普通高等教育“十二五”规划教材

微积分
学习指导

Calculus

郭卫华　王　霞　邱学绍　主编

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

微积分学习指导

郭卫华　王　霞　邱学绍　主编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是与“微积分”相匹配的学习辅导教材，全书共分十章，章节的划分与教材完全一致. 每章内容由五部分组成：一、基本概念、性质与结论；二、典型例题分析；三、疑难问题解答；四、基础训练与提高训练；五、基础训练与提高训练习题参考答案与提示. 书末附有 2009～2011 年硕士研究生入学考试数学三试题及答案.

本书可作为理、工、农、经等院校本科生学习微积分的辅导书以及微积分习题课的参考书，也可作为学生考研的系统复习用书.

图书在版编目（CIP）数据

微积分学习指导/郭卫华，王霞，邱学绍主编. —北京：科学出版社，2011

（普通高等教育“十二五”规划教材）

ISBN 978-7-03-032030-8

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①郭… ②王… ③邱… Ⅲ. ①微积分—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 162925 号

策划：王超

责任编辑：王纯刚 张振华/责任校对：刘玉靖

责任印制：吕春珉/封面设计：科地亚盟

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011年9月第 一 版 开本：787×1092 1/16

2011年9月第一次印刷 印张：19 1/2

印数：1－3 000 字数：450 000

定价：33.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈新蕾〉）

销售部电话 010-62140850 编辑部电话 010-62148322

前　言

“微积分”是一门重要的基础课程，为了帮助广大学生学好微积分这门课程，我们根据几十年的教学经验，编写了这本与“微积分”配套的学习指导书，以加深学生对基本概念的理解，加强对基本解题方法与技巧的掌握，并尽可能地联系经济领域中的实际，培养学生运用数学工具解决实际问题的能力.

全书共分十章，章节的划分与原教材完全一致.每章内容由五部分组成：一、基本概念、性质与结论，主要对本章内容进行归纳，既简洁又翔实；二、典型例题分析，对每节内容逐个知识点进行剖析，选编的例题题型多，覆盖面广，基本涵盖了本章各节典型的重、难点题目；三、疑难问题解答，对每个章节的疑难问题给出详细的解答；四、基础训练与提高训练，旨在帮助学生通过训练，巩固基础，掌握本节的基本知识、解题方法与技巧.其中带“*”例题和“提高训练”部分习题多为综合试题和近年来的考研试题，供学有余力和有志于考研的学生练习用；五、基础训练与提高训练习题参考答案与提示，给出了解题思路及方法.书末附有2009～2011年硕士研究生入学考试数学三试题及答案，为的是让有志于继续深造的同学同步完成备考，达到考研的能力和要求.

本书结构严谨、条理清晰、综合性强，有较强的针对性和可操作性，深入浅出，便于自学，可作为理工科院校本科生学习微积分的辅导书以及微积分习题课的参考书，也可作为学生考研的系统复习用书.

本书由郭卫华、王霞、邱学绍担任主编，由辛向军、刘雅妹、孙丽萍、齐静担任副主编。在编写过程中，我们博采众家之长，汲取了多本参考书的精华，在此一并向各位作者表示感谢.由于时间仓促，水平有限，不足之处在所难免，殷切希望读者提出宝贵意见，以便改进和修正.

编　者

2011.5.1

于郑州轻工业学院

目　　录

第一章 函　数

一、基本概念、性质与结论

1. 概念

(1) 函数、分段函数.

(2) 反函数、复合函数.

(3) 基本初等函数、初等函数.

(4) 经济学中常用的函数.

1) 需求函数与供给函数.

2) 收益函数与成本函数.

3) 利润函数.

2. 性质

(1) 有界函数 $f(x)$：$x\in X\subset D$，存在 $M>0$，使 $|f(x)|\leqslant M$.

(2) 单调增加(减少)函数 $f(x)$：x_1，$x_2\in X\subset D$，当 $x_1<x_2$ 时，

$$f(x_1)<f(x_2)[f(x_1)>f(x_2)].$$

(3) 奇(偶)函数 $f(x)$：$x\in D$，D 关于原点对称. $f(-x)=-f(x)[f(-x)=f(x)]$.

