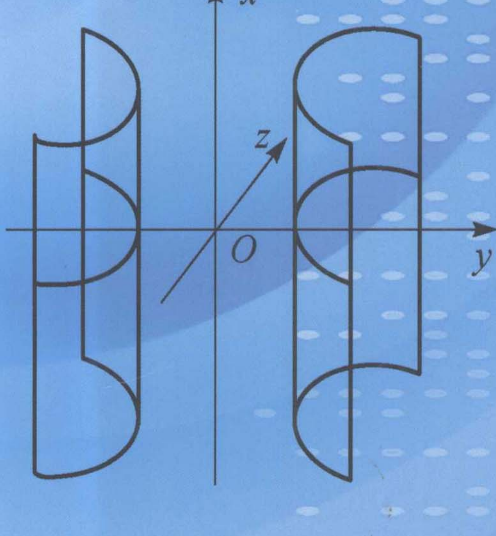
高等职业教育“十二五”创新型规划教材

专业数学

ZHUANYE SHUXUE

◎主 编 郭先平 代世花 李春华



高等职业教育"十二五"创新型规划教材

专 业 数 学

主 编 郭先平 代世花 李春华

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

专业数学包括线性代数、多元微积分、概率统计三部分的内容，涵盖了高职院校相关专业学生学习专业课程必须掌握的数学知识. 在教材编写过程中，我们始终坚持以“基础、适度、够用”“突出职能教育”为原则，合理安排知识内容的结构、层次分布，凸显为专业服务的数学应用功能.

教材所选内容难易度适中，以基础、够用为度，贴近高职院校学生的实际水平. 教材以基础、提高、应用为编写主线设置教学内容，精选例题、习题，每章加入了与专业、实际生活相关的知识应用例题，增加学生对课程的了解，提升学生学习本课程的动力，突出对学生实践应用能力的培养.

本书内容包括行列式、矩阵、n维向量与线性方程组、特征值和特征向量、向量代数与空间图形、多元函数微分学、二重积分、事件与概率、随机变量及其分布、数理统计.

本书可作为高职理工类的数学教材及辅导参考书.

图书在版编目(CIP)数据

专业数学/郭先平，代世花，李春华主编. —北京：北京理工大学出版社，2011. 1

ISBN 978-7-5640-4184-7

Ⅰ. ①专…　Ⅱ. ①郭…②代…③李…　Ⅲ. ①工程数学-高等学校：技工学校-教材　Ⅳ. ①TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 005493 号

出版发行 / 北京理工大学出版社
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)　68944990(批销中心)　68911084(读者服务部)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 三河市南阳印刷有限公司
开　　本 / 710 毫米×1000 毫米　1/16
印　　张 / 21.75
字　　数 / 407 千字　　　　责任编辑　袁　媛
版　　次 / 2011 年 1 月第 1 版　2011 年 1 月第 1 次印刷　　　　张慧峰
印　　数 / 1～4 000 册　　　　责任校对　王　丹
定　　价 / 34.50 元　　　　责任印制　边心超

前　言

数学是许多学科、研究领域应用的重要工具，是学习相关专业知识的基础. 为配合国家“十二五”高职教育专业建设的需要，打造具有高质量、高适应性的高职理工类特色教材，我们组织编写了本书. 本书包括线性代数、多元微积分和概率统计三部分内容，涵盖了高职院校相关专业学生学习专业课程必须掌握的数学知识. 在教材编写过程中，我们始终坚持以“基础、适度、够用”及“突出职能教育”为原则，针对高职院校教学实际和教学目的，合理安排知识内容的结构、层次分布，凸显为专业服务的数学应用功能.

本教材具有下列几个特点.

(1) 教材的知识量够用，难易度适中，知识结构体现层次性. 教材所选内容既贴近高职学生的实际水平，又能充分满足高职院校专业课程所需要的数学知识.

(2) 教材内容通俗易懂，陈述简洁、清晰、明了，同时又不乏科学性、系统性、严谨性，适宜师生选用.

(3) 教材以基础—提高—应用为主线，科学设置知识内容，精选例题、习题.

(4) 每章加入与专业、实际生活相关的知识应用例题，增加了学生对课程的了解，提升了学生学习本课程的动力，使学生在明确为什么要学习该课程的同时，增强了实践应用能力.

