高职高等数学系列教材

gaozhi jiaoyu

主　编　刘书田

概率统计学习辅导

第二版

编著者　高旅端　林洁梅

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

高职高等数学系列教材

概率统计学习辅导

（第 二 版）

主　编　刘书田
编著者　高旅端　林洁梅

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

概率统计学习辅导(第二版)/高旅端,林洁梅编著. —北京:北京大学出版社,2004.8
(高职高等数学系列教材)
ISBN 7-301-04797-5

Ⅰ.概… Ⅱ.①高… ②林… Ⅲ.①概率论-高等学校:技术学校-教学参考资料
②数理统计-高等学校:技术学校-教学参考资料 Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 77994 号

书　　名:概率统计学习辅导(第二版)
著作责任者:高旅端　林洁梅　编著
责 任 编 辑:刘　勇
标 准 书 号:ISBN 7-301-04797-5/O·0499
出　版　者:北京大学出版社
地　　址:北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　址:http://cbs.pku.edu.cn
电　　话:邮购部 62752015　发行部 62750672　理科编辑部 62752021
电 子 信 箱:zpup@pup.pku.edu.cn
印　刷　者:北京大学印刷厂
发　行　者:北京大学出版社
经　销　者:新华书店
787×960　16 开本　9.25 印张　189 千字
2001 年 5 月第 1 版　　2005 年 3 月第 2 版
2005 年 8 月第 2 次印刷(总第 4 次印刷)
印　　数:14001—17000 册
定　　价:15.00 元

本书是与北京高等教育精品教材《高职高等数学系列教材——概率统计》配套的辅导书

内 容 简 介

本书是全国高等职业、高等专科教育《高职高等数学系列教材》(该系列教材于 2005 年 1 月被北京市教委评为"北京高等教育精品教材")之一"概率统计"的学习辅导书.本书是配合主教材《概率统计》(第二版)的学习辅导书,本书依照教材的九章内容即随机事件及其概率、随机变量、随机向量、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、抽样分布、参数估计、假设检验、回归分析与方差分析而编写,与第二版教材相辅相成,同步使用.新版辅导教材每章按照教学要求、内容提要与解题指导、教材习题选解、自测题与参考解答四部分内容编写.教学要求指明学生应掌握和理解的知识点;内容提要是把重点内容和容易混淆的概念给出提示,解题指导是通过典型例题的解法教会学生数学思维方法,揭示出解题规律,并通过典型例题中的点评与说明,指出初学者易犯的错误,使学生加深对课堂上所讲内容的理解,以加强基础训练和提高学生的解题能力;教材习题选解是把主教材中学生做题感到困难的习题给出分析和解答;自测题是为学生配置的适量的、难易程度适中的训练题,可供学生检测对基础知识理解程度和解题能力,书中给出自测题的参考解答以供读者参考.

新版辅导教材对解题指导重新进行了改写,加强了对基本概念的阐述和典型例题举例,强调解题思路和解题方法的归纳与总结,以使读者对所学知识达到融会贯通,举一反三,灵活运用之目的.

本书可作为高等职业、高等专科学生学习"概率统计"课的辅导教材或学习参考书,对自考学生和数学爱好者本书也是一本较好的自学用书.

高职教育高等数学系列教材
出版委员会

高职高等数学系列教材书目

高等数学（第二版）	刘书田等编著	定价 29.00 元
微积分（第二版）（经济类、管理类适用）	冯翠莲　编著	定价 19.00 元
线性代数（第二版）	胡显佑等编著	定价 16.00 元
概率统计（第二版）	高旅端等编著	定价 16.00 元
高等数学学习辅导（第二版）	刘书田等编著	定价 26.00 元
微积分学习辅导（第二版）（经济类、管理类适用）	冯翠莲　编著	定价 18.00 元
线性代数学习辅导（第二版）	胡显佑等编著	定价 16.00 元
概率统计学习辅导（第二版）	高旅端等编著	定价 15.00 元

