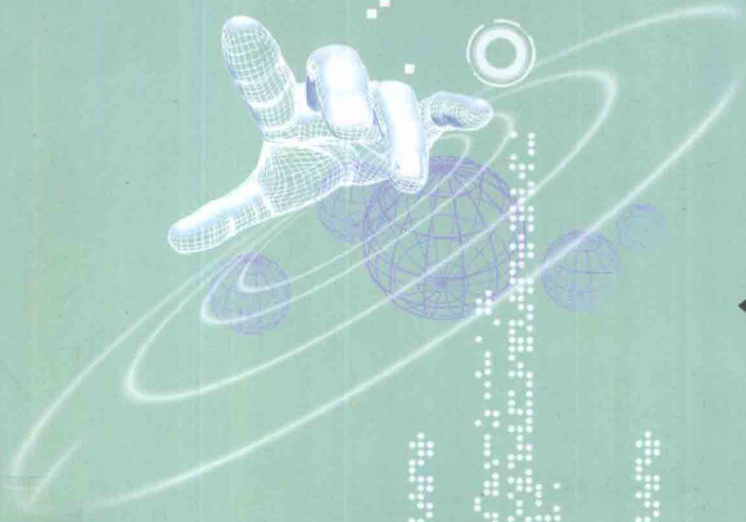
鸡西大学自编教材
系列丛书

运筹学教程

Operations Research



◆ 郭鹏 编著

兵器工业出版社

运筹学教程

郭　鹏　编著

兵器工业出版社

内 容 简 介

运筹学是一门研究如何有效地组织和管理人机系统的科学。由于它同管理科学的紧密联系，研究解决实际问题时的系统优化思想以及具有从提出问题、分析建模、求解到方案实施的一整套严密的科学方法，使它在培养提高管理人才的素质方面起到重要作用。运筹学已成为高等院校经济管理类专业普遍开设的一门重要专业基础课。

本书介绍运筹学的几个基本分支——线性规划、整数规划、目标规划、图与网络分析、计划评审技术与关键路线法、动态规划的主要理论和方法。在阐述上，力求深入浅出，结合经济含义讲解概念和方法，并给出了必要的数学证明。各章例题、习题既与课程内容紧密配合，同时也注意到结合经济管理实际。经审定，本书可以作为高等院校经济管理类专业教材，也可供工商企业及其他经济管理部门广大管理人员、工程技术人员自学参考。

图书在版编目(CIP)数据

运筹学教程/郭鹏编著. 一北京：兵器工业出版社，2005.8

ISBN7-80172-501-8

Ⅰ.运... Ⅱ.郭... Ⅲ.运筹学一高等学校一教材
Ⅳ.022

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 078405 号

出版发行：兵器工业出版社	责任编辑：林利红
发行电话：010-68962596　68962591	封面设计：水木时代(北京)图书中心
邮　　编：100089	责任校对：王　绛
社　　址：北京市海淀区车道沟 10 号	责任印制：王京华
经　　销：各地新华书店	开　　本：787×960　1/16
印　　刷：北京京丰印刷厂	印　　张：14.75
版　　次：2005 年 8 月第 1 版第 1 次印刷	字　　数：267 千字
印　　数：1—3000	定　　价：21.00 元

（版权所有　翻印必究　印装有误　负责调换）

编审说明

人类很早就进行过最优化方面的探索和研究。进入21世纪后，最优化方面的研究和探索无论是在广度上还是在深度上都有了一些更新的进展。第二次世界大战期间，全球四大洲20多亿人（占世界总人口的3/4以上）卷入了这场战争中。在前人工作的基础上，英、美等国科学家们在战火纷飞、生死攸关的时刻潜心研究、创建了“运筹学”这一以最优化为主要内容的新学科。战争期间，运筹学为粉碎法西斯作出了重要贡献；战后，人类把它应用在工业、农业、贸易、交通等各类经济活动中，同样取得了辉煌成就。几届诺贝尔经济学奖得主就是运用运筹学的思想、方法来研究经济问题而获得成功的。简言之，人类要发展，要进步，就需要运筹学。短短的50多年来，运筹学突飞猛进，日新月异，现在已成长为枝繁叶茂的参天大树。

