博弈论与非线性分析续论

俞 建 著

科 学 出 版 社

博弈论与非线性分析续论

俞　建　著

科　学　出　版　社

北　京

内 容 简 介

本书是《博弈论与非线性分析》的续论，主要应用非线性分析的理论和方法，对博弈论中平衡点的存在性、唯一性和稳定性进行比较系统的研究．由于平衡点的研究与最优化问题、不动点问题、变分与拟变分不等式问题等都有密切联系，本书也对这些非线性问题进行比较深入的研究．此外，还研究了 Bayes 博弈、轻微利他平衡点和平衡点计算等较新的课题．内容包括：集值映射与不动点定理、平衡点的存在性、平衡点的稳定性与唯一性、向量平衡问题、有限理性与非线性问题解集的稳定性、非线性问题的良定性．

本书可作为基础数学、应用数学及经济管理有关专业的高年级本科生或研究生教材，也可供从事数学及经济管理专业的科研工作者学习参考．

图书在版编目(CIP)数据

博弈论与非线性分析续论 / 俞　建著. —北京: 科学出版社, 2011

ISBN 978-7-03-032393-4

I. 博… II. ①俞… III. ①博弈论②非线性-泛函分析 IV. ①0225②0177.91

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第191842号

责任编辑：赵彦超　徐园园 / 责任校对：陈玉凤

责任印制：钱玉芬/ 封面设计：陈　敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2011 年 10 月第　一　版　开本: B5 (720 × 1000)

2011 年 10 月第一次印刷　印张: 13

印数: 1—2 000　字数: 252 000

定价: 45. 00 元

前　　言

《博弈论与非线性分析》一书[1]出版已有三年多了，反映尚可，去年又加印了. 读者要问，为什么还要接着写这本“续论”呢？理由有以下三点：第一是博弈论太有用了，不仅对经济学如此，因为它抽象地分析利益冲突与合作问题，其应用就远远超出了经济学的范围. 我国伟大的史学家司马迁在“史记”中说过：“天下熙熙，皆为利来；天下攘攘，皆为利往.” 试问当今离开了利益冲突与合作的分析，我们又如何能够研究经济乃至于整个社会问题呢？第二是目前关于博弈论的著作，无论国内还是国外的，绝大多数都是由经济学家写的（虽然这些作者一般都具有一定的数学背景），因此主要是满足经济学研究的需要. 博弈论（也称对策论）是运筹学的一个重要分支，它是由两位数学大师 von Neumann 和 Nash 创立的，为什么现在就不能从数学的角度来研究博弈论呢？这样不仅在思想上更清晰，逻辑上更严格，而且也更直接更漂亮. 第三点理由是完全个人的，《博弈论与非线性分析》的出版较为匆忙，主要是对自己与合作者以及学生以往一些工作的总结，可以说意犹未尽. 这三年多来，阅读了大量文献，加深了一些认识，当然也有了不少新的研究成果，希望与大家分享，所以就有了这本新书.

大家知道，博弈论是随着 von Neumann 和 Morgenstern 在 1944 年出版的名著《博弈论与经济行为》[2] 而宣告诞生的. 在该书的序言中，他们指出“经济与社会问题可以从这个角度得到最好的解释”，而在该书的第一章中，他们又指出“博弈论是建立经济理论的最恰当的方法”. 博弈论与经济学的关系如此密切，原因很简单，它们都强调个人理性，即有约束的最优化行为，并在此基础上进行平衡分析.

博弈论与非线性分析的关系又如何呢？现在讲博弈论，总与 Nash 平衡点联系在一起，因为它太重要了，而 Nash 又是如何证明平衡点的存在性呢？他给出了两个证明：一个是应用集值映射的 Kakutani 不动点定理[3]，另一个是应用连续映射的 Brouwer 不动点定理[4]. 再早一些，von Neumann 和 Morgenstern [2] 是应用凸集分离定理来证明矩阵博弈平衡点的存在性的. 凸分析、集值映射和不动点定理，这些都是非线性分析的重要内容，如果想比较深入地学习和研究博弈论，它们都是不可回避的. 因此，博弈论与非线性分析的关系也就极为密切，这是 von Neumann 和 Nash 在为博弈论奠基时就确定了的. 在文献 [2] 正文之前的“技术说明”中，von Neumann 写道：“要想比较透彻地了解本书所分析的问题，读者必须超越传统的推理方式，这些推理主要是数理逻辑、集合论和泛函分析式的推理.”

无论是 von Neumann，还是 Nash，他们的工作实际上有两个理论前提：

（1）对每个局中人来说，所有信息都是公共的、对称的；

（2）每个局中人都是完全理性的，都能够在各自策略集中选择对自己最为有利的策略.

对应用来说，以上两个假设太理想了，也太苛刻了，因为它要求每个局中人都是神——无所不知且无所不能. 因此在相当一段时间内，博弈论主要是数学家的舞台，大量的论文也主要发表在数学杂志上，经济学家并没有表现出特别的兴趣，因为很难在实际中应用.