高职高专高等数学系列教材（少学时）书目

新编经济数学基础（经济类、管理类适用）	冯翠莲　主编	定价 22.00 元
新编工科数学基础（工科类适用）（即将出版）	冯翠莲　主编	估价 28.00 元

第二版序言

为了满足迅速发展的我国高职、高专教育“高等数学”课程教学的需要，北京大学出版社组织有丰富高职教学经验的专家、教授编写了《高职高等数学系列教材》. 该系列教材包括《高等数学》、《微积分》、《线性代数》、《概率统计》及其配套辅导教材. 该套教材于 2001 年出版，发行三年多来，受到广大读者的欢迎和好评. 该系列教材的修订版于 2003 年被北京市教委列为“北京市高等教育精品教材立项项目”，并在 2004 年 6 月修订后出版发行第二版. 第二版教材于 2004 年被北京市教委评为**“北京高等教育精品教材”**. 第二版教材主要是基于第一版教材出版三年多来编者授课于高职高等数学的教学实践及读者有关的建议，并融合当前高职教育数学课程建设的改革思路和教学理念，对第一版的内容进行整合、改写和调整. 为了使原辅导教材与精品教材更好地配套、同步使用，我们把辅导教材《高等数学学习辅导》、《微积分学习辅导》、《线性代数学习辅导》、《概率统计学习辅导》按第二版教材重新进行了修订，作为辅导教材的第二版出版发行.

新版辅导教材在第一版的基础上做了较大调整：与教材同步增删了有关内容；对第一版中的解题指导重新进行了改写，加强了对基本概念的阐述和典型例题举例，强调解题思路和解题方法的归纳与总结，以使读者对所学知识达到融会贯通，举一反三，灵活运用之目的；对教材所配置的习题，辅导教材以“教材习题选解”的形式对较难的题目给出了详细的分析和解答，并给予适当点评；对自测题做了精选，使其难易程度、覆盖内容与第二版教材更加接近. 上述调整措施将使得本套辅导教材能更好地发挥辅助学生学习之作用.

编　者

2005 年 2 月于北京

前　言

为了适应我国高等职业教育、高等专科教育的迅速发展，满足当前高职教育高等数学课程教学上的需要，我们依照教育部制定的高职、高专数学课程教学基本要求，为高职、高专工科类及经济类、管理类学生编写了本套高等数学系列教材．本套书分为教材四个分册：《高等数学》(上、下册)、《微积分》、《线性代数》、《概率统计》；配套辅导教材四个分册：《高等数学学习辅导》(上、下册)、《微积分学习辅导》、《线性代数学习辅导》、《概率统计学习辅导》，总共 8 分册．**书中加“ * ”号的内容**，对非工科类学生可不讲授．

编写本套系列教材的宗旨是：以提高高等职业教育教学质量为指导思想，以培养高素质应用型人材为总目标，力求教材内容“涵盖大纲、易学、实用”．本套系列教材具有以下特点：

1．教材的编写紧扣高职、高专数学课程教学基本要求，慎重选择教材内容．既考虑到高等数学本学科的科学性，又能针对高职班学生的接受能力和理解程度，适当选取教材内容的深度和广度；既注重从实际问题引入基本概念，揭示概念的实质，又注重基本概念的几何解释、物理意义和经济背景，以使教学内容形象、直观，便于学生理解和掌握，并达到“学以致用”的目的．

2．为使学生更好地掌握教材的内容，我们编写了配套的辅导教材，教材与辅导教材的章节内容同步，但侧重点不同．辅导教材每章按照教学要求、内容提要与解题指导、自测题与参考解答三部分内容编写．教学要求指明学生应掌握、理解或了解的知识点；内容提要把重要的定义、定理、性质以及容易混淆的概念给出提示，解题指导是通过典型例题的解法给出点评、分析与说明，并给出解题方法的归纳与总结．教材与辅导教材相辅相成，同步使用．

3．本套教材叙述通俗易懂、简明扼要、富有启发性，便于自学；注意用语确切，行文严谨．教材每节后配有适量习题，书后附有习题答案和解法提示．辅导教材按章配有自测题并给出较详细的参考解答，便于教师和学生使用．

本套系列教材的编写和出版，得到了北京大学出版社的大力支持和帮助，同行专家和教授提出了许多宝贵的建议，在此一并致谢

限于编者水平，书中难免有不妥之处，恳请读者指正．

编　者

2001 年 1 月于北京

目　　录

第一章　随机事件及其概率

一、教学要求

1. 理解随机事件及其概率的概念.
2. 掌握随机事件的关系与运算.
3. 熟练掌握概率的基本性质.
4. 会计算比较简单的古典概型的概率.
5. 掌握条件概率和乘法公式.
6. 理解事件的独立性的概念.
7. 会计算伯努利概型的概率.

二、内容提要与解题指导

（一）事件的关系与运算

随机事件是最基本的概念.随机事件是随机试验的样本空间中的部分基本事件所组成的集合.要会用基本事件表示随机事件.