“运筹学”一词在英国称为 Operational Research，在美国称为 Operations Research（缩写为 O.R.），可译为“运用研究”或“作业研究”。运筹学涉及的主要领域是管理问题，研究的基本手段是建立数学模型，并比较多地运用各种数学工具，也有人将运筹学称做“管理数学”。1957年我国从“夫运筹帷幄之中，决胜千里之外”（见《史记·高祖本纪》）中摘取“运筹”二字，将 O.R. 正式译作“运筹学”，包含运用筹划、以策略取胜等意义，比较恰当地反映了这门学科的性质和内涵。

运筹学是向管理者、决策者提供科学管理、决策的数量化方法的科学。国内外高等学校中，经济管理、工商管理、系统分析、军事指挥、应用数学等许多专业，都把它列为必修课。运筹学的教学与研究，大致可分为数学与应用两个走向，我国有为数不少的从事运筹学数学研究的著名学者。而在应用上，由于种种原因，我国还不

够普及和深入。当前，我国的高等教育事业蓬勃发展，社会对高校尤其是高职院校学生的需求很大，生源也极为充足。在多年教学实践中我们深切地感受到，运筹学这门课在高职高专、成人高校教学中采用本科教材有很多不便之处。鉴于以上情况，我们组织部分高职院校专家编写了这本主要供高职高专、成人高校教学使用的运筹学教材。全书力求深入浅出，用接近讲课的语言来阐述，并充分考虑到学生课时不足的情况，争取让广大师生满意。各章均配有习题，书末附有习题答案或提示。

全书由郭鹏编著，王家臣主审。在本书编写过程中，得到广大同仁的指导和帮助，在此深表感谢。

由于编者水平所限，书中难免有缺点和不足之处，恳切希望得到广大读者的指正。

高等教育规划教材编审指导委员会
2005 年 8 月

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目　录

第 1 章　线性规划与单纯形法

1.1　线性规划问题及其数学模型

线性规划的两大类型问题

运筹学中有一大分支——数学规划，数学规划又可分成线性规划、非线性规划和动态规划三个小的分支。线性规划是运筹学创立初期人们重点研究的内容，其理论完善，方法简便，应用广泛，是数学规划乃至运筹学最基本的内容。

线性规划问题有两大类型，现各举一例如下：

例 1　某厂用 A、B、C 三台设备生产 I、II 两种产品，每生产一件 I 要占用 A、B、C 各 2h、1h、0h，可获利润 2 元；每生产一件 II 要占用 A、B、C 各 2h、2h、3h，可获利润 3 元。已知 A、B、C 的有效台时各为 12h、8h、9h，要求制定出使总利润最大的生产计划。

要解答这个问题，就得确定产品 I、II 的产量(设它们分别为 x_1、x_2)，使得按此方法生产能行得通，同时使利润尽量大。从题中可以看出，影响 x_1、x_2 取值大小的因素就是各设备的有效台时(即最大加工能力)。比如 A，真正用掉 A 的小时数 $2x_1+2x_2$ 不能超过 A 的有效台时 12，即必须满足 $2x_1+2x_2\leqslant 12$。同样地，还必须同时满足：$x_1+2x_2\leqslant 8$ 和 $3x_2\leqslant 9$。而由于 x_1、x_2 是产品的产量，所以 x_1、x_2 的取值范围自然限于 $x_1\geqslant 0$、$x_2\geqslant 0$。

在满足上述各个条件后，再考虑如何使总利润 $z=2x_1+3x_2$ 尽量大，我们将此记为 $\max z=2x_1+3x_2$。于是，问题用数学语言来叙述的话，就是求 x_1、x_2 的值，使之在满足如下条件(称为约束条件)

$$\begin{cases}2x_1+2x_2\leqslant 12\\ \quad x_1+2x_2\leqslant 8\\ \qquad\quad 3x_2\leqslant 9\\ x_j\geqslant 0\quad j=1,2\end{cases}$$

的前提下，使 $z=2x_1+3x_2$(称为目标函数)的值尽量大。简记为

$$\max z=2x_1+3x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leqslant 12 \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ 3x_2 \leqslant 9 \\ x_1、x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

例 2　用玉米、大麦、大豆做原料混合制成饲料，三种原料的价格和所含营养成分如表 1.1 所示。

表 1.1

原　料		所含养分(%)				
名称	价格(元 /kg)	蛋白质	纤维	脂肪	铁	钙
玉米	2	8.2	2.3	3.6	0.06	0.22
大麦	3	11	7.6	1.7	0.57	0.12
大豆	4	48	2.8	18.4	0.24	0.19