(4) 周期函数 $f(x)$：$x\in(-\infty,+\infty)$，存在 $T>0$，使 $f(x+T)=f(x)$.

3. 结论

初等函数的连续性：

(1) 基本初等函数在其定义域内都是连续的.

(2) 一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

二、典型例题分析

1. 求函数的定义域

例 1.1 (1) 设函数 $y=f(x)$，$x\in[0,4]$，求函数 $f(x^2)$及 $f(x+2)+f(x-1)$的定义域；

(2) 已知 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$，$f[g(x)]=1-x$，且 $g(x)\geqslant 0$，求 $g(x)$及其定义域.

解 (1) 因为 $y=f(x)$的定义域为$[0,4]$，所以对于函数 $f(x^2)$应有 $0\leqslant x^2\leqslant 4$，即有$-2\leqslant x\leqslant 2$. 故函数 $f(x^2)$的定义域为$[-2,2]$；而对于函数 $f(x+2)+f(x-1)$，应有$\begin{cases}0\leqslant x+2\leqslant 4\\0\leqslant x-1\leqslant 4\end{cases}$，即$\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2\\1\leqslant x\leqslant 5\end{cases}$，求其交集得 $1\leqslant x\leqslant 2$.

故函数 $f(x+2)+f(x-1)$的定义域为$[1,2]$.

(2) 由题设及复合函数的定义可得

$f[g(x)]=e^{g^2(x)}=1-x$，且 $g(x)\geqslant 0$，所以 $g(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，要使$g(x)$有意义，需满足$\begin{cases}\ln(1-x)\geqslant 0,\\ 1-x>0\end{cases}$，解得 $g(x)$的定义域为$(-\infty,0]$.

注：求初等函数的定义域有以下原则：①分式的分母不能为零. ②根式中负数不能开偶次方. ③对数的真数不能为零和负数. ④$\arcsin x$ 或 $\arccos x$ 的定义域为$|x|\leqslant 1$；$\tan x$ 的定义域为 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$；$\cot x$ 的定义域为 $x\neq k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$. ⑤复合函数的定义域，通常将复合函数看成一系列初等函数的复合，然后考察每个初等函数的定义域和值域，得到对应的不等式组，通过联立求解不等式组，就可得到复合函数的定义域. ⑥对于应用问题中的函数，其定义域由实际问题的具体含义确定 .

2. 把复合函数分解为基本初等函数的复合

例 1.2 把下列函数分解为最简单的函数：

(1) $y=\sin^2\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$；　　(2) $y=3^{\arcsin^2(1+2x)}$.

解 由外向里进行分解：

(1) $y=u^2$，$u=\sin v$，$v=w^{-\frac{1}{2}}$，$w=1+x^2$；

(2) $y=3^u$，$u=v^2$，$v=\arcsin w$，$w=1+2x$.

例 1.3 函数 $y=\sqrt{1-u}$与 $u=2+e^x$ 能否构成复合函数？为什么？

解 两个函数能否构成复合函数，取决于外层函数的定义域和内层函数的值域有没有公共部分 . 这里外层函数 $y=\sqrt{1-u}$的定义域为 $D_f=\{u|u\leqslant 1\}$，内层函数 $u=2+e^x$ 的值域为$R_u=\{u|2<u<+\infty\}$，由于交集为空集，即 $D_f\cap R_u=\varnothing$，所以函数 $y=\sqrt{1-u}$与 $u=2+e^x$ 不能构成复合函数.

3. 求反函数

例 1.4 求 $y=f(x)=\begin{cases}1-2x^2, & x<-1\\ x^3, & -1\leqslant x\leqslant 2\\ 12x-16, & x>2\end{cases}$的反函数.

解 当$x<-1$ 时，$y=1-2x^2$，得 $x=-\sqrt{\frac{1-y}{2}}$，$y<-1$.

当$-1\leqslant x\leqslant 2$ 时，$y=x^3$，得 $x=\sqrt[3]{y}$，$-1\leqslant y\leqslant 8$.