Harsanyi[5] 和 Selten[6] 分别在以上两个方面提出了新的思想，大大扩展了博弈论的应用. 因此，他们与 Nash 一起，在文献 [2] 出版整整 50 年后，共同获得了 1994 年的 Nobel 经济学奖，也正是这次获奖，才确认了博弈论对经济理论的核心重要性. 具体来说，Harsanyi 在非对称信息条件下，提出了类型（type）的概念，用 Bayes 方法对博弈论模型进行分析，为信息经济学奠定了基础；而 Selten 将有限理性引入博弈论模型之中，局中人是可能犯错误的，应删除那些不稳定的平衡点，提出了平衡点精炼（refinement）的思想.

关于博弈论，国际微分拓扑大师 Milnor（1962 年 Fields 奖、1989 年 Wolf 奖和 2011 年 Abel 奖获得者）在 1998 年评价 Nash 工作中写过这样一段话：“纯粹数学家对于任何数学工作的评判往往基于它在数学上的深度和广度，即或者引进了新的数学思想和方法，或者解决了长期悬而未决的问题. 按照这种方式看，Nash 的获奖工作只是一个巧妙但并不出人意料的对于熟知方法的应用 …… 但是，当数学被应用到人类知识的其他分支时，我们必须认真地提出一个完全不同的问题：这个新的工作能使我们对现实世界的理解增加到何种程度？基于这个理由，那么 Nash 的论文完全不逊色于一场革命.”[7]

此外，著名博弈论学者 Kreps (1989 年 Clark 奖获得者，Clark 奖有“小 Nobel 经济学奖”之称) 在 1990 年写过这样一段话：“过去一二十年，经济学研究方法经历了一次渐进式革命——非合作博弈的用语、概念和技术逐渐占据经济学的中心地位.”[8]

非合作博弈论与合作博弈论，它们之间的关系如何？

非合作博弈论不允许局中人结盟，也不允许局中人对支付进行再分配，强调的是策略和平衡；合作博弈论则允许局中人结盟，也允许局中人对支付进行再分配，强调的是结盟和分配. 合作博弈与非合作博弈的不同之处还在于合作博弈至今仍然没有一个统一的解的概念（每类具体问题往往有专门定义的解），且任何解的概念都不具有 Nash 平衡点在非合作博弈中的地位.

由于文献 [2] 中除了对矩阵博弈作了一定的阐述外，von Neumann 倾力论述的是合作博弈，因此从文献 [2] 出版之后到 20 世纪 70 年代，大部分关于博弈论

的研究都集中于合作博弈. 从 20 世纪 70 年代, 尤其是 80 年代开始, 大部分关于博弈论的研究集中于非合作博弈, 接连获得 Nobel 经济学奖的工作也都属于非合作博弈理论及其成功应用.

注意到非合作博弈并不意味着局中人总是拒绝与其他局中人合作, 受个人利益的驱使, 局中人也能在一些情况下表现合作的行为. 至于合作博弈, 它往往包含一个博弈前的谈判, 而任何谈判过程实际上是一个非合作博弈. 合作伴随着冲突, 甚至是很剧烈的冲突, 难道现实不正是这样的吗?

正如 2007 年 Nobel 经济学奖获得者 Myerson 在文献 [9] 中指出的, 要"认识到非合作博弈理论的基础与核心地位及合作博弈理论必不可少的补充作用". 也正因为非合作博弈理论的这种主流地位, 使一些博弈论的重要著作, 例如文献 [10], [11], 都完全不涉及合作博弈理论.

本书是文献 [1] 的续论, 将主要研究非合作博弈理论, 更具体一些, 是应用非线性分析的理论和方法来深入研究无限维空间中的平衡理论, 包括平衡的存在性、唯一性和稳定性. 此外, 也会涉及最优化问题、不动点问题、变分和拟变分不等式问题以及文献 [1] 中未曾涉及的 Bayes 博弈、轻微利他平衡点、平衡点的计算乃至合作博弈等研究内容. 本书不准备, 也不可能对博弈论和非线性分析作面面俱到的论述, 它仍然坚持文献 [1] 中的风格, 强调对问题的来龙去脉作必要的阐述, 尤其强调问题之间的联系及统一处理的模式, 而不是对一些结果不断地改进和推广, 因为这样的改进和推广往往并不是本质的, 也是比较容易做到的.

在内容上, 本书仍然将平衡点的稳定性研究放在特别重要的位置, 因为在作者看来, 一个博弈有多个平衡点而如何选取的问题, 可能是当前非合作博弈理论研究所面临的最大挑战, 而这与平衡点的稳定性研究是密切相关的.

真心感谢有关的机构、老师、朋友、学生和家人.

本书虽经反复修改, 错误仍在所难免, 恳请读者批评指正.