(5) 教材渗透建模思想，潜移默化地培养学生应用数学知识处理实际问题的能力.

本教材第 1～4 章由郭先平编写，第 5～7 章由代世花编写，第 8～10 章、附表及参考文献由李春华编写. 全书由郭先平统稿. 本教材的编写得到院系领导的大力支持，在此表示深深的感谢！鉴于编者自身的能力及水平有限，教材编写中或许会出现某些错误、缺点，恳请读者批评、指正.

编　者

目　　录

第一章　行　列　式

行列式是一种数学计算工具，其概念的最初引进是在解线性方程组的过程中，之后，行列式在许多领域逐渐被使用，具有重要的意义和作用.

§1.1　行列式的定义、性质

一、行列式的定义

通过中学阶段的学习，我们已经掌握二元、三元线性方程组的基本解法. 下面由一个简单的二元线性方程组的求解过程引出行列式的定义.

例 1　解线性方程组$\begin{cases} 2x+5y=3 & (1) \\ 3x+6y=1 & (2) \end{cases}$.

解　由(1)×6+(2)×(−5)，得

$$x=\frac{3\times 6+1\times(-5)}{2\times 6+3\times(-5)}=-\frac{13}{3}.$$

由(1)×(−3)+(2)×2，得

$$y=\frac{3\times(-3)+1\times 2}{6\times 2+5\times(-3)}=\frac{7}{3}.$$

观察 x 与 y 的分母 $2\times6-3\times5$ 与其在方程组中的位置可以得到行列式的定义.

1. 二阶行列式的定义

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

2. 三阶行列式的定义

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},$$

其中 a_{ij} 表示行列式第 i 行第 j 列的元素. 在行列式中划去 a_{ij} 所在的行和列的元素，余下的元素按原先的次序构成一个低一阶的行列式，称为元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}，并称 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为该元素的代数余子式，记为 A_{ij}，即 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$. 如三阶行列式中 a_{23} 的余子式为

$$M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

代数余子式为

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

a_{31}的余子式为

$$M_{31}=\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix},$$

代数余子式为

$$A_{31}=(-1)^{3+1}M_{31}=\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}.$$

拉普拉斯定理　三阶行列式的值等于它的任意一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积的和,即

$$\begin{aligned}|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} &= a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=\sum_{j=1}^{3}a_{1j}A_{1j}\\ &= a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}=\sum_{j=1}^{3}a_{2j}A_{2j}\\ &= a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}=\sum_{j=1}^{3}a_{3j}A_{3j}\\ &= a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}=\sum_{i=1}^{3}a_{i1}A_{i1}\\ &= a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32}=\sum_{i=1}^{3}a_{i2}A_{i2}\\ &= a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33}=\sum_{i=1}^{3}a_{i3}A_{i3}.\end{aligned}$$

简写为
$$|A|=\sum_{j=1}^{3}a_{ij}A_{ij}\quad(i=1,2,3);$$

或
$$|A|=\sum_{i=1}^{3}a_{ij}A_{ij}\quad(j=1,2,3).$$

推论　三阶行列式的某一行(列)的元素与另一行(列)元素的代数余子式乘积的和等于零,即

$$a_{i1}A_{s1}+a_{i2}A_{s2}+a_{i3}A_{s3}=0\quad(i\neq s);$$
$$a_{1j}A_{1t}+a_{2j}A_{2t}+a_{3j}A_{3t}=0\quad(j\neq t).$$

3. n 阶行列式定义

由 $n\times n$(n 为正整数)个数构成的算式

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

或

$$|A|=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\quad(j=1,2,\cdots,n)$$

称为 n 阶行列式，其中 A_{ij} 为 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 的代数余子式，是 $n-1$ 阶行列式.

说明：拉普拉斯定理及推论仍适用于 n 阶行列式.

4. 转置行列式

将行列式 $|A|$ 中的行以列的形式放置，得到的新行列式叫原行列式 $|A|$ 的转置行列式，记为 $|A|^{\mathrm{T}}$，

即
$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},$$

则
$$|A|^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{21}&a_{31}\\a_{12}&a_{22}&a_{32}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{vmatrix}.$$

二、行列式的性质

(1) 行列式与其转置行列式的值相等，即 $|A|=|A|^{\mathrm{T}}$.

