,不存在 $x\in A$,使 $f(x)=100$,故 $f$ 不是满射.

**2.** 找一个全体实数到全体正实数集的双射.

**解** 对任意 $x\in\mathbf{R}$,令 $f:x\mapsto 2^x$,则 $f$ 是全体实数 $\mathbf{R}$ 到全体正实数 $\mathbf{R}_+$ 的映射. 若 $2^{x_1}=2^{x_2}$,则 $2^{x_1-x_2}=1\Rightarrow x_1=x_2$,所以 $f$ 是单射. 又对任意 $y\in\mathbf{R}_+$,存在 $x=\log_2 y\in\mathbf{R}$,使 $f(x)=f(\log_2 y)=2^{\log_2 y}=y$,所以 $f$ 是满射. 综上所述知 $f$ 为双射.

**3.** $f:x\mapsto\dfrac{1}{x}$是不是全体实数集到自身的映射?

**答** 不是. 因为 $x=0$ 时,$f(0)$没有意义.

**4.** 设 $f$ 定义如下:

$$f(x)=\begin{cases}x, & x<0,\\ 1, & 0\leqslant x<1,\\ 2x-1, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

$f$ 是不是 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的映射？是不是单射？是不是满射？

**答** $f$ 是 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的映射，但不是单射（例如，$f(0)=f\left(\frac{1}{2}\right)=1$），也不是满射（例如，不存在 $x\in\mathbf{R}$，使 $f(x)=0$）.

**5.** 令 $A=\{1,2,3\}$，写出 $A$ 到自身的一切映射.

**解** 记映射 $f:1\mapsto i_1,2\mapsto i_2,3\mapsto i_3$ 为 $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ i_1 & i_2 & i_3\end{pmatrix}$，其中 $i_1,i_2,i_3\in A$，它们可以相同，也可以不同. 因此，映射的总数是 1,2,3 三个数允许重复排列的总数，即 $3^3=27$ 个；当且仅当 $i_1,i_2,i_3$ 互不相同时映射是双射，共有 $3!=6$ 个.

**6.** 设 $a,b$ 是任意两个实数，且 $a<b$，试找出一个 $[0,1]$ 到 $[a,b]$ 的双射.

**解** 设 $x\in[0,1]$，令 $f:x\mapsto a+(b-a)x$，则 $f$ 是 $[0,1]$ 到 $[a,b]$ 的映射. 若 $f(x_1)=f(x_2)$，则有

$$a+(b-a)x_1=a+(b-a)x_2\Rightarrow x_1=x_2,$$

可见 $f$ 是单射. 又对任意 $y\in[a,b]$，有

$$\frac{y-a}{b-a}\in[0,1],\quad f\left(\frac{y-a}{b-a}\right)=a+(b-a)\cdot\frac{y-a}{b-a}=y,$$

则 $f$ 也是满射. 因而 $f$ 是 $[0,1]$ 到 $[a,b]$ 的双射.

**7.** 举例说明：对于一个集合 $A$ 到自身的两个映射 $f$ 和 $g$ 来说，$f\circ g$ 和 $g\circ f$ 一般不相等.

**解** 取 $A=\mathbf{R}$. 设映射 $f:x\mapsto x+1$，$g:x\mapsto x^3$. 于是 $g\circ f:x\mapsto(x+1)^3$，而 $f\circ g:x\mapsto x^3+1$，可见 $f\circ g$ 与 $g\circ f$ 一般不相等.

**8.** 设 $A$ 是全体正实数所成的集合，令 $f:x\mapsto x$，$g:x\mapsto\frac{1}{x}$，$x\in A$.

(i) $g$ 是不是 $A$ 到 $A$ 的双射？

(ii) $g$ 是不是 $f$ 的逆映射？

(iii) 如果 $g$ 有逆映射，$g$ 的逆映射是什么？

**答** (i) $g$ 是 $A$ 到 $A$ 的双射. 因为若 $x_1\neq x_2$，则 $\frac{1}{x_1}\neq\frac{1}{x_2}$，故 $g$ 是单射；又对任意 $x\in A$，有 $\frac{1}{x}\in A$，使 $g\left(\frac{1}{x}\right)=x$，故 $g$ 是满射. 因而 $g$ 是双射.

(ii) 因为一般地 $(g\circ f)(x)=g(x)=\frac{1}{x}\neq x$，即 $g\circ f\neq j_A$，$g$ 不是 $f$ 的逆映射.