问：三种原料各买多少才能使混合后配成的饲料既满足以下要求，又使总成本最低？（要求：每 1000kg 饲料中，蛋白质不得少于 200kg，纤维不少于 50kg，脂肪不少于 55kg，铁不少于 10kg，钙不少于 4.5kg。）

如果设玉米、大麦、大豆各买 $x_1$kg、$x_2$kg、$x_3$kg，则根据题意，显然是要在满足如下约束条件的前提下，使总成本（目标函数）$z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$ 的值尽量小（记为 $\min z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$）。

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1000 \\ 8.2\%\, x_1 + 11\%\, x_2 + 48\%\, x_3 \geqslant 200 \\ 2.3\%\, x_1 + 7.6\%\, x_2 + 2.8\%\, x_3 \geqslant 50 \\ 3.6\%\, x_1 + 1.7\%\, x_2 + 18.4\%\, x_3 \geqslant 55 \\ 0.06\%\, x_1 + 0.57\%\, x_2 + 0.24\%\, x_3 \geqslant 10 \\ 0.22\%\, x_1 + 0.12\%\, x_2 + 0.19\%\, x_3 \geqslant 4.5 \\ x_j \geqslant 0 \quad j = 1,2,3 \end{cases}$$

归纳起来，例 1 是要解决这样一类“增产”问题：资源一定，如何用它们创造尽可能多的效益（表现为目标函数求最大值），而例 2 则是要解决另一类“节约”问题：任务一定，如何用尽可能少的资源去完成它（表现为目标函数求最小值）。当然，这里说的资源，泛指人力、物力、财力等等。这就是线性规划所要解决的两大类问题。

我们看到，上述两例都是求条件极值的问题。但它们与多元函数微积分中求条件极值的问题不同，后者的限制条件必须是等式，而且自变量的个数要比限制条件的个数多，这时才能用拉格朗日方法求解，而前者（上述两例）却不

具备这两个条件，因此用微积分的方法无法求解。这些问题，都是数学规划研究的内容。

二、线性规划问题的数学模型 —— 一般形式

数学模型就是用数学方法（字母、数字、符号、公式等）对研究对象的数量关系所进行的定量的描述。

上述两例是线性规划的数学模型，它包括三个部分：(1) 决策变量，即问题中要确定其值的未知量，它们可以连续地取值，而不限定离散地取值；(2) 目标函数，即问题所要达到的优化的目标，表示为决策变量的线性函数；(3) 约束条件，即决策变量取值时必须满足的那些限制条件，表示为决策变量的线性等式或不等式。约束条件中的“$x_j \geqslant 0$”，常称为变量取值的非负性条件。这一条件，有的具体问题中没有或只对部分变量才有。如果不限定目标函数与约束条件都必须是线性式（只出现变量的一次幂），则相应的数学规划便是非线性规划了。

线性规划数学模型的一般形式常表示为以下几种形式

$$\max(\text{或 } \min) z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant (\text{或 } =, \geqslant) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant (\text{或 } =, \geqslant) b_2 \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant (\text{或 } =, \geqslant) b_m \\ \qquad x_j \geqslant 0 \qquad j = 1, \cdots, n \end{cases}$$

或简写为

$$\max(\text{或 } \min) z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant (\text{或 } =, \geqslant) b_i & i = 1, \cdots, m \\ x_j \geqslant 0 & j = 1, \cdots, n \end{cases}$$

若各个约束条件左右两端的连接符号都相同（都是“$\leqslant$”，或都是“$=$”，或都是“$\geqslant$”），则可利用向量或矩阵记号把线性规划问题写成

$$\max(\text{或 } \min) z = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{p}_j x_j \leqslant (\text{或 } =, \geqslant) \boldsymbol{b} \\ \qquad \boldsymbol{x} \geqslant 0 \end{cases}$$

其中，$c=[c_1,\cdots,c_n]$，$x=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$，$p_j=\begin{bmatrix}a_{1j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix}$，$0=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$