(2) 互换行列式中任意两行(列)，行列式仅改变符号.

(3) 若行列式中有两行(列)对应元素相等，则此行列式等于零.

(4) 若行列式某一行(列)的全部元素为零，则此行列式为零.

(5) 用数 k 乘行列式的某一行(列)等于用 k 乘此行列式，即

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ka_{21}&ka_{22}&\cdots&ka_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

或者说，行列式的某一行(列)有公因子 k，则 k 可提到行列式外面.

推论 若行列式有两行(列)对应元素成比例，则行列式等于零.

(6) 若行列式中某一行(列)的元素均可分解成两元素之和，则该行列式可分解为相应的两个行列式之和，即

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\b_{21}+c_{21}&b_{22}+c_{22}&\cdots&b_{2n}+c_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

(7) 行列式的某一行(列)乘数 k 加到另一行(列),行列式不变.

用 r_i 表示第 i 行,c_j 表示第 j 列,$kr_i+r_j(kc_i+c_j)$表示第 i 行(列)乘数 k 加到第 j 行(列).

§1.2　行列式的运算

三阶行列式的几种计算方法如下.

1. 对角线法

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

此方法只适用于二阶、三阶行列式.

例 1　计算行列式$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 7 \end{vmatrix}$.

解
$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 7 \end{vmatrix}=5\times7-8\times2=19.$$

例 2　计算行列式$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & -9 \end{vmatrix}$.

解
$$|A|=\left|\begin{matrix} 1 & -4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & -9 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & -4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{matrix}$$
$$=1\times5\times(-9)+(-4)\times8\times3+7\times2\times6-3\times5\times7-6\times8\times1$$
$$-(-9)\times2\times(-4)=-282.$$

2. 降阶法(利用拉普拉斯定理展开法)

例 3　计算行列式$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & -9 \end{vmatrix}$.

解
$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & -9 \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$
$$=1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & -9 \end{vmatrix}+(-4)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & -9 \end{vmatrix}+7\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$$
$$=-93-168-21=-282.$$

例 4　计算行列式$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & 8 \\ -1 & 6 & 0 \end{vmatrix}$.

解 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & 8 \\ -1 & 6 & 0 \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$

$$= 3\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 0\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 6\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= -24+0+36=12.$$

例 5 计算行列式 $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & 5 & 8 \\ 3 & 3 & 6 & -9 \end{vmatrix}$.

解 $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & 5 & 8 \\ 3 & 3 & 6 & -9 \end{vmatrix} = -2\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & -9 \end{vmatrix} = 564.$

例 6 证明上三角行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}.$

证明 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按 } c_1 \text{ 展开}} a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{\text{按 } c_1 \text{ 展开}} a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}.$$

同理得下三角行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}.$

类似地，n 阶上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

n 阶下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

n 阶对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

3. **性质法**

性质法是利用行列式的性质直接计算出结果，或将行列式化成三角行列式或含零比较多的行(列)后，再按拉普拉斯定理展开计算行列式的方法.

例 7　计算行列式 $\begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 6 \\ a-3 & b-5 & c+4 & d-7 \\ 2a & 2b & 2c & 2d \\ 3 & 5 & -4 & 7 \end{vmatrix}$.

解

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 6 \\ a-3 & b-5 & c+4 & d-7 \\ 2a & 2b & 2c & 2d \\ 3 & 5 & -4 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按性质 6}} \begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 6 \\ a & b & c & d \\ 2a & 2b & 2c & 2d \\ 3 & 5 & -4 & 7 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 6 \\ 3 & 5 & -4 & 7 \\ 2a & 2b & 2c & 2d \\ 3 & 5 & -4 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按性质 3 及性质 5}} 0.$$

例 8　计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & 7 \\ -3 & -3 & 8 & -9 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

解法一

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & 7 \\ -3 & -3 & 8 & -9 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{-2r_1+r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ -3 & -3 & 8 & -9 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[-r_1+r_4]{3r_1+r_3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal[-r_2+r_4]{3r_2+r_3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{5r_3+r_4}\begin{vmatrix}1&2&-1&4\\0&-1&-2&-1\\0&0&-1&0\\0&0&0&-4\end{vmatrix}=-4.$$