(iii) 对任意 $x\in A$, $(g\circ g)(x)=g\left(\frac{1}{x}\right)=x$,所以 $g$ 的逆映射是 $g$.

**9.** 设 $f:A\to B$, $g:B\to C$ 是映射,又令 $h=g\circ f$,证明:

(i) 如果 $h$ 是单射,那么 $f$ 也是单射;

(ii) 如果 $h$ 是满射,那么 $g$ 也是满射;

(iii) 如果 $f$、$g$ 都是双射,那么 $h$ 也是双射,并且

$$h^{-1}=(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}.$$

**证** (i) 反证法.若 $f$ 不是单射,则有 $x_1,x_2\in A$, $x_1\neq x_2$,使 $f(x_1)=f(x_2)$.于是

$$h(x_1)=(g\circ f)(x_1)=g(f(x_1))=g(f(x_2))=(g\circ f)(x_2)=h(x_2),$$

说明 $h$ 也不是单射,与假设矛盾.

(ii) $h$ 是满射 $\Rightarrow$ 对任意 $z\in C$,有 $x\in A$,使 $h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))=z$,即有 $y=f(x)\in B$,使 $g(y)=z$,所以 $g$ 也是满射.

(iii) 设 $z\in C$,因 $g$ 是满射,存在 $y\in B$,使 $g(y)=z$.又因 $f$ 是满射,存在 $x\in A$,使 $f(x)=y$.所以 $h(x)=(g\circ f)(x)=g(y)=z$, $h$ 是满射.又若 $x_1,x_2\in A$,且 $x_1\neq x_2$,由于 $f$ 是单射, $f(x_1)\neq f(x_2)$;再由 $g$ 是单射知, $g(f(x_1))\neq g(f(x_2))$,即

$$(g\circ f)(x_1)\neq (g\circ f)(x_2),$$

所以 $h(x_1)\neq h(x_2)$, $h$ 是单射.综上可知 $h$ 是双射.注意

$$h\circ(f^{-1}\circ g^{-1})=(g\circ f)\circ(f^{-1}\circ g^{-1})=g\circ(f\circ f^{-1})\circ g^{-1}=j_C,$$

同理可证
$$(f^{-1}\circ g^{-1})\circ h=j_A,$$

其中 $j_C$, $j_A$ 分别表示 $C$ 和 $A$ 的恒等映射,所以 $h^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.

**10.** 判断下列规则是不是所给的集合 $A$ 的代数运算:

| | 集 合 $A$ | 规 则 |
|---|---|---|
| (1) | 全体整数 | $(a,b)\mapsto a^b$ |
| (2) | 全体整数 | $(a,b)\mapsto -ab$ |
| (3) | 全体有理数 | $(a,b)\mapsto 1$ |
| (4) | 全体实数 | $(a,b)\mapsto \frac{a}{b}$ |

**解** (1)不是.因 $(2,-1)\mapsto 2^{-1}\notin A$.

(2)是.

(3)是.

(4)不是.因(2,0)无对应元素.

## 1.3 数学归纳法

**1.** 证明:$1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+n\cdot n!=(n+1)!-1$.

**证** 用数学归纳法.当 $n=1$ 时,$1\cdot 1!=1=(1+1)!-1$,命题成立;假设当 $n=k$ 时命题成立,即有

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+k\cdot k!=(k+1)!-1,$$

于是,当 $n=k+1$ 时,有

$$\begin{aligned}&1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+k\cdot k!+(k+1)\cdot(k+1)!\\&=[(k+1)!-1]+(k+1)\cdot(k+1)!\\&=(k+2)\cdot(k+1)!-1=[(k+1)+1]!-1,\end{aligned}$$

命题成立,故命题对一切正整数 $n$ 成立.

**2.** 设 $h$ 是一个正整数,证明 $(1+h)^n\geqslant 1+nh$($n$ 是任意自然数).

**证** 用数学归纳法.当 $n=1$ 时,$(1+h)^1=1+h\geqslant 1+1\cdot h$,命题成立;假设当 $n=k$ 时命题成立,即 $(1+h)^k\geqslant 1+kh$,则

$$\begin{aligned}(1+h)^{k+1}&=(1+h)^k(1+h)\geqslant(1+kh)(1+h)\\&=1+(k+1)h+kh^2\geqslant 1+(k+1)h,\end{aligned}$$

命题也成立,故命题对一切正整数 $n$ 成立.