或写成

$$\max(\text{或}\ \min)z=CX$$
$$\begin{cases}\boldsymbol{AX}\leqslant(\text{或}=,\geqslant)\boldsymbol{b}\\ X\geqslant 0\end{cases}$$

其中，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ A_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$

称为约束不等式组（或约束方程组）的系数矩阵。

三、线性规划问题的标准形式

在不同情况下，归结出来的线性规划问题可能多种多样，在目标函数和约束条件上也可能各有不同。为了便于讨论，我们规定线性规划问题的标准形式如下：

$$\min z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$
$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_i=b_i & i=1,\cdots,m\\ x_j\geqslant 0 & j=1,\cdots,n\end{cases}$$

其中 $b_i\geqslant 0, i=1,\cdots,m$。此时要求所有变量的取值都必须是非负的，而在一般形式中这一要求可有可无。另外，有的书中规定：标准形里的目标函数是求最小值。

任何一个一般形式的线性规划问题，都可以分别通过下述方法化为标准形式：

(1) 若目标函数为求最小值，即

$$\min z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

只需把目标函数改为求最大值

$$\max(-z)=\sum_{j=1}^{n}(-c_j)x_j$$

显然在满足相同约束条件的前提下，使 $z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$ 达到最小值的那组

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

x_j，必定使$(-z)=\sum_{j=1}^{n}(-c_j)x_j$ 达到最大值，反之亦然。

(2) 若某个约束条件的右端项b_i是负数，则可将此约束两边乘以(-1)，从而$(-b_i)$ 成为正数。注意：不等式两边同乘以(-1) 后要改变不等号方向。

(3) 约束条件为不等式，如

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n\leqslant b_i$$

则
$$0\leqslant b_i-(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n)$$

记上式右端为 x_{n+i}，即

$$0\leqslant b_i-(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n)=x_{n+i}$$

由后面等式即得 $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n+x_{n+i}=b_i$，即相当于在原来不等式约束的左边加上 x_{n+i}，而 $x_{n+i}\geqslant 0$。

同样，对于

$$a_{k1}x_1+\cdots+a_{kn}x_n\geqslant b_k$$

可在其左边减去一个变量 x_{n+k}，变为

$$a_{k1}x_1+\cdots+a_{kn}x_n-x_{n+k}=b_k\text{，这里的 }x_{n+k}\geqslant 0$$

上面的 x_{n+i}、x_{n+k} 是把不等式约束变为等式约束时添加的，统称松弛变量(x_{n+k} 有时也叫剩余变量)。在实际问题中，松弛变量表示未被利用而闲置剩余的资源，它未转化为利润，所以它在目标函数中的系数为零。如例 1 中第一个约束条件 $2x_1+2x_2\leqslant 12$，加上松弛变量后变为 $2x_1+2x_2+x_3=12$。其中 x_3 表示 A 用来生产 I、II 各 x_1、x_2 件后剩余的加工能力，它对总利润的贡献是零。

(4) 如果问题中有"$x_p\leqslant 0$"及"x_q 无符号约束"这样的变量，则可令 $x_p{}'=-x_p$，则 $x_p{}'\geqslant 0$ 以及令 $x_q=x_q{}'-x_q{}''$，并令 $x_q{}'$、$x_q{}''\geqslant 0$(因为任一实数总可表示成两个非负数的差)。这样，把问题中的 x_p、x_q 分别以 $-x_p{}'$、$x_q{}'-x_q{}''$ 代换即可。

例 3　将下述线性规划模型化成标准形式

$$\min z=x_1-2x_2+3x_3$$

$$\begin{cases}2x_1+3x_2+4x_3\leqslant 8 & ①\\ x_1-5x_2+6x_3\leqslant -9 & ②\\ 4x_1+7x_2-8x_3=10 & ③\\ x_1\leqslant 0,x_2\geqslant 0,x_3\text{ 无符号限制}\end{cases}$$

解　目标函数变为 $\max(-z)=-x_1+2x_2-3x_3$。

第 ② 个约束两边乘以(-1) 得，$-x_1+5x_2-6x_3\geqslant 9$。

令 $x_1{}'=-x_1$，$x_3=x_3{}'-x_3{}''$ 且 $x_3{}'$、$x_3{}''\geqslant 0$，则问题变为

$$\max(-z)=x_1{}'+2x_2-3x_3{}'+3x_3{}''$$

$$\begin{cases} -2x_1' + 3x_2 - 4x_3' + 4x_3'' + x_4 = 8 \\ x_1' + 5x_2 - 6x_3' + 6x_3'' - x_5 = 9 \\ -4x_1' + 7x_2 - 8x_3' + 8x_3'' = 10 \\ x_1', x_2, x_3', x_3'', x_4, x_5 \geqslant 0 \end{cases}$$