在事件的关系与运算中，应重点掌握和事件、积事件及对立事件.对于用数学符号表示的事件，要知道它的具体意义；另一方面，对一个具体的事件，要会用数学符号表示它.在此基础上，要学会使用事件的关系与运算表示比较复杂的事件，这时经常用到对偶公式.

在使用事件的关系与运算表示其他事件时，常常使用以下 3 种方法：第一种方法是根据事件的关系与运算的定义；第二种方法是画图；第三种方法是先写出原事件的对立事件，利用对立事件的对立事件就是原事件来表示原事件，这常用于原事件的对立事件容易写出时.

要注意，一个事件用其他事件表示时，表示方法可能不惟一.

例 1　以下说法是否成立：

（1）若事件 A,B 互不相容，事件 B,C 互不相容，则事件 A,C 互不相容；

（2）若事件 A,B 互不相容，则 A,B 互为对立事件；

（3）事件 A,B 至少有一个发生的对立事件是 A,B 都不发生；

（4）设事件 $A=$“两件产品都是正品”，则 $\overline{A}=$“两件产品都不是正品”.

解　（1）不成立.例如掷骰子的试验，设 $A=\{1,3,5\}$，$B=\{2,4,6\}$，$C=\{3,5\}$，这时

A,B 互不相容，B,C 互不相容，但 A,C 不是互不相容.

(2) 不成立. 例如在(1)中，B,C 互不相容，但 B,C 不是互为对立事件.

(3) 成立. 事件 A,B 至少有一个发生的对立事件可以表示为 $\overline{A\cup B}$，根据对偶公式，$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$，即 A,B 都不发生.

(4) 不成立. 应该是 $\overline{A}$="两件产品不都是正品"或 $\overline{A}$="两件产品中至少有一件不是正品".

例 2 设 A,B,C 表示 3 个事件，使用 A,B,C 表示事件 D="3 个事件中至少有一个发生".

解 第一种方法：使用事件运算的定义知

$$D = A \cup B \cup C.$$

第二种方法：使用画图法. 图 1 中共有 8 个部分，分别表示 8 个事件. 事件 D 应当包括 7 个部分，它们是：$A\overline{B}\,\overline{C}$，$\overline{A}B\overline{C}$，$\overline{A}\,\overline{B}C$，$AB\overline{C}$，$A\overline{B}C$，$\overline{A}BC$，$ABC$，因此

$$D=A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC.$$

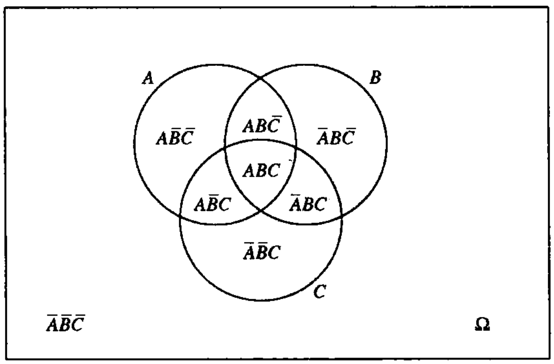

图 1

第三种方法：先写出 D 的对立事件

$$\overline{D} = \text{“3 个事件都不发生”} = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C},$$

而 $\overline{D}$ 的对立事件就是 D，因此

$$D = \overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}},$$

使用对偶公式易知

$$\overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}} = A \cup B \cup C.$$

例 3 袋中有红、白两种颜色的球，作无放回的抽样试验，连抽 3 次，每次抽一球. 设 A_i="第 i 次抽到红球"($i=1,2,3$)，试用 A_i 表示下列事件：

(1) 前两次都抽到红球；

(2) 至少有一次抽到红球；

(3) 第二次抽到白球;

(4) 恰有两次抽到红球;

(5) 后两次中至多有一次抽到红球.

解 (1) 前两次都抽到红球为 A_1,A_2 同时发生,即为 A_1A_2.

(2) 至少有一次抽到红球为 A_1,A_2,A_3 至少有一个发生,即为 $A_1\cup A_2\cup A_3$.

(3) 第二次抽到白球为 $\overline{A}_2$.

(4) 恰有两次抽到红球为 A_1,A_2,A_3 中恰有两个发生,因此为

$$A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3.$$

(5) 后两次中至多有一次抽到红球为 A_2,A_3 或者一个发生,或者都未发生,即 $A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_2\overline{A}_3$. 或考虑其对立事件是后两次中均抽到红球,可表示为 A_2A_3,故后两次中至多有一次抽到红球为$\overline{A_2A_3}$.