当 $x>2$ 时，$y=12x-16$，得 $x=\frac{y+16}{12}$，$y>8$.

所以反函数

$$y=f^{-1}(x)=\begin{cases}-\sqrt{\frac{1-x}{2}}, & x<-1\\ \sqrt[3]{x}, & -1\leqslant x\leqslant 8\\ \frac{x+16}{12}, & x>8\end{cases}$$

注：反函数的求解方法比较固定，由 $y=f(x)$ 解出 $x=f^{-1}(y)$，对换自变量与因变量的位置，即得所求的反函数 $y=f^{-1}(x)$. 对分段函数要注意所求函数表达式的区间.

4. 函数的奇偶性

例 1.5 讨论函数 $f(x)=\varphi(x)\cdot\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$的奇偶性，其中 $\varphi(x)$为奇函数.

解 因为 $f(-x)=\dfrac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1}\varphi(-x)=-\dfrac{a^x(a^{-x}-1)}{a^x(a^{-x}+1)}\varphi(x)=\dfrac{a^x-1}{a^x+1}\varphi(x)=f(x)$，所以 $f(x)$为偶函数.

例 1.6 设 $f(x)$的定义域为$(-\infty，+\infty)$，对 $\forall x，y$ 都有 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cdot f(y)$，且 $f(x)\neq 0$，证明 $f(x)$为偶函数.

证明 由 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cdot f(y)$，用$-y$ 代 y 得，$f(x-y)+f(x+y)=2f(x)\cdot f(-y)$，故 $2f(x)\cdot f(y)=2f(x)\cdot f(-y)$，又因为 $f(x)\neq 0$，故 $f(y)=f(-y)$，所以 $f(x)$为偶函数.

注：判定函数奇偶性的方法：

(1) 根据函数奇偶性的定义或利用奇偶函数的运算性质．如奇(偶)函数的代数和仍为奇(偶)函数；奇(偶)函数的积为偶函数；奇函数与偶函数的积为奇函数等.

(2) 证明 $f(-x)=-f(x)$或 $f(-x)=f(x)$.

5. 函数的周期性

例 1.7 设 $a<b$，函数 $f(x)$对任意 $x\in R$，有 $f(a-x)=f(a+x)$，$f(b-x)=f(b+x)$,证明 $f(x)$为周期函数.

分析 若函数 $f(x)$是周期函数，不妨设其周期为 T，则对于$\forall x\in\mathbf{R}$，有

$$\begin{aligned}f(x+T)&=f[b+(x+T-b)]=f[b-(x+T-b)]=f[2b-(x+T)]\\&=f[a-(x+T-2b+a)]=f[a+(x+T-2b+a)]=f[x+T-2(b-a)]\\&\equiv f(x),\end{aligned}$$

所以 $T-2(b-a)=0$，即 $T=2b-2a$.

解 因为$\forall x\in R$，$f(x+2b-2a)=f(b+x+b-2a)=f[b-(x+b-2a)]$

$$\begin{aligned}&=f(2a-x)=f(a+a+x)\\&=f[a-(a-x)]=f(x),\end{aligned}$$

所以 $f(x)$为周期函数，$2b-2a$ 是它的一个周期.

注：判定函数 $f(x)$为周期函数的主要方法是：①从定义出发，找到 $T\neq 0$，使得 $f(x+T)=f(x)$；②利用周期函数的运算性质证明．

6. 函数的有界性

例 1.8 指出下列函数是否有界：

(1) $y=\dfrac{1}{x^2}$，$a\leqslant x\leqslant 1$，其中，$0<a<1$；

(2) $y=x\cos x$，$x\in\mathbf{R}$.

解 (1) 因为 $a\leqslant x\leqslant 1(0<x<1)$，所以 $a^2\leqslant x^2\leqslant 1$，故有 $1\leqslant\frac{1}{x^2}\leqslant\frac{1}{a^2}$，即 $M=\frac{1}{a^2}$，则 $\forall x\in[a,\ 1]$，有 $|y|=\frac{1}{x^2}\leqslant M$，故 $y=\frac{1}{x^2}$ 在 $[a,\ 1]$ 上有界 $(0<x\leqslant 1)$.