解法二 $\begin{vmatrix}1&2&-1&4\\2&3&-4&7\\-3&-3&8&-9\\1&1&2&-1\end{vmatrix}\xlongequal[\substack{-2c_1+c_3\\c_1+c_4}]{-c_1+c_2}\begin{vmatrix}1&1&-3&5\\2&1&-8&9\\-3&0&14&-12\\1&0&0&0\end{vmatrix}$

$$\xlongequal{按 r_4 展开}1\times(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}1&-3&5\\1&-8&9\\0&14&-12\end{vmatrix}\xlongequal{-r_2+r_1}-\begin{vmatrix}0&5&-4\\1&-8&9\\0&14&-12\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{按 c_1 展开}\begin{vmatrix}5&-4\\14&-12\end{vmatrix}=-4.$$

例 9 计算行列式$\begin{vmatrix}a&0&0&b\\0&c&d&0\\0&e&f&0\\g&0&0&h\end{vmatrix}$.

解 $\begin{vmatrix}a&0&0&b\\0&c&d&0\\0&e&f&0\\g&0&0&h\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}c&d&0\\e&f&0\\0&0&h\end{vmatrix}-b\begin{vmatrix}0&c&d\\0&e&f\\g&0&0\end{vmatrix}$

$$=ah\begin{vmatrix}c&d\\e&f\end{vmatrix}-bg\begin{vmatrix}c&d\\e&f\end{vmatrix}=ahcf-ahed-bgcf+bged.$$

例 10 计算行列式$\begin{vmatrix}b&a&a&a\\a&b&a&a\\a&a&b&a\\a&a&a&b\end{vmatrix}$.

解 该行列式从行(列)看,每一行(列)都含三个 a 及一个 b,

所以 $\begin{vmatrix}b&a&a&a\\a&b&a&a\\a&a&b&a\\a&a&a&b\end{vmatrix}\xlongequal{c_2,c_3,c_4 均加到 c_1}\begin{vmatrix}3a+b&a&a&a\\3a+b&b&a&a\\3a+b&a&b&a\\3a+b&a&a&b\end{vmatrix}$

$$=(3a+b)\begin{vmatrix}1&a&a&a\\1&b&a&a\\1&a&b&a\\1&a&a&b\end{vmatrix}\xlongequal{-r_1 分别加到 r_2,r_3,r_4}(3a+b)\begin{vmatrix}1&a&a&a\\0&b-a&0&0\\0&0&b-a&0\\0&0&0&b-a\end{vmatrix}$$

$$=(3a+b)(b-a)^3.$$

例 11 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 2 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$

解 原式$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{2r_1+r_4} \frac{1}{36}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

$$=(-1)^{1+2}\frac{1}{36}\begin{vmatrix} -1 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} \xlongequal{-6r_2+r_1} \frac{1}{36}\begin{vmatrix} 7 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{36}\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = \frac{23}{36}.$$

以上是几个反映行列式基本计算方法的简单例题.而实际行列式的计算要综合许多知识才能完成.下面给出几道有技巧性、综合性的例题,以拓展学生的思维,增强解题的能力.

例 12 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \end{vmatrix}$.

解

$$\text{原式} \xlongequal{-c_1+\text{各列}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \end{vmatrix} \xlongequal{-c_2+\text{后面各列}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 2 & \cdots & n-2 \end{vmatrix}$$

$$=\cdots=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=1.$$

例 13 计算 3 阶范德蒙行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$.

解 原式 $\xlongequal[-c_1+c_2]{-c_2+c_3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-b \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-b^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ a^2 & b+a & c+b \end{vmatrix}$

$$= (b-a)(c-b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ a^2 & b+a & c-a \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-b)(c-a).$$

类似可得 n 阶范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= (x_n - x_1)(x_n - x_2)\cdots(x_n - x_{n-2})(x_n - x_{n-1}) \cdot (x_{n-1} - x_1)$$
$$(x_{n-1} - x_2)\cdots(x_{n-1} - x_{n-2})\cdots(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_2 - x_1)$$
$$= \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j).$$

这里 i,j 从 1 一直变到 n，且必须保持 $j<i$ 的关系(证明略).