例 4 设事件 A,B,C 两两互不相容, $A\cup B\cup C=\Omega$,求 $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$.

解 使用对偶公式有 $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}=\overline{ABC}$. 由于 A,B,C 两两互不相容,因此 $ABC=\Phi$. 从而 $\overline{ABC}=\Omega$,即 $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}=\Omega$.

(二) 事件的概率及其性质

事件的概率也是最基本的概念,要了解概率的统计定义. 概率的基本性质是进行概率计算的基础,主要有以下公式:

$$P(\Omega)=1,\quad P(\Phi)=0,$$
$$P(A)=1-P(\overline{A}),$$
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB),$$

当 A,B 互不相容时,

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B).$$

在进行概率计算时,首先利用事件的关系与运算,把要计算概率的事件用一些简单事件表示,这些简单事件的概率通常是容易求得的;然后使用概率的基本性质,把要计算的概率转化为简单事件概率的计算.

当事件 A 及其对立事件 $\overline{A}$ 的概率中有一个容易计算,而另一个不易计算时,经常使用公式 $P(A)=1-P(\overline{A})$,把不易计算的概率转化为容易计算的概率.

例 5 设 $P(A)=x,P(B)=y,P(AB)=z$,用 x,y,z 表示:

(1) $P(\overline{A}\cup\overline{B})$; (2) $P(\overline{A}\,\overline{B})$; (3) $P(A\overline{B})$.

解 (1) 使用对偶公式: $\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{AB}$,可得

$$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-z.$$

(2) 使用对偶公式: $\overline{A}\,\overline{B}=\overline{A\cup B}$,可得

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$$

$$= 1 - [P(A) + P(B) - P(AB)]$$
$$= 1 - x - y + z.$$

(3) $A=A\Omega=A(B\cup\overline{B})=AB\cup A\overline{B}$,这里 AB 与 $A\overline{B}$ 互不相容,于是

$$P(A) = P(AB \cup A\overline{B}) = P(AB) + P(A\overline{B}),$$

从而

$$P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) = x - z.$$

例 6 在某城市中发行 3 种报纸 A,B,C. 经调查,订阅 3 种报纸 A,B,C 的比例分别是 0.45,0.35,0.30;同时订阅两种报纸 AB,AC,BC 的比例分别是 0.10,0.08,0.05;订阅全部 3 种报纸的比例是 0.03. 求:

(1) 至少订阅一种报纸的概率;

(2) 不订阅任何报纸的概率;

(3) 只订阅报纸 A 的概率.

解 已知 $P(A)=0.45,P(B)=0.35,P(C)=0.30,P(AB)=0.10,P(AC)=0.08,P(BC)=0.05,P(ABC)=0.03$.

(1) 所求概率为 $P(A\cup B\cup C)$. 使用 3 个事件之和的概率加法公式,得到

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$
$$= 0.45 + 0.35 + 0.30 - 0.10 - 0.08 - 0.05 + 0.03$$
$$= 0.90.$$

(2) 所求概率为 $P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})$. 使用对偶公式可得

$$P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}) = P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - P(A \cup B \cup C)$$
$$= 1 - 0.90 = 0.10.$$

(3) 所求概率为 $P(A\overline{B}\,\overline{C})$. 由于

$$A\overline{B}\,\overline{C} = A(\overline{B}\,\overline{C}) = A(\overline{B \cup C})$$
$$= A - (B \cup C) = A - A(B \cup C),$$

并且 $A(B\cup C)\subset A$,从而

$$P(A\overline{B}\,\overline{C}) = P[A - A(B \cup C)] = P(A) - P[A(B \cup C)]$$
$$= P(A) - P(AB \cup AC).$$

由加法公式有

$$P(AB \cup AC) = P(AB) + P(AC) - P(ABC)$$
$$= 0.10 + 0.08 - 0.03 = 0.15,$$

从而

$$P(A\overline{B}\,\overline{C}) = 0.45 - 0.15 = 0.30.$$

(三) 古典概型

古典概型具有两个性质: 试验的基本事件的数目有限;每个基本事件发生的可能性

相同. 在古典概型中，事件 A 的概率计算公式为

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{A\text{ 包含的基本事件数}}{\Omega\text{ 中基本事件的总数}}.$$

使用上述公式的主要工作是计算 m 和 n.