(2) 对 $\forall M>0$，取 $x=(2[M]+1)\pi$，则 $\cos x=-1$，此时

$$|y(x)|=|(2[M]+1)\pi\cos(2[M]+1)\pi|=(2[M]+1)\pi,$$

由定义可知，$y=x\cos x$ 在 $\mathbf{R}$ 上无界.

注：证明函数有界的常用方法：①利用函数有界性的定义，对函数取绝对值，然后对不等式进行放缩处理；②利用导数求最值的方法；③利用函数连续的性质.

7. 经济量函数问题

例 1.9 收音机每台售价为 90 元，成本 60 元．厂方为鼓励销售商大量采购，决定凡订购量超过 100 台以上的，每多订购 1 台，售价就降低 1 分，但最低价为每台 75 元.

(1) 将每台的实际售价 p 表示成订购量 x 的函数；

(2) 将厂方所获的利润 L 表示为订购量 x 的函数；

(3) 某一销售商订购了 1000 台，厂方可获利润多少?

解 依题意

(1) $$p(x)=\begin{cases}90, & 0\leqslant x\leqslant 100\\ 90-\dfrac{x-100}{100}=\dfrac{9100-x}{100}, & 100<x<1600;\\ 75, & x\geqslant 1600\end{cases}$$

(2) $$L(x)=\begin{cases}(90-60)x=30x, & 0\leqslant x\leqslant 100\\ \left(90-\dfrac{x-100}{100}-60\right)x=\dfrac{(3100-x)x}{100}, & 100<x<1600;\\ (75-60)x=15x, & x\geqslant 1600\end{cases}$$

(3) 某一商行订购了 1000 台，令 $x=1000$，则

$$L(1000)=\frac{(3100-1000)1000}{100}=21000.$$

即厂方可获利润 21000 元.

例 1.10 某厂生产一种产品，该厂设计的生产能力为日产 100 件，每日的固定成本为 150 元，每件的平均可变成本为 10 元.

(1) 试求该厂此产品的日总成本函数及日平均成本函数；

(2) 若每件售价为 14 元，求收益函数；

(3) 求利润函数及损益分歧点.

解 (1) 设日产量为 Q 件的日成本为 C 元，由题设，$0\leqslant Q\leqslant 100$，则

$$C=C(Q)=C_1+C_2(Q)=150+10Q,$$

故日平均成本函数为

$$\overline{C}(Q)=\frac{C(Q)}{Q}=\frac{150+10Q}{Q}=\frac{150}{Q}+10\quad(0\leqslant Q\leqslant 100);$$

(2) 设收益为 R，显然它与销售量有关，假定生产的产品可以全部售出，即日产量与销售量相同，均为 Q，则

$$R=R(Q)=14Q\quad(0\leqslant Q\leqslant 100);$$

(3) 设利润为 L，则

$$L=R(Q)-C(Q)=14Q-(150+10Q)=-150+4Q\quad(0\leqslant Q\leqslant 100),$$

解方程 $L(Q)=0$，即 $-150+4Q=0$，得 $Q=37.5$，即损益分歧点为 $Q=37.5$，这意味着每天至少生产 38 件产品方不亏本.

三、疑难问题解答

1. 何谓代数函数？何谓超越函数？

答： 从多项式出发，由代数运算(加、减、乘、除和求方根)构成的函数称为代数函数.

易知，任何有理函数均可表示为 $y=\frac{P(x)}{Q(x)}$，其中 $P(x)$，$Q(x)$都是多项式；无理函数都是代数函数.

非代数函数又称超越函数，超越函数的集合包括三角函数、反三角函数、指数函数、对数函数以及无理指数幂函数.

2. 单调函数必有单值反函数，不单调的函数是不是一定没有单值反函数？

答： 不是的．一个函数是否存在单值反函数，取决于它的对应规律 f 在定义域 D 与值域 U 之间是否构成一一对应的关系．如果是一一对应的，那么必有单值反函数．函数在区间 I 上单调只是一种特殊的一一对应关系，因此单调仅是存在单值反函数的充分条件，而不是必要条件.