最后, 关于博弈论还想说几句. 博弈论的研究近些年来如此火热, 主要原因还在于经济实践发展和与之相适应的经济理论发展的需要. 博弈论已经向数学多个领域提出了不少新的研究课题, 其本身也有一些难题至今尚未得到彻底解决, 这正好说明博弈论不是一个停滞和衰亡的学科, 而是一个召唤着我们去开拓与创新的充满激情与活力的学科. 出发吧, 作者愿意与读者一起奋发努力, 尽情地享受这一快乐!

作 者

2011 年 7 月 13 日

目　录

第 1 章　集值映射与不动点定理

关于度量空间和拓扑空间的一些基本概念，尤其是关于集值映射和不动点定理的一些基本结论，文献 [1] 中已作过较为详尽的介绍．本章择其要点，作了一定的归纳和梳理，同时也增加和充实了很多新的材料，主要参考了文献 [12]~[19].

1.1　度量空间和拓扑空间

关于 n 维欧氏空间 R^n，相信读者是熟悉的，所以首先用 R^n 作背景来引进度量空间的概念．

设 X 是一个非空集合，如果对任意 $x,y\in X$，存在一个实数 $d(x,y)$ 与之对应，满足

(1) $d(x,y)\geqslant 0$，$d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$；

(2) $d(x,y)=d(y,x)$；

(3) 对任意 $z\in X$，$d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$，

则称 $d(x,y)$ 为 x,y 之间的距离，X 按照距离 d 成为度量空间，记为 (X,d)，简记为 X．

$x\in X$，$\forall r>0$，$O(x,r)=\{y\in X:d(x,y)<r\}$ 称为 X 中的以 x 为球心，r 为半径的开球．设 G 是 X 中的非空子集，$x\in G$，如果存在 $r>0$，使 $O(x,r)\subset G$，则称 x 是 G 的内点，G 中所有内点的集合记为 $\operatorname{int}G$．如果 $\forall x\in G$，x 都是 G 的内点，则称 G 是 X 中的开集．易知开集具有以下的性质：空间 X 和空集 $\varnothing$ 都是开集；任意个开集的并集是开集；有限个开集的交集是开集．

设 $\{x_n\}$ 是度量空间 (X,d) 中的一个序列，$x\in X$，如果数列 $d(x_n,x)\to 0$，则称序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x，记作 $x_n\to x$．

设 $\{x_n\}$ 是度量空间 (X,d) 中的一个序列，如果 $\forall\varepsilon>0$，存在正整数 N，使 $\forall m,n\geqslant N$，有 $d(x_m,x_n)<\varepsilon$，则称 $\{x_n\}$ 是 X 中的一个 Cauchy 序列．如果 X 中的任何一个 Cauchy 序列都收敛于 X 中的一点，则称 X 是一个完备度量空间．n 维欧氏空间 R^n 是完备的．

有了度量空间的背景，然后抛开距离概念，直接参考度量空间中开集的性质来引进拓扑空间的概念.

设 X 是一个非空集合，τ 是 X 中的一族子集，如果它满足

(1) X 和空集 $\varnothing$ 都属于 τ；

(2) τ 中任意个集合的并集属于 τ；

(3) τ 中有限个集合的交集属于 τ，

则称 τ 是 X 上的一个拓扑，(X,τ) 是一个拓扑空间，简记为 X，τ 中的成员称为 X 中的开集．这样，在拓扑空间中，空间 X 和空集 $\varnothing$ 是开集；任意个开集的并集是开集；有限个开集的交集是开集.

设 (X,τ) 是一个拓扑空间，A 是 X 中的一个非空子集，则 $\{A\cap U: U\in\tau\}$ 就是 A 的一个拓扑，称为子空间拓扑，具有这种拓扑的 A 称为 X 的子空间.

$x\in X$，包含 x 的开集称为 x 的开邻域．设 $A\subset X$ 是一个非空子集，如果对 x 的任意开邻域 $U(x)$，都有 $U(x)\cap(A-\{x\})\neq\varnothing$，则称 x 是 A 的聚点.

设 D 是一个非空集合，$\prec$ 是 D 中的一个二元关系，如果 $\prec$ 具有下列性质：

(1) $\forall\alpha\in D$，$\alpha\prec\alpha$；

(2) $\forall\alpha,\beta\in D$，如果 $\alpha\prec\beta,\beta\prec\alpha$ 则 $\alpha=\beta$；

(3) $\forall\alpha,\beta,\gamma\in D$，如果 $\alpha\prec\beta,\beta\prec\gamma$，则 $\alpha\prec\gamma$，

则称 $\prec$ 是 D 中的半序.

如果集合 D 中有半序，就称 D 是一个半序集．设 D 是一个半序集，如果 $\forall\alpha$，$\beta\in D$，$\exists\gamma\in D$，使 $\alpha\prec\gamma$，$\beta\prec\gamma$，则称 D 是一个有向集．设 X 是一个拓扑空间，D 是一个有向集，则 $\{x_\alpha\in X:\alpha\in D\}$ 就称为 X 中的一个网，简记为 $\{x_\alpha\}$．显然，当 D 是自然数集且按“大于或等于”所成的有向集时，网即为序列.