例 14 设 α,β,γ 是方程 $x^3+px+q=0$ 的根，

计算行列式 $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix}$ 的值.

解 因为 α,β,γ 是方程 $x^3+px+q=0$ 的根，故有

$$x^3 + px + q = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$
$$= x^3 - (\alpha+\beta+\gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma.$$

比较上式两边同次幂的系数得

$$(\alpha+\beta+\gamma) = 0, \quad \alpha\beta\gamma = -q,$$

所以行列式 $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} \xlongequal{r_2+r_3+r_1} \begin{vmatrix} \alpha+\beta+\gamma & \alpha+\beta+\gamma & \alpha+\beta+\gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} = 0.$$

例 15 已知 1998,2196,2394,1818 都能被 18 整除，

证明行列式$\begin{vmatrix} 1 & 9 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 2 & 3 & 9 & 4 \\ 1 & 8 & 1 & 8 \end{vmatrix}$也能被 18 整除.

证明 行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 9 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 2 & 3 & 9 & 4 \\ 1 & 8 & 1 & 8 \end{vmatrix} \xlongequal{1000c_1+100c_2+10c_3+c_4} \begin{vmatrix} 1 & 9 & 9 & 1998 \\ 2 & 1 & 9 & 2196 \\ 2 & 3 & 9 & 2394 \\ 1 & 8 & 1 & 1818 \end{vmatrix}$$

其化简后行列式的第四列各数均可被 18 整除，即行列式可以提出因子 18，所以，该行列式能被 18 整除.

例 16 解方程$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 2 & 2 \\ 2 & 2 & x & 3 \\ 3 & 3 & 3 & x \end{vmatrix}=0.$

解法一 因为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 2 & 2 \\ 2 & 2 & x & 3 \\ 3 & 3 & 3 & x \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{-2r_1+r_3 \\ -3r_1+r_4}]{-r_1+r_2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x-2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix}$$

$$=(x-1)(x-2)(x-3).$$

令$(x-1)(x-2)(x-3)=0$，则方程的解为 $x=1,x=2,x=3$.

解法二 利用行列式两行相等或两行成比例，则行列式等于零的性质，观察、分析得出结果.

观察当 $x=1$ 时，行列式第一列与第二列对应元素相等，行列式等于零，所以 $x=1$ 为方程的解.

同理得 $x=2,x=3$ 为方程的解. 又因为该方程是三次方程，它最多有三个根，所以 $x=1,x=2,x=3$ 为方程的全部解.

§1.3 克莱姆法则

定理(克莱姆法则) 若含 n 个未知量 n 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{1—1}$$

的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0,$$

则方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D},$$

其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是用(1—1)中常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 替换 D 中第 j 列元素所得到的行列式，即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_{1j} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & b_{2j} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_{nj} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例 1　解方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=4 \\ x_1+x_2+x_4=4 \\ 3x_1+2x_2+5x_3+10x_4=12 \\ 4x_1+5x_2+9x_3+13x_4=18 \end{cases}$.

解　因为方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 10 \\ 4 & 5 & 9 & 13 \end{vmatrix}\xlongequal[-c_1+c_4]{-c_1+c_2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 9 & 9 \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & 7 \\ 1 & 9 & 9 \end{vmatrix}\xlongequal[r_2+r_3]{}-\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & 7 \\ 0 & 14 & 16 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 14 & 16 \end{vmatrix}=-4\neq 0,$$

所以，方程组有唯一解，而

$$D_1=\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 12 & 2 & 5 & 10 \\ 18 & 5 & 9 & 13 \end{vmatrix}\xlongequal[-c_2+c_4]{-4c_2+c_1}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 5 & 8 \\ -2 & 5 & 9 & 8 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 8 \\ -2 & 9 & 8 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 8 \\ -2 & 1 & 8 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=-4.$$

同理　$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 12 & 5 & 10 \\ 4 & 18 & 9 & 13 \end{vmatrix}=-8,\quad D_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 12 & 10 \\ 4 & 5 & 18 & 13 \end{vmatrix}=4,$