**3.** 证明二项式定理:$(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\cdots+\binom{n}{r}a^{n-r}b^r+\cdots+b^n$,其中 $\binom{n}{r}=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}$.

**证** 用数学归纳法.

当 $n=1$ 时,$(a+b)^1=a+b=a^1+\binom{1}{1}a^{1-1}b$,命题成立;假设当 $n=k$ 时,命题成立,即

$$(a+b)^k=a^k+\binom{k}{1}a^{k-1}b+\cdots+\binom{k}{r-1}a^{n-(r-1)}b^{r-1}+\binom{k}{r}a^{k-r}b^r+\cdots+b^k,$$

于是 $(a+b)^{k+1}=(a+b)^k\cdot(a+b)$

$$=\left[a^k+\binom{k}{1}a^{k-1}b+\cdots+\binom{k}{r-1}a^{k-r+1}b^{r-1}+\binom{k}{r}a^{k-r}b^r+\cdots+b^k\right](a+b)$$

$$=a^{k+1}+\left[1+\binom{k}{1}\right]a^kb+\cdots+\left[\binom{k}{r-1}+\binom{k}{r}\right]a^{k-r+1}b^r+\cdots+b^{k+1}$$

$$=a^{k+1}+\binom{k+1}{1}a^kb+\cdots+\binom{k+1}{r}a^{(k+1)-r}b^r+\cdots+b^{k+1},$$

命题成立,故命题对一切正整数 $n$ 成立.

**4.** 证明第二数学归纳法原理(参见教材中 1.3 节定理 1.3.2).

**证** 用反证法.假设命题不是对一切正整数都成立.令 $S$ 表示使命题不成立的正整数所成的集合,那么 $S\neq\varnothing$.于是由最小数原理可知,$S$ 中有最小数 $h$.因为命题对于 $n=1$ 成立,所以 $h\neq1$,从而命题对于一切小于 $h$ 的自然数成立.再由教材中定理 1.3.2 之条件 2°:"假设命题对于一切小于 $k$ 的自然数成立,则命题对于 $k$ 也成立",于是 $n=h$ 时命题也成立,因此 $h\notin S$,导致矛盾.

**5.** 证明:含有 $n$ 个元素的集合的一切子集的个数等于 $2^n$.

**证** 用数学归纳法.设 $A$ 为含有 $n$ 个元素的集合.当 $n=1$ 时,$A$ 的全部子集只有 $\varnothing$ 和 $A$,共有 $2=2^1$ 个,命题成立.假设 $n=k$ 时命题成立,即 $A$ 的一切子集共有 $2^k$ 个,考虑 $n=k+1$ 的情形,取 $A$ 中唯一元素记为 $b$,那么 $A$ 的一切子集分为包含 $b$ 和不包含 $b$ 的两种.$A$ 中 $b$ 以外的元素有 $k$ 个,设由它们构成的子集为 $A_1$.显然,$A_1$ 的一切子集就是 $A$ 的不包含 $b$ 的一切子集,有 $2^k$ 个;将 $b$ 与 $A_1$ 的一切子集逐个作并集,就得到 $A$ 中包含 $b$ 的一切子集,也有 $2^k$ 个,故 $A$ 的一切子集总共有 $2^k+2^k=2^{k+1}$ 个,命题成立.故命题对一切正整数 $n$ 成立.

## 1.4 整数的一些整除性质

**1.** 对于下列的整数 $a,b$,分别求出以 $a$ 除 $b$ 所得的商和余数:

(i) $a=17,b=-235$; (ii) $a=-8,b=2$;

(iii) $a=-9,b=-5$; (iv) $a=-7,b=-58$.

**解** (i) 由 $-235=17\times(-14)+3$,得商 $q=-14$,余数 $r=3$.

(ii) 由 $2=(-8)\times0+2$,得 $q=0,r=2$.

(iii) 由 $-5=(-9)\times1+4$,得 $q=1,r=4$.

(iv) 由 $-58=(-7)\times9+5$,得 $q=9,r=5$.

**2.** 设 $a,b$ 是整数且不全为 0,而 $a=da_1,b=db_1,d,a_1,b_1\in\mathbf{Z}$.证明:$d$ 是 $a$ 与 $b$ 的一个最大公因数必要且只要 $(a_1,b_1)=1$.