$x\in X$，如果对 x 的任何开邻域 $U(x)$，$\exists\alpha_0\in D$，使 $\forall\alpha\succ\alpha_0$，有 $x_\alpha\in U(x)$，则称网 $\{x_\alpha\}$ 收敛于 x，记为 $x_\alpha\to x$．设 A 是 X 的一个非空子集，而 $x\in X$ 是 A 的一个聚点，则存在 A 中的一个网 $\{x_\alpha\}$，使 $x_\alpha\to x$.

设 D 是一个半序集，如果 $\forall\alpha,\beta\in D$，$\alpha\prec\beta$ 与 $\beta\prec\alpha$ 中至少有一个成立，则称 D 是一个全序集．设 B 是半序集 D 的子集，如果 $\exists\gamma\in D$，使 $\forall\beta\in B$，都有 $\beta\prec\gamma$，则称 γ 是子集 B 的上界．设 $\gamma\in D$，如果 $\forall\beta\in D$，$\beta\neq\gamma$，$\gamma\prec\beta$ 都不成立，则称 γ 是 D 的极大元．半序集的极大元即使存在，也不一定是唯一的．以下是著名的 Zorn 引理：

设 D 是一个半序集，如果 D 的每个全序子集都有上界，则 D 必有极大元.

类似地，有下界、极小元和极小元存在性的引理.

开集的余集称为闭集，由此可知，在拓扑空间 X 中，空间 X 和空集 $\varnothing$ 都是闭集；任意个闭集的交集是闭集；有限个闭集的并集是闭集.

设 A 是拓扑空间 X 的一个非空子集，包含 A 的最小闭集称为 A 的闭包，记为 $\overline{A}$. 由此, A 为闭集当且仅当 $A=\overline{A}$. 易知 A 是闭集当且仅当对任何 A 中的网 $\{x_\alpha\}$, $x_\alpha \to x$，则 $x \in A$.

设 X 和 Y 是两个拓扑空间，$f: X \to Y$ 是一个映射，$x \in X$. 如果对 $f(x)$ 在 Y 中的任何开邻域 V，存在 x 在 X 中的开邻域 U，使 $\forall x' \in U$，有 $f(x') \in V$，则称映射 f 在 x 是连续的. 如果 $\forall x \in X$，f 在 x 都是连续的，则称映射 f 在 X 上是连续的. 易知 f 在 X 上是连续的充分必要条件为，对任何 X 中的网 $\{x_\alpha\}$，$x_\alpha \to x$，有 $f(x_\alpha) \to f(x)$. 在度量空间中可以用序列代替网来描述闭包和连续性.

设 X 是一个拓扑空间，如果对任意 $x, y \in X$，$x \neq y$，存在 x 的开邻域 $U(x)$ 和 y 的开邻域 $V(y)$，使 $U(x) \cap V(y) = \varnothing$，则称 X 是一个 Hausdorff 拓扑空间，这是最重要也是应用最广泛的一类拓扑空间. 设 X 是一个 Hausdorff 拓扑空间，$\{x_\alpha\}$ 是 X 中的一个网，如果 $x_\alpha \to x$，$x_\alpha \to y$，则有 $x=y$.

设 X 是一个 Hausdorff 拓扑空间，$A \subset X$，如果 $\overline{A} = X$，则称 A 是 X 中的稠密集. 如果存在 X 中的可数稠密子集，则称 X 是一个可分空间. 如果 X 中任意可数个稠密开集的交集仍是 X 中的稠密集，则称 X 是一个 Baire 空间. 完备度量空间就是一个 Baire 空间，又因完备度量空间中的任意非空闭集必是完备的，所以它也是一个 Baire 空间.

设 X 是一个 Hausdorff 拓扑空间，$A \subset X$，$\{G_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 是 X 中的一族开集，其中 Λ 是一个指标集. 如果 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \supset A$，则称 $\{G_\lambda\}$ 是 A 的一个开覆盖. 当 Λ 是有限集时，则称 $\{G_\lambda\}$ 是 A 的一个有限开覆盖. 如果 X 的任意开覆盖都存在有限开覆盖，则称 X 是紧空间. 如果 X 的子空间 A 是紧空间，则称 A 是 X 中的紧集. 如果 X 的一族子集中任意有限个的交集非空，则称这子集族具有有限交性质，而 X 是紧集的充分必要条件是：对于 X 中具有有限交性质的任意闭集族 $\{F_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$，有 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \neq \varnothing$. 注意到如果 A 是紧空间 X 中的闭集，则它必是 X 中的紧集；而如果 A 是 X 中的紧集，则它必是 X 中的闭集；如果 B 是紧集 A 中的无限点集，则 B 在 X 中必有聚点；又如果 $f: X \to Y$ 是一个连续映射，A 是 X 中的一个紧集，则 $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ 必是 Y 中的一个紧集；如果 A, B 是紧空间 X 中的两个非空闭集，则存在连续函数 $f: X \to [0,1]$，使 $\forall x \in A$，$f(x) = 0$，而 $\forall x \in B$，$f(x) = 1$.