3. 为什么不说初等函数在其定义域内连续，而说在定义区间内连续？

答： 基本初等函数在其定义域上是连续的，初等函数在其定义区间上是连续的，但初等函数在定义域的某些点处不一定连续．定义区间与定义域有所不同，定义区间是包含于定义域内的区间，定义域不一定是区间，可能包含孤立点．如初等函数 $f(x)=\sqrt{\cos x-1}$的定义域$\{x\mid x=2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$中的每个点都是孤立点，由于函数在定义域的孤立点的邻近没有定义，不具备讨论函数连续性的前提条件，也就谈不上函数在该点连续．

四、基础训练与提高训练

基础训练

1. 选择题

(1) 设 $f(x)$是定义在$(-\infty,+\infty)$内的任意函数，则 $f(x)-f(-x)$是(　　).

A. 奇函数　　B. 偶函数　　C. 非奇非偶函数　　D. 非负函数

(2) 关于函数 $y=-\frac{1}{x}$ 的单调性的正确判断是(　　).

A. 当 $x\neq 0$ 时，$y=-\frac{1}{x}$ 单调增加

B. 当 $x\neq 0$ 时，$y=-\frac{1}{x}$ 单调减少

C. 当 $x<0$ 时，$y=-\frac{1}{x}$ 单调减少；当 $x>0$ 时，$y=-\frac{1}{x}$ 单调增加

D. 当 $x<0$ 时，$y=-\frac{1}{x}$ 单调增加；当 $x>0$ 时，$y=-\frac{1}{x}$ 单调减少

(3) 下列两个函数相同的是(　　).

A. $f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$

B. $f(x)=|x|$，$g(x)=e^{\ln x}$

C. $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$，$g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$

D. $f(x)=x$，$g(x)=(\sqrt{x})^2$

(4) 已知 $f(x)=\sin x$，$f[\varphi(x)]=1-x^2$，则 $\varphi(x)$ 的定义域为(　　).

A. $(-\infty, +\infty)$　　B. $[-1, 1]$　　C. $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$　　D. $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

(5) 函数 $y=xe^{\cos x}$ 是(　　).

A. 奇函数　　B. 偶函数　　C. 单调函数　　D. 有界函数

2. 填空题

(1) 函数 $y=\arcsin\frac{2x-1}{2}$ 的定义域用区间表示为________.

(2) 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$，则① $f(e^x)$ 的定义域为________，②$f(\ln x)$ 的定义域为________.

(3) 设 $f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=1+\cos x$，则 $f\left(\cos\frac{x}{2}\right)=$________.

(4) 将圆 $x^2+y^2=2x$ 的直角坐标方程化为的极坐标方程为________.

(5) 函数 $f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x$ 的最小正周期为________.

3. 计算题

(1) 设 $f(x)=\ln\frac{2-x}{2+x}$，求 $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$ 的定义域.

(2) 求函数 $f(x)=\arccos\frac{2x}{1+x}+\sqrt{1-x-2x^2}$ 的定义域.

(3) 设 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{x^3+x}{x^4+3x^2+1}(x\neq 0)$，求 $f(x)$.

(4) 设 $f(\ln x)=x^2-x+2$，$0<x<+\infty$，求 $f(x)$ 及其定义域.

(5) 求函数 $y=\ln\frac{a-x}{a+x}(a>0)$ 的反函数的形式.

(6) 下列函数可以看作是由哪些简单函数复合而成的：

1) $y=\sqrt{\ln\sqrt{x}}$；　2) $y=\mathrm{e}^{-\sin^3\frac{1}{x}}$；　3) $y=\ln^2\arccos x^3$.

(7) 某产品供给量 Q 对价格 P 的函数关系为 $Q=Q(P)=a+bc^P$. 今知当 $P=2$ 时，$Q=30$，当 $P=3$ 时，$Q=50$，当 $P=4$ 时，$Q=90$. 求供给量 Q 对价格 P 的函数关系.

(8) 某化肥厂生产某产品 1000 吨，每吨定价为 130 元，销售量在 700 吨以内时，按原价出售，超过 700 吨时，超过的部分需打 9 折出售，试将销售总收益与总销售量的函数关系用数学表达式表示.