通常，古典概型所涉及的具体问题各式各样，计算 m 和 n 的方法没有固定格式，往往十分灵活，而且容易把基本事件重复计算或者遗漏计算，因此容易出差错. 这是古典概型问题的难度所在，使得古典概型成为概率论中的一个难点.

在确定一个试验的每个基本事件发生的可能性相同时，经常根据问题的本身所具有的某种"对称性"，即利用人们长期积累的关于"对称性"的实际经验，认为某些基本事件发生的可能性没有理由偏大或偏小. 例如，抛一枚均匀的硬币，"出现正面"和"出现反面"这两个基本事件发生的可能性应该相同，因为这个问题具有"对称性". 如果这两个基本事件发生的可能性不相同，则与长期形成的"对称"经验不符.

在计算 m 和 n 时，经常使用排列与组合的计算公式，特别是组合计算公式.

设有 s 个不同的元素，从中任意取出 $r(0<r\leqslant s)$ 个构成一组. 这里，不考虑 r 个元素的次序，只研究有多少种不同的取法. 称每一个取得的组为一种**组合**. 对于所有不同组合的种数，用 $\binom{s}{r}$ 表示，或用 C_s^r 表示. $\binom{s}{r}$ 的计算公式为

$$\binom{s}{r}=\frac{s!}{r!(s-r)!}=\frac{s(s-1)\cdots(s-r+1)}{r!},$$

并且规定 $0!=1$.

抽球问题是古典概型中的一类常见的问题，也是学习的重点所在. 教材第 10 页的例 2 和第 11 页的例 3 都属于抽球问题.

另外，在抽球问题中，有时要用到概率的基本性质.

例 7　从一副扑克的 52 张牌(黑桃、方块、红心、梅花各 13 张)中，

(1) 任意抽取两张牌，求两张牌都是黑桃的概率；

(2) 任意抽取两张牌，求至多有一张黑桃的概率；

(3) 任意抽取 10 张牌，求有 5 张黑桃的概率；

(4) 任意抽取 10 张牌，求有 5 张牌是黑桃、3 张牌是方块的概率.

解　(1) 这是古典概型中的抽球问题：这时可视黑桃牌为红色球，其他牌为白色球，于是

$$P(\text{“两张牌都是黑桃”})=\frac{\binom{13}{2}}{\binom{52}{2}}=\frac{1}{17}=0.0588.$$

(2) 由于事件"至多有一张黑桃"的对立事件是"两张牌都是黑桃"，因此，

$$P(\text{“至多有一张黑桃”}) = 1 - P(\text{“两张牌都是黑桃”})$$
$$= 1 - \frac{1}{17} = \frac{16}{17} = 0.9412.$$

(3) 这也是抽球问题，

$$P(\text{“5 张牌是黑桃”}) = \frac{\binom{13}{5}\binom{39}{5}}{\binom{52}{10}} = 0.0468.$$

(4) 本质上也是抽球问题，只不过球的组成为 3 类(黑桃、方块、其他)，于是所求概率为

$$P = \frac{\binom{13}{5}\binom{13}{3}\binom{26}{2}}{\binom{52}{10}} = 0.0076.$$

(四) 条件概率与乘法公式

条件概率是个基本概念，条件概率的定义也就是计算公式：

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \quad (P(A) > 0).$$

由此可得乘法公式

$$P(AB) = P(A)P(B|A) \quad (P(A) > 0).$$

对称地可得

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad P(AB) = P(B)P(A|B) \quad (P(B) > 0).$$

当条件概率容易求出时，可以使用乘法公式计算积事件的概率.

例 8　盒中装有 m 个白球和 n 个黑球，现从中不放回地抽取两次，每次任取一个球. 求在第一次抽取到白球的条件下，第二次又抽取到白球的概率.

解　设 A=“第一次抽取到白球”，B=“第二次抽取到白球”，所求概率为 $P(B|A)$. 根据条件概率的含义，在事件 A 发生的条件下，盒中有 $m-1$ 个白球和 n 个黑球，此时抽到白球的概率为 $\frac{m-1}{m+n-1}$，即为所求的 $P(B|A)$.

例 9　已知 $P(A)=P(B)=0.4$，$P(A\cup B)=0.5$，求 $P(A|B)$，$P(A|\overline{B})$.

解　由加法公式 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ 可得

$$P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.3,$$

从而

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0.3}{0.4}=0.75.$$

为求 $P(A|\overline{B})$，先要求出 $P(A\overline{B})$. 由于 $A\overline{B}=A-B$，$A\cup B=B\cup(A-B)$，所以