设 $(X_1, \tau_1), \cdots, (X_n, \tau_n)$ 是 n 个 Hausdorff 拓扑空间，它们的乘积 $\prod_{i=1}^{n} X_i$ 仍然是一

个 Hausdorff 拓扑空间, 如果 $X_1,\cdots,X_n$ 都是紧空间, 则 $\prod_{i=1}^{n}X_i$ 必是紧空间.

设 X 是一个度量空间, 则它必是一个 Hausdorff 拓扑空间. X 是紧度量空间当且仅当它是序列紧的, 即 X 中的任意序列都有收敛子序列. 设 X 是完备的, 则 X 是紧的当且仅当它是完全有界的, 即 $\forall\varepsilon>0$, 存在 X 中的有限子集 $\{x_1,\cdots,x_n\}$, 使 $\bigcup_{i=1}^{n}O(x_i,\varepsilon)=X$. 如果 X 是紧度量空间, 则它必是可分空间. R^n 中子集 A 是紧集当且仅当其是有界闭集.

设 X 是一个完备度量空间, S 是 X 中的有界集, $d(S)=\sup\limits_{x\in S,y\in S}d(x,y)$ 称为 S 的直径, 而 $\alpha(S)=\inf\left\{\delta>0:\text{存在}\ X\ \text{中的有限个集}\ S_i,\ \bigcup\limits_i S_i\supset S,\text{且}\ d(S_i)\leqslant\delta\right\}$ 称为 S 的非紧测度.

引理 1.1.1 $\alpha(S)=0$ 当且仅当 $\bar{S}$ 是紧集.

证明 首先证明一个结果: 设 $\{A_n\}$ 是 X 中的一列非空有界闭集, $A_1\supset A_2\supset A_3\supset\cdots$, 且 $\alpha(A_n)\to 0$, 则 $A=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$ 是非空紧集.

对任意 X 中的序列 $\{x_n\}$, 其中 $x_n\in A_n$, 由 $\alpha(A_n)$ 的定义, 存在 X 中有限多个集 $S_i^{(n)}$, 使 $\bigcup\limits_i S_i^{(n)}\supset A_n$, 且 $d\left(S_i^{(n)}\right)\leqslant\alpha(A_n)+\frac{1}{n}$.

因 $\{x_n\}\subset A_1$, 存在某 $S_i^{(1)}$ 包含其子序列 $\{x_{i_1},x_{i_2},\cdots\}$, 其中 $1<i_1<i_2<\cdots$, 因 $\{x_{i_1},x_{i_2},\cdots\}\subset A_2$, 存在某 $S_i^{(2)}$ 包含其子序列 $\{x_{j_1},x_{j_2},\cdots\}$, $i_1<j_1<j_2<\cdots$. 如此继续, 取 $n_1=1,n_2=i_1,n_3=j_1,\cdots$, 则 $\forall k$, 有 $\{x_{n_k},x_{n_{k+1}},\cdots\}\subset S_i^{(k)}$. 因 $d\left(S_i^{(k)}\right)\leqslant\alpha(A_k)+\frac{1}{k}\to 0$, 故 $\{x_{n_k}\}$ 是 X 中的 Cauchy 序列, 因 X 是完备的, 它在 X 中必收敛. 以上证明了 $\{x_n\}$ 必有收敛子序列, 且因 $A_1\supset A_2\supset A_3\supset\cdots$, 其极限点 $x\in A_n$, 从而 $x\in A$, $A\neq\varnothing$. 因 A 中任何序列 $\{x_n\}$ 都可以表示成 $x_n\in A_n$ 的形式, 则它必有收敛子序列, 从而 A 是紧集.

回到引理的证明. 如果 $\alpha(S)=0$, 取 $A_n=\bar{S}$, 则 $\bar{S}=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$. 由 $\alpha(S)$ 的定义, 易知 $\alpha(\bar{S})=\alpha(S)$, 故 $\alpha(A_n)=0$, 由已经证明的结果, $\bar{S}$ 必是紧集. 反之, 如果 $\bar{S}$ 是紧集, $\forall\varepsilon>0$, 因 $\bar{S}$ 是完全有界的, 存在有限个半径为 ε 的开球覆盖 $\bar{S}$, 从

而 $\alpha(\overline{S})\leqslant 2\varepsilon$，因 ε 是任意的，故 $\alpha(S)=0$.

设 X 是一个 Hausdorff 拓扑空间，如果它不能表示成两个不相交的非空开集的并集，则称 X 是一个连通空间．当然也可以这样定义：如果它不能表示成两个不相交的非空闭集的并集．设 $A\subset X$，如果子空间 A 是连通的，则称 A 是 X 中的连通子集.