四、线性规划问题的解

可行解 —— 满足线性规划所有约束条件的 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 的一组值，叫做线性规划的一个可行解。可行解的全体称为可行域。

最优解 —— 使目标函数值达到最优的可行解，叫做线性规划的最优解。

注意：可行解和最优解这两个概念对于线性规划的一般形式和标准形式都是适用的。在以后的讨论中，我们会看到线性规划问题在有无可行解、有无最优解上的各种情况，而把一个线性规划由一般形式化为标准形式是不影响结论的。其证明方法是采取“传递”的方法，即为了证明一般形式[记为问题(A)]与它所对应的标准形式[记为问题(B)]的等价性，不妨在(A)与(B)之间再添加几个线性规划问题[分别记为问题(A_1)，(A_2)，…，(A_k)]。把(A)化为(B)的过程看成先由(A)化为(A_1)，再化为(A_2)，再化为(A_3)，…，再化为(A_k)，最后是(A_k)化为(B)。这里，(A)与(A_1)可以是仅把求最小值化成求最大值，其他均相同；也可以是把一个不等式约束化为等式约束，其他均相同；还可以是把一个约束右端项由负数化成正数，其他均相同；又可以是仅把某个变量由“小于或等于零”化为“大于或等于零”，等等。总之，前后两个问题，仅有一处相异，其他各处均相同。易于证明，前后相邻的这两个问题总是等价的，这样“传递”下去，所以(A)与(B)等价。

下面就标准形式

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1, \cdots, m & (1.2) \\ x_j \geqslant 0 \qquad j = 1, \cdots, n & (1.3) \end{cases}$$

再给出几个概念。为讨论方便，设约束方程组(1.2)的系数矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ 的秩为 m，且 $m < n$。当然，标准形中的 b_i 都是非负的。

基 —— 设 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 中阶的满秩方阵(即 $\boldsymbol{B}$ 由 $\boldsymbol{A}$ 中线性无关的 m 列构成)，则称 $\boldsymbol{B}$ 是线性规划问题的一个基。

基中的各个列向量称为基向量，它们对应的变量称为基变量；基以外的各个列向量称为非基向量，它们对应的变量称为非基变量。

可见，找出一个基后，相应的基变量也随之确定，共 m 个；相应的非基变量也随之确定，共$(m-n)$个。同一个变量，对基 $\boldsymbol{B}_1$ 来说可能是基变量，而对另一个基 $\boldsymbol{B}_2$ 来说又可能是非基变量。

基本解 —— 基 $\boldsymbol{B}$ 确定后，在约束方程组中令非基变量全等于零，就可以惟一解出基变量的一组值来。基变量的这组值和等于零的非基变量的值合起来，叫做线性规划问题相应于基 $\boldsymbol{B}$ 的基本解。

显然，基本解是约束方程组(1.2)的一个特殊的解。基本解的总数不会超过 C_n^m 个，且每个基本解中非零分量个数不大于 m。

基本可行解 —— 满足变量非负性约束条件式(1.3)的基本解叫做基本可行解。

可行基 —— 对应于基本可行解的基叫做可行基。

最优基 —— 若一个基本可行解是最优解，则它对应的基叫做最优基。

例 4　在下面的线性规划问题中，如何寻找基，试举一例。结合说明什么是相应的基变量、基本解、基本可行解和可行基。

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 8 \\ 3x_2 + x_5 = 9 \\ x_j \geqslant 0 \quad j = 1, 2, \cdots, 5 \end{cases}$$

解　约束方程组的系数矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (P_1 P_2 P_3 P_4 P_5)$$

从 $\boldsymbol{A}$ 中任选 3 列，看能否构成满秩方阵(即这 3 列是否线性无关或相应的行列式是否等于零)，如果能构成满秩方阵(即这 3 列线性无关或相应的行列式不等于零)，则这 3 列就构成一个基。否则，就不能构成基，从而也谈不上基变量等概念。