(9) 生产队要用篱笆围成一个形状是直角梯形的苗圃(图 1.1)，它的相邻两面借用夹角为的 135°的两面墙(图中 AD 和 DC)，另外两面用篱笆围住，篱笆的总长是 30 米，将苗圃的面积表示成 AB 的边长 x 的函数.

(10) 等腰直角三角形的腰长为 l(图 1.2)，试将其内接矩形的面积表示成矩形的底边长 x 的函数.

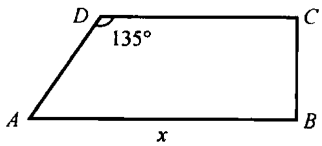

图 1.1

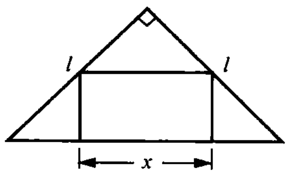

图 1.2

(11) 在某零售报摊上每份报纸的进价为 0.25 元，而零售价为 0.40 元，并且如果报纸当天未售出不能退给报社，只好亏本. 若每天进报纸 t 份，而销售量为 x 份，试将报摊的利润 y 表示为 x 的函数.

提高训练

1. 设 $f(x)$是以 $T=2$ 为周期的周期函数，且在$[0,2]$上 $f(x)=x^2-2x$，求 $f(x)$ 在$[-2,4]$上的表达式.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0, & |x|=1\\ -1, & |x|>1\end{cases}$，$g(x)=\mathrm{e}^x$，求 $f[g(x)]$和 $g[f(x)]$.

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x, & -\infty<x<1\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 4\\ 2^x, & 4<x<+\infty\end{cases}$，求 $f(x)$的反函数 $\varphi(x)$.

4. 分别就 $a=2$，$a=\dfrac{1}{2}$，$a=-2$ 讨论 $y=\ln(a-\sin x)$是不是复合函数. 如果是复合函数，求其定义域.

5. 设 $z=x+y+f(x-y)$，且当 $y=0$ 时，$z=x^2$，求 $f(x)$及 z.

6. 设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义，对一切实数 x，y 适合 $f(xy)=f(x)f(y)$，且 $f(0)\neq 0$，求证：$f(x)\equiv 1$.

7. 设 $f(x)$对一切实数 x_1，x_2 成立 $f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$，且 $f(0)\neq 0$，$f(1)=a$，求 $f(0)$及 $f(n)$(n 为正整数).

五、基础训练与提高训练习题参考答案与提示

基础训练

1. （1）A；（2）A；（3）C；（4）C；（5）A.

2. （1）$-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}$；（2）$(-\infty,0]$，$[1,e]$；（3）$1-\cos x$；（4）$\rho=2\cos\theta$；（5）$2\pi$.

3. （1）$D(f)=\left(-2,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},2\right)$. 提示：求 $f(x)$ 与 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 的定义域的交集.

（2）$D(f)=\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$. 提示：$1-x-2x^2\geqslant 0$ 与 $-1\leqslant\frac{2x}{1+x}\leqslant 1(x\neq -1)$ 的交集．因 $1-x-2x^2\geqslant 0\Rightarrow -1\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$，故 $1+x>0$. $\frac{2x}{1+x}\leqslant 1\Rightarrow\frac{x-1}{1+x}\leqslant 0\Rightarrow x-1\leqslant 0\Rightarrow x\leqslant 1$，$-1\leqslant\frac{2x}{1+x}\Rightarrow\frac{3x+1}{1+x}\geqslant 0\Rightarrow 3x+1\geqslant 0\Rightarrow x\geqslant -\frac{1}{3}$.

（3）$f(x)=\frac{x}{x^2+1}$. 提示：分子、分母同除以 x，得

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{x+\frac{1}{x}}{x^2+3+\frac{1}{x^2}}=\frac{x+\frac{1}{x}}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+1}\Rightarrow f(x)=\frac{x}{x^2+1}.$$

（4）$f(x)=e^{2x}-e^x+2$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

（5）$y=\frac{a(1-e^x)}{1+e^x}$.