设 X 是一个 Hausdorff 拓扑空间，A 是 X 的一个非空子集，$x\in A$，所有 A 中包含 x 的连通子集的并集必是连通的，它构成了 A 的一个连通区（或连通分支）．所有 A 的连通区必是两两不相交的，且如果 A 是闭集（或紧集），则 A 的任意一个连通区都是闭集（或紧集）.

设 E 是一个线性空间，如果对任意 $x\in E$，存在实数 $\|x\|$ 与之对应，满足

(1) $\|x\|\geqslant 0$，$\|x\|=0$ 当且仅当 $x=0$；

(2) $\forall\alpha\in R$，$\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$；

(3) 对任意 $y\in E$，$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$，

则称 $\|x\|$ 是 E 上的一个范数，称 E 是一个赋范线性空间.

如果 E 是一个赋范线性空间，$\forall x,y\in E$，定义 $d(x,y)=\|x-y\|$，则 (E,d) 必是一个度量空间．设 $\{x_n\}$ 是 E 中的一个序列，$x\in E$，如果 $\|x_n-x\|\to 0$，则称序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x，记作 $x_n\to x$．完备的赋范线性空间称为 Banach 空间.

设 E 是一个线性空间，如果对任意 $x,y\in E$，存在实数 $\langle x,y\rangle$ 与之对应，满足

(1) $\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle$；

(2) $\forall\alpha,\beta\in R,\forall z\in E$，$\langle\alpha x+\beta y,z\rangle=\alpha\langle x,z\rangle+\beta\langle y,z\rangle$；

(3) $\langle x,x\rangle\geqslant 0$，$\langle x,x\rangle=0$ 当且仅当 $x=0$，

则称 $\langle x,y\rangle$ 是 E 中的内积，称 E 是一个内积空间．$\forall x\in E$，定义 $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$，则 E 必是一个赋范线性空间．完备的内积空间称为 Hilbert 空间．R^n 是 Hilbert 空间.

设 E 是一个线性空间，对 E 中的任意两个非空集合 A,B，定义

$$A+B=\{x+y:x\in A,y\in B\},$$

对任意 $\lambda\in R$，定义

$$\lambda A=\{\lambda x:x\in A\}.$$

如果线性空间 E 同时又是拓扑空间，而 E 中的代数运算按其中的拓扑是连续的，则称 E 是一个线性拓扑空间．具体来说，对任意 $x,y\in E$ 及 $x+y$ 的任意开邻域

O, 存在 x 的开邻域 U 和 y 的开邻域 V, 使 $U+V\subset O$；对任意 $\lambda\in R$ 及 λx 的任意开邻域 O, 存在 $\delta>0$ 和 x 的开邻域 U, 使得当 $|\lambda-\lambda'|<\delta$ 时, 有 $\lambda' U\subset O$. 赋范线性空间必是线性拓扑空间.

引理 1.1.2 设 V 是 Hausdorff 线性拓扑空间 E 中 0 的任意开邻域, 则存在 E 中 0 的开邻域 W, 使 $W=-W$, 且 $W\subset V$.

证明 因为 0+0=0, 且在 E 中加法运算是连续的, 故存在 0 的两个开邻域 W_1 和 W_2, 使 $W_1+W_2\subset V$.

令 $W=W_1\cap W_2\cap(-W_1)\cap(-W_2)$, 则 W 是 0 的开邻域. $W=-W$, 且由 $W\subset W_1$, $W\subset W_2$, 得 $W+W\subset V$, 又 $0\in W$, 故 $W\subset V$.

由引理 1.1.2, 今后在论述一些问题时, 对 E 中 0 的任意开邻域 V, 如果需要, 可以设 $V=-V$.

引理 1.1.3 设 A 是 Hausdorff 线性拓扑空间 E 中的非空闭集, $0\notin A$, 则存在 E 中 0 的开邻域 W, 使 $W\cap(A+W)=\varnothing$.

证明 因 $E-A$ 是 E 中 0 的开邻域, 同引理 1.1.2 的证明, 存在 E 中 0 的开邻域 W, 使 $W=-W$ 且 $W+W\subset E-A$. 以下用反证法. 如果 $W\cap(A+W)\neq\varnothing$, 取 $x\in W\cap(A+W)$, 则 $x\in W$ 且 $x\in A+W=A-W$. 存在 $z\in A$, $y\in W$, 使 $x=z-y$. 因 $z=x+y\in W+W\subset E-A$, 这与 $z\notin E-A$ 矛盾, 故 $W\cap(A+W)=\varnothing$.

由引理 1.1.3, $\forall x\in E$, 如果 $x\notin A$, 其中 A 是 E 中的非空闭集, 则存在 E 中 0 的开邻域 W, 使 $(x+W)\cap(A+W)=\varnothing$.