例如，选 $\boldsymbol{B} = (P_3 P_4 P_5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，因这是一个单位矩阵，显然满秩，故 $\boldsymbol{B}$ 构成基。

相应的基变量是 x_3、x_4、x_5(当然余下的即是非基变量，即 x_1、x_2)，在约束方程组中令 $x_1 = x_2 = 0$，可解得 $x_3 = 12$，$x_4 = 8$，$x_5 = 9$，故 $X = (0,0,12,8,9)^{\mathrm{T}}$ 即为相应于基 $\boldsymbol{B}$ 的基本解。因其各个分量均非负，故其又是基本可行

解，从而说明 $\boldsymbol{B}$ 是可行基。

1.2 图解法

研究线性规划的根本目的在于求出它的最优解来，这就是解线性规划问题。对于两个变量的线性规划问题，有一种简单直观的几何方法 —— 图解法。其步骤是：建立平面直角坐标系，将每个约束条件确定的半平面在坐标系中表示出来，确定它们的公共部分 —— 可行域；给定目标函数一个值，画出相应的等值线，确定优化方向；平移目标函数的等值线，找出最优解。

例 5 用图解法求解例 1 中的线性规划

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leqslant 12 & ① \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 8 & ② \\ \quad 3x_2 \leqslant 9 & ③ \\ x_1、x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

(1) 建立 x_1Ox_2 平面直角坐标系，确定可行域：

约束条件中的非负性条件 $x_1 \geqslant 0$、$x_2 \geqslant 0$ 表明所求的可行解都在第Ⅰ象限内(含坐标轴的正方向部分)。

约束条件 $2x_1 + 2x_2 \leqslant 12$ 确定的范围是一个半平面。先画出相应于等式 $2x_1 + 2x_2 = 12$ 的图像 —— 直线。显然，直线上的点的坐标均满足这个等式(即二元一次方程)，而直线两侧的点的坐标都不能满足这个等式(直线外的点都不是此方程的解)。易于判定：此直线右上方的点均使 $2x_1 + 2x_2 > 12$，直线左下方的点均使 $2x_1 + 2x_2 < 12$。从而可知满足 $2x_1 + 2x_2 \leqslant 12$ 的点均在直线 $2x_1 + 2x_2 = 12$ 上以及它的左下方(左下半平面)。结合上面的结果便知 $2x_1 + 2x_2 \leqslant 12(x_1 \geqslant 0、x_2 \geqslant 0)$ 所确定的范围是实心的三角形 OQ_1A(包括其边界)上的各点，如图 1.1 所示。

同理可知，约束条件 $x_1 + 2x_2 \leqslant 8$ 表示的是直线 $x_1 + 2x_2 = 8$ 上及其左下方的所有点，约束条件 $3x_2 \leqslant 9$ 表示的是直线 $3x_2 = 9$ 上及其下方的所有点。

同时满足所有约束条件的点的集合是实心的多边形 $OQ_1Q_2Q_3Q_4$(包括其边界)，这就是可行域，如图 1.2 所示。不难看出，这个可行域中任意两点间连结线段上的点均在可行域内，这样的点集叫凸集。

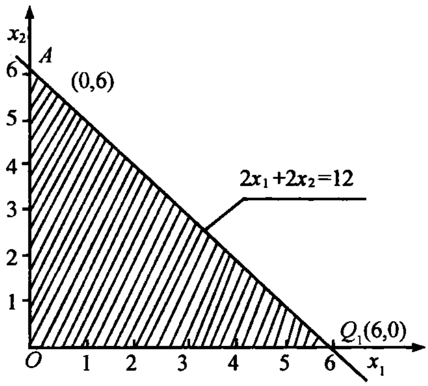


图 1.1

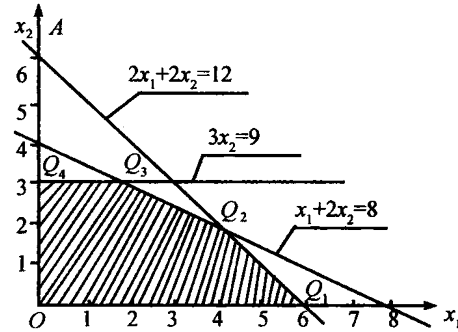


图 1.2

(2) 目标函数等值线及优化方向：

目标函数为 $z = 2x_1 + 3x_2$，又可写作 $x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{z}{3}$，其中的 z 是待定的值，如果把它看成参数，则显见目标函数是斜率为 $-\frac{2}{3}$、在纵轴上的截距为 $\frac{z}{3}$ 的平行直线族。