（6）1）$y=\sqrt{u}$，$u=\ln w$，$w=\sqrt{x}$；2）$y=e^u$，$u=-w^3$，$w=\sin v$，$v=\frac{1}{x}$；

3）$y=u^2$，$u=\ln v$，$v=\arccos w$，$w=x^3$.

（7）$Q=10+5\cdot 2^P$. 提示：由 $\begin{cases}30=a+b\cdot c^2 & ①\\ 50=a+b\cdot c^3 & ②\\ 90=a+b\cdot c^4 & ③\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}②-①\cdot c\\ ③-②\cdot c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}50-30c=a-ac\\ 90-50c=a-ac\end{cases}$，两式相减，得 $c=2$，代入可得 $a=10$ 及 $b=5$.

（8）$R=\begin{cases}130x, & 0\leqslant x\leqslant 700\\ 130\times 700+130\times 0.9\times(x-700), & 700<x\leqslant 1000\end{cases}$.

（9）$S=-\frac{3}{2}x^2+60x-450$. 提示：高为 $30-x$，上底为 $2x-30$.

（10）$S=\frac{1}{2}x(\sqrt{2}l-x)$，$0<x<\sqrt{2}l$.

（11）$y=0.4x-0.25t$.

提高训练

1. $f(x)=\begin{cases}x^2+2x, & -2\leqslant x<0\\ x^2-2x, & 0\leqslant x<2\\ x^2-6x+8, & 2\leqslant x<4\end{cases}$.

提示：$x\in[-2, 0)$，$f(x+2)=f(x)=(x+2)^2-2(x+2)=x^2+2x$；

$x\in[2, 4)$，$f(x-2)=f(x)=(x-2)^2-2(x-2)=x^2-6x+8$.

2. $f[g(x)]=\begin{cases}1, & x<0\\ 0, & x=0\\ -1, & x>0\end{cases}$，$g[f(x)]=\begin{cases}e, & |x|<1\\ 1, & |x|=1.\\ e^{-1}, & |x|>1\end{cases}$

提示：$f[g(x)]=\begin{cases}1, & g(x)<1\\ 0, & g(x)=1\\ -1, & g(x)>1\end{cases}=\begin{cases}1, & e^x<1\\ 0, & e^x=1\\ -1, & e^x>1\end{cases}=\begin{cases}1, & x<0\\ 0, & x=0\\ -1, & x>0\end{cases}$；同理求 $g[f(x)]$.

3. $\varphi(x)=\begin{cases}x, & x<1\\ \sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 16.\\ \log_2 x, & x>16\end{cases}$

4. $a=2$ 时是复合函数，$y=\ln(2-\sin x)$，$D=(-\infty, +\infty)$；

$a=\frac{1}{2}$时是复合函数，$y=\ln\left(\frac{1}{2}-\sin x\right)$，$D=\{x \mid 2n\pi-\frac{7}{6}\pi<x<2n\pi+\frac{1}{6}\pi$，$n=0, \pm1, \pm2, \cdots$；

$a=-2$ 时不是复合函数，$D=\varnothing$.

5. $f(x)=x^2-x$，$z=(x-y)^2+2y$. 提示：$y=0$，$z=x^2 \Rightarrow z=x^2=x+f(x)\Rightarrow$ $f(x)=x^2-x\Rightarrow f(x-y)=(x-y)^2-(x-y)$.

6. 提示：令 $x=0$，$y=0$，可得 $f(0)=1$；令 $y=0$，可得 $f(x)=1$.

7. $f(0)=1$，$f(n)=a^n$. 提示：$x_1=0$，$x_2=0$ 代入得 $f(0)=f(0)\cdot f(0)\Rightarrow$ $f(0)=1$，

$x_1=1$，$x_2=1$ 代入得 $f(2)=f(1)\cdot f(1)\Rightarrow f(2)=a^2$，$x_1=2$，$x_2=1$ 代入得 $f(3)=f(2)\cdot f(1)\Rightarrow f(3)=a^3$，$\cdots\Rightarrow f(n)=a^n$.