设 E 是 Hausdorff 线性拓扑空间, $f:E\to R$, 如果对任意 $x_1,x_2\in E$ 及任意 $a,b\in R$, 有 $f(ax_1+bx_2)=af(x_1)+bf(x_2)$, 则称 f 是 E 上的线性泛函. 如果线性泛函 f 是连续的, 则称 f 是 E 上的连续线性泛函. E 上连续线性泛函的全体记为 E^*. $\forall f\in E^*$, $\forall x\in E$, 线性泛函 f 在 x 的值表示为 $f(x)$, 有时也可表示为 $\langle f,x\rangle$.

设 $\{x_n\}$ 是赋范线性空间 E 中的一个序列, $x\in E$, 如果 $\forall f\in E^*$, 有 $f(x_n)\to f(x)$, 则称序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x. 如果 $\{x_n\}$ 收敛于 x, 则 $\{x_n\}$ 必弱收敛于 x, 反之不然. R^n 中收敛和弱收敛是等价的.

设 E 是一个赋范线性空间, 因 R 是完备的, 易证 E^* 是一个 Banach 空间. 设 $x\in E$, $f\in E^*$, 如果固定 x, 让 f 跑遍 E^*, 则 $f(x)$ 就成了定义在 E^* 上的连续线性泛函, 由此 x 就对应于 $(E^*)^*=E^{**}$ 中的某一成员, E 可以看作 E^{**} 的一个子空间. 如果 $E=E^{**}$, 则称 E 是一个自反空间. 如果 E 是一个自反的 Banach 空间, B 是 E 中的一个有界闭集, 则 B 必是一个弱紧集. Hilbert 空间必是自反的 Banach 空间.

设 C 是线性空间 E 中的一个非空子集, 如果 $\forall x_1, x_2 \in C$, $\forall \lambda \in (0,1)$, 有 $\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in C$, 则称 C 是 E 中的凸集. 规定空集 $\varnothing$ 是凸集. 设 A 是 E 中的一个非空子集, 包含 A 的最小凸集称为 A 的凸包, 记作 $\mathrm{co}(A)$.

设 C 是线性空间 E 中的一个非空凸集, $f: C \to R$, 如果 $\forall x_1, x_2 \in C$, $\forall \lambda \in (0,1)$, 有

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2),$$

则称 f 是 C 上的凸函数.

如果 $-f$ 是 C 上的凸函数, 则称 f 是 C 上的凹函数, 此时 $\forall x_1, x_2 \in C$, $\forall \lambda \in (0,1)$, 有

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \geqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

如果 f 在 C 上既是凸函数又是凹函数, 则称 f 是 C 上的仿射 (affine) 函数, 此时 $\forall x_1, x_2 \in C$, $\forall \lambda \in (0,1)$, 有

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) = \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

如果 $\forall x_1, x_2 \in C$, $\forall \lambda \in (0,1)$, 有

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \leqslant \max\{f(x_1), f(x_2)\},$$

则称 f 是 C 上的拟凸函数.

如果 $-f$ 是 C 上的拟凸函数, 则称 f 是 C 上的拟凹函数, 此时 $\forall x_1, x_2 \in C$, $\forall \lambda \in (0,1)$, 有

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \geqslant \min\{f(x_1), f(x_2)\}.$$

如果 f 是 C 上的凸函数（或凹函数）, 则 f 必是 C 上的拟凸函数（或拟凹函数）, 但反之不然. 易证 f 是 C 上的拟凸函数当且仅当 $\forall r \in R$, $\{x \in C : f(x) \leqslant r\}$ 是凸集, f 是 C 上的拟凹函数当且仅当 $\forall r \in R$, $\{x \in C : f(x) \geqslant r\}$ 是凸集.

设 E 是一个 Hausdorff 线性拓扑空间, 如果存在 0 的局部基（对 0 的任意开邻域 U, 存在此基中的一个成员 C, 使 $0 \in C \subset U$）, 且此局部基中的每个成员都是 E 中的凸集, 则称 E 是局部凸线性拓扑空间, 简称局部凸空间. 此时 $\forall x \in E$, 必存在 x 的局部基, 且此局部基中每个成员都是 E 中的凸集. 这样, 对 $x \in E$ 的任意开邻域 U, 则 $U = x + V$, 其中 V 是 0 的一个开邻域. 由引理 1.1.2, 如果需要, 可以设

$V=-V$，又 E 是局部凸的，可以设 V 是凸集．赋范线性空间必是局部凸空间．

在这一节的最后，要列出三个定理（文献 [1] 中都有证明），因为它们在今后会多次应用．

定理 1.1.1（连续单位分划定理） 设 X 是一个 Hausdorff 紧空间，$\{G_i : i=1,2,\cdots,n\}$ 是 X 的有限开覆盖，则存在从属于此开覆盖的连续单位分划 $\{\beta_i : i=1,2,\cdots, n\}$，即它满足