若 z 取定一个值，比如是 0，则 $0 = 2x_1 + 3x_2$，$x_2 = -\frac{2}{3}x_1$ 就是上述平行直线族中一条确定的直线，将其在图中画出。显然这条直线上的点都是 $2x_1 + 3x_2 = 0$ 的解，即都使目标函数 $2x_1 + 3x_2$ 的值等于零，而这条直线外的任何一点都不是 $2x_1 + 3x_2 = 0$ 的解，即都不能使目标函数 $2x_1 + 3x_2$ 的值等于零。因此称直线 $2x_1 + 3x_2 = 0$ 是 $z = 0$ 时目标函数的等值线(或利润线)。

易于看出，z 取定的值越大，目标函数的等值线 $z = 2x_1 + 3x_2$ 的位置越是沿着其法线方向向右上方平行移动。这就是目标函数等值线的优化方向，如图 1.3 所示。

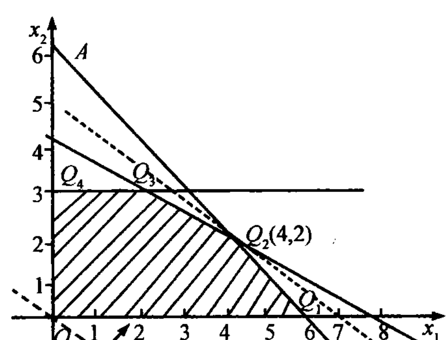


图 1.3

(3) 最优解的确定：

最优解首先必须是可行解，因此只能在可行域中去找。其次还要使它对应的目标函数值达到最优。因此，应该在可行域 $OQ_1Q_2Q_3Q_4$ 中找这样的点，它的位置应尽可能地位于右上方(即沿 $z=2x_1+3x_2$ 的法线方向尽量往右上方靠)。为此，注意到可行域位于直线 $0=2x_1+3x_2$ 的右上方，就知道可将直线 $0=2x_1+3x_2$ 沿着其法线方向尽量往右上方平移，直到它与可行域还有最后一个点或一条线段作为公共部分时为止，这就是等值线的最佳位置。这个(或这些) 公共点就是要求的最优解。

本例中，目标函数在最佳位置上的等值线与可行域的交点为 $Q_2(4,2)$。因此最优解为 $X=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}=(4,2)^{\mathrm{T}}$，相应可算得 $\max z=14$。即知例 1 的使总利润最大的生产计划是生产 Ⅰ、Ⅱ 各 4 件、2 件，最大利润为 14 元。如图 1.3 所示。

例 1 有惟一一个最优解，而一个线性规划的解还可能有以下三种情况：

① 有无穷多个最优解。

如将本例中的目标函数改变为 $\max z=2x_1+4x_2$，则可见目标函数等值线的斜率由 $\frac{2}{3}$ 变为 $-\frac{1}{2}$。当它向右上方平移时，最佳位置将是它与可行域边界线段 Q_2Q_3 重合的位置，因这一边界直线的斜率也是 $\frac{1}{2}$。此时 Q_2 点、Q_3 点以及线段 Q_2Q_3 上的各点都是最优解，它们对应的目标函数值都达到同一个最大值，如图 1.4 所示。

② 有可行解，但没有最优解(亦称有无界解)。

例如，线性规划问题

$$\max z=2x_1+3x_2$$

$$\begin{cases}x_1-x_2\leqslant 1\\ x_1\leqslant 2\\ x_1、x_2\geqslant 0\end{cases}$$

一从图 1.5 可以看出，该问题的可行域上方无边界，目标函数的等值线沿优化方向向右上方无论平移到何处，也不会有对应最优解的最佳位置，即在可行域内，使目标函数达到多么大的点都可找出，目标函数值要多大就可以达到多大。这种问题有可行解，但目标函数值无界(求最大时无上界，求最小时无下界)，故无最优解，如图 1.5 所示。这是由于建立此数学模型时遗漏了某些必要的资源约束条件所致。

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com