第二章　极限与连续

一、基本概念、性质与结论

1. 极限

(1) 概念.

1) 数列极限，函数极限.

2) 无穷小，无穷大，无穷小的阶.

(2) 性质与结论.

1) 收敛数列极限的唯一性：数列$\{x_n\}$不能收敛于两个不同的极限.

2) 收敛数列的有界性：如果数列$\{x_n\}$收敛，那么数列$\{x_n\}$一定有界.

3) 收敛数列的保号性：如果数列$\{x_n\}$收敛于a，且$a>0$(或$a<0$)，那么存在正整数N，当$n>N$时，有$x_n>0$(或$x_n<0$).

4) 收敛数列与其子数列间的关系：如果数列$\{x_n\}$收敛于a，那么它的任一子数列也收敛，且极限也是a.

5) 函数极限的唯一性：如果极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，那么极限唯一.

6) 函数极限的局部有界性：如果$f(x)\to A(x\to x_0)$，那么存在常数$M>0$和δ，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)|\leqslant M$.

7) 函数极限的局部保号性：如果$f(x)\to A(x\to x_0)$，而且$A>0$(或$A<0$)，那么存在常数$\delta>0$，使当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$f(x)>0$(或$f(x)<0$)；如果$f(x)\to A(x\to x_0)(A\neq 0)$，那么存在点$x_0$的某一去心邻域，在该邻域内，有$|f(x)|>\frac{1}{2}|A|$.

8) 函数极限与数列极限的关系：如果当$x\to x_0$时$f(x)$的极限存在，$\{x_n\}$为$f(x)$的定义域内任一收敛于x_0的数列，且满足$x_n\neq x_0(n\in N^+)$，那么相应的函数值数列$\{f(x_n)\}$必收敛，且

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{x\to x_0}f(x).$$

9) 极限存在的充要条件：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

10) 夹逼准则.

① 数列形式：若$\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$满足$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n(n>N)$且$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

② 函数形式：若在x_0的某去心邻域(或$|x|>M>0$)内，满足$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}h(x)=A$，则$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=A$.

(3) 单调有界数列：单调有界数列必有极限.

(4) 两个重要极限：

1）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$；

2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\mathrm{e}$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$，$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

（5）无穷小的性质.

1）有限个无穷小的和（或积）也是无穷小.

2）有界函数（或常数）与无穷小的乘积是无穷小.

3）无穷小（不为 0）的倒数为无穷大，无穷大的倒数为无穷小.

4）β 与 α 是等价无穷小的充分必要条件为 $\beta=\alpha+o(\alpha)$.

5）若 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且 $\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$.

2. 函数连续性

（1）概念.

1）函数在 x_0 处连续的概念：设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一个邻域内有定义，如果当自变量的增量 $\Delta x=x-x_0\to 0$ 时，对应的函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\to 0$，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，或 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，那么就称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，则称 $y=f(x)$ 在点 x_0 处左连续.

如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称 $y=f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

2）左、右连续与连续的关系：函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow$ 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处左连续且右连续.

3）函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续：$f(x)$ 在 (a,b) 内每一点处连续，在 $x=a$ 右连续，在 $x=b$ 左连续.

4）函数 $f(x)$ 的间断点的类型：如果 x_0 是函数 $f(x)$ 的间断点，但左极限 $f(x_0^-)$ 及右极限 $f(x_0^+)$ 都存在，那么 x_0 称为函数 $f(x)$ 的第一类间断点；不是第一类间断点的任何间断点，称为第二类间断点．在第一类间断点中，左、右极限相等者称为可去间断点，不相等者称为跳跃间断点．无穷间断点和振荡间断点显然是第二类间断点.

（2）性质与结论.

闭区间上连续函数的性质：

1）最大值和最小值定理：在闭区间上连续的函数在该区间上一定能取得它的最大值 M 和最小值 m.

2）有界性定理：在闭区间上连续的函数一定在该区间上有界.

3）零点定理：设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，那么在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ，使 $f(\xi)=0$.

4）介值定理：设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\neq f(b)$，那么，对于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任意一个数 C，在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=C$.