(1) $\forall i=1,2,\cdots,n$，$\beta_i : X\to[0,1]$ 在 X 上是连续的；

(2) $\forall i=1,2,\cdots,n$，$\forall x\in X$，如果 $\beta_i(x)>0$，则 $x\in G_i$；

(3) $\forall x\in X$，$\sum_{i=1}^{n}\beta_i(x)=1$．

定理 1.1.2（凸集分离定理） 设 A,B 是 Hausdorff 局部凸空间 E 中的两个非空闭凸集，且 B 是紧的，$A\cap B=\varnothing$，则存在 $f\in E^*$，使超平面 $\{x\in E: f(x)=c\}$ 严格分离 A 和 B（$\forall x\in A$，$f(x)\leqslant a<c$，$\forall x\in B$，$f(x)\geqslant b>c$，其中 a,b,c 是实数）．

定理 1.1.3（投影定理） 设 C 是 Hilbert 空间 E 中的非空闭凸集，则 $\forall x\in E$，存在唯一的 $x_0\in C$，使

$$\|x-x_0\|=\inf_{y\in C}\|x-y\|.$$

注 1.1.1 以上 x_0 称为 x 在 C 上是投影，记为 $P_c(x)$．当 $x\in C$ 时，$P_c(x)=x$．映射 $P_c: E\to C$ 必是连续的，而实际上可证明 $\forall x,y\in E$，必有 $\|P_c(x)-P_c(y)\|\leqslant\|x-y\|$，即映射 P_c 是非扩展的．

1.2 集 值 映 射

首先引进度量空间中 Hausdorff 距离的概念．

设 (X,d) 是一个度量空间，A 是 X 的一个非空子集，$\forall\delta>0$，记

$$U(\delta,A)=\{x\in X:\exists a\in A,\ 使\ d(a,x)<\delta\},$$

易知 $U(\delta,A)$ 是一个开集．

设 A,B 是 X 中的任意两个非空有界闭集，定义

$$h(A,B)=\inf\{\delta>0: A\subset U(\delta,B), B\subset U(\delta,A)\},$$

$h(A,B)$ 称为 A 和 B 之间的 Hausdorff 距离．

设 X 是一个度量空间, h 是定义在 X 上的 Hausdorff 距离, 容易证明:

(1) 对 X 中任意两个非空有界闭集 A 和 B, 有 $h(A,B)\geqslant 0$, 且 $h(A,B)=0$ 当且仅当 $A=B$;

(2) 对 X 中任意两个非空有界闭集 A 和 B, 有 $h(A,B)=h(B,A)$;

(3) 对 X 中任意三个非空有界闭集 A,B 和 C, 有 $h(A,B)\leqslant h(A,C)+h(C,B)$.

设 $F_0(X)$ 是度量空间 X 中所有非空有界闭集的集合, $A_n\in F_0(X)$, $n=1,2,3,\cdots$, $A\in F_0(X)$. 如果 $h(A_n,A)\to 0(n\to\infty)$, 则称序列 $\{A_n\}$ 收敛于 A, 记作 $A_n\to A$. 如果 A 是紧集, G 是开集, $G\supset A$, 而 $h(A_n,A)\to 0$, 则存在正整数 N, 使 $\forall n\geqslant N$, 有 $G\supset A_n$.

引理 1.2.1　设 A,B 是度量空间 (X,d) 中的两个非空有界闭集, 则

(1) $\forall a\in A$, $\forall \varepsilon>0$, $\exists b\in B$, 使 $d(a,b)<h(A,B)+\varepsilon$;

(2) $\forall x,y\in X$, 有 $d(x,A)\leqslant d(x,y)+d(y,B)+h(A,B)$.

证明　(1) 由 Hausdorff 距离的定义即得.

(2) $\forall \varepsilon>0$, 存在 $b\in B$, 使 $d(y,B)>d(y,b)-\dfrac{\varepsilon}{2}$. 由 (1), $\exists a\in A$, 使 $h(A,B)>d(a,b)-\dfrac{\varepsilon}{2}$. 这样

$$\begin{aligned}
d(x,A)&\leqslant d(x,a)\leqslant d(x,y)+d(y,a)\\
&\leqslant d(x,y)+d(y,b)+d(a,b)\\
&\leqslant d(x,y)+d(y,B)+\frac{\varepsilon}{2}+h(A,B)+\frac{\varepsilon}{2}\\
&\leqslant d(x,y)+d(y,B)+h(A,B)+\varepsilon,
\end{aligned}$$

因 ε 是任意的, 得

$$d(x,A)\leqslant d(x,y)+d(y,B)+h(A,B).$$

引理 1.2.2　设 $\{A_n\}$ 是度量空间 X 中的一列非空有界闭集, $h(A_n,A)\to 0$, 其中 A 是 X 中的一个非空紧集, $x_n\in A_n$, $n=1,2,3,\cdots$, 则存在 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k}\}$, 使 $x_{n_k}\to x\in A$.

证明　反证法. 如果结论不成立, 则 $\forall x\in A$, 存在 x 的开邻域 $O(x)$ 和正整数 $n(x)$, 使 $\forall n\geqslant n(x)$, 有 $x_n\notin O(x)$. 因 $\bigcup\limits_{x\in A}O(x)\supset A$, 而 A 是紧集, 存在 $x^1,\cdots$,