高等学校教材

常微分方程

（第二版）

王高雄　周之铭　朱思铭　王寿松　编

高等教育出版社

高等学校教材

常微分方程

（第二版）

王高雄　周之铭　朱思铭　王寿松 编

高等教育出版社

本书是中山大学数学力学系常微分方程组编《常微分方程》1978年版的修订本(第二版),这次修订除了对原书进行了一些修改以及充实了各章、节的习题外,还考虑了师范院校常微分方程教学大纲的要求,增加了一章线性偏微分方程的内容.

全书主要内容有:绪论;一阶微分方程的初等解法;一阶微分方程的解的存在定理;高阶微分方程;线性微分方程组;非线性微分方程和稳定性;一阶线性偏微分方程.此外还有两个附录:拉普拉斯变换;边值问题.

本书可作综合大学和师范院校数学专业,以及师范专科学校数学科常微分方程课程的教材.

本书第二版由丁同仁副教授审阅.

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程/王高雄等编.—2版(修订).—北京:
高等教育出版社,2002重印
ISBN 7-04-001228-6

Ⅰ.常… Ⅱ.王… Ⅲ.常微分方程 Ⅳ.0175.1

中国版本图书馆CIP数据核字(95)第20525号

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市东城区沙滩后街55号　**邮政编码** 100009
电　　话 010—64054588　**传　　真** 010—64014048
网　　址 http://www.hep.edu.cn

经　　销 新华书店北京发行所
印　　刷 北京市朝阳区北苑印刷厂
开　　本 850×1168 1/32　**版　　次** 1978年12月第1版
印　　张 12.25　1983年9月第2版
字　　数 294 000　**印　　次** 2002年3月第25次印刷
定　　价 11.90元

第二版前言

本版是根据《高等学校理科一九八一至一九八五年教材编写规划》和一九八〇年在上海举行的高等学校理科数学、力学、天文学教材编审委员会扩大会议上审订的“常微分方程教学大纲”的要求，结合几年来的教学实践，在第一版的基础上修改、补充而成的。除对全书进行全面修改外，重点补充改写了第三、第五章的若干部分；增添了第七章一阶线性偏微分方程；此外，还充实了各章、节的习题。

本书第一版自一九七八年出版以来，得到了兄弟院校广大师生的关心和支持，他们为这次修订工作提供了很好的意见，在此谨向这些同志致谢。由于经验和水平的关系，本版一定还有错漏或不完善的地方，热切希望同志们批评指正。

编　者

1982 年 10 月

编者说明

本书是在中山大学数学力学系原《常微分方程讲义》基础上，参考国内外一些同类的教材，经过加工和补充编写而成．全稿是在许淞庆教授主持下，由王高雄、周之铭、朱思铭、王寿松四位同志分工编写，经过反复讨论、多次修改完成．由于时间匆促，更受科学水平和教学经验的限制，一定存在不少缺点，甚至还有错误之处．恳切希望同志们提出批评和指正．

关于全书各章的主要内容，请参阅各章后面的“学习要点”．下面就我们在编写过程中的几点考虑作些说明．

一、考虑到《常微分方程》不但是数学的基础课，同时也是常微分方程学科本身近代发展方向的重要基础．本书除讲述常微分方程的最基本的从而是比较经典性的传统内容外，在第六章着重介绍微分方程的重要分支——稳定性理论的一般概念和重要结果，其中包括李雅普诺夫第二方法的主要定理及一类控制系统的绝对稳定性问题．同时在第五章讲述线性方程组时，采用了矩阵和向量等工具．为进一步学习这门学科准备某些必要的基础．

二、在编写过程中，力图做到“由浅入深，循序渐进”和“少而精”；注意突出重点，力求论证详细明了，便于自学．在基本定理的证明中，反复运用皮卡逐步逼近法，希望读者不但了解定理内容，同时要掌握这一证明方法．此外，每章还附“学习要点”，对该章内容加以总结，帮助读者掌握各部分基本内容．我们略去一阶偏微分方程部分，对于奇解则只是简单地介绍它的概念和求法．

三、在加强基本理论教学的同时，注意运算技能的培养和训练．书中各部分内容均配有典型例子，并加以说明．此外，各章、节还配有相当数量的习题，希望通过做习题这个环节，来帮助培

养、提高解题能力和技巧.

四、高阶线性方程和线性方程组完全可以统一起来处理，采用矩阵和向量等工具，使叙述上显得十分方便. 但是，我们认为在常系数高阶线性方程的具体求解过程上，不采用先过渡到方程组的办法，而直接应用本书第四章介绍的方法，可能更为简便些.

基于上述的考虑，我们将上述内容分别设章编写：先讲高阶线性方程，后讲一阶线性方程组. 在第五章中，关于常系数线性方程组的基解矩阵的计算，我们避免了化矩阵为约当型的麻烦，但却不能不用到关于空间的分解等较深的代数知识. 有较好的线性代数基础的读者，可以先学习第五章，而将第四章§4.1的结果作为有关定理的直接推论. 因此，使用本书时，对第四章和第五章的有关内容，可以灵活处理，根据实际情况进行调整.

五、在内容安排上，我们既考虑到大纲中关于学时的要求，又不完全受其限制. 书中某些章节，特别第六章的内容是供选讲用的. 这一章的主要定理都给出了证明，有些用小字排印，那是为学有余力的读者而写的. 这些内容讲多讲少请任课教师酌定.

六、最后，鉴于工程技术方面对拉普拉斯变换法的需要，除在第四章和第五章的有关部分加以应用外，还在书末配置附录I，介绍拉普拉斯变换的基本概念和主要性质. 此外，考虑到微分方程边值问题的实际意义，在附录II中作为参考资料来介绍.

书末附有各章节习题答案，供读者参考.

本书由南京大学主审，复旦大学、武汉大学、兰州大学参加审查. 审稿同志提出许多宝贵意见. 这些意见对本书的定稿工作很有帮助. 本书修改后，又经主审人何崇佑同志认真复审. 在此，我们谨向这些同志表示谢意.

编者于广州中山大学

一九七八年七月

目　录

第一章 绪 论

数学分析中所研究的函数，是反映客观现实世界运动过程中量与量之间的一种关系. 但在大量的实际问题中遇到稍为复杂的一些运动过程时，反映运动规律的量与量之间的关系(即函数)往往不能直接写出来,却比较容易地建立这些变量和它们的导数(或微分)间的关系式. 这种联系着自变量、未知函数及它的导数(或微分)的关系式,数学上称之为**微分方程**，当然其中未知函数的导数或微分是不可缺少的. 本章将通过几个具体的例子，粗略地介绍常微分方程的一些物理背景和方程的建立问题，并讲述一些最基本的概念.

§1.1 微分方程:某些物理过程的数学模型

让我们先从一个具体的例子谈起.

例 1 物体冷却过程的数学模型

将某物体放置于空气中,在时刻 $t=0$ 时，测量得它的温度为 $u_0=150°\mathrm{C}$, 10 分钟后测量得温度为 $u_1=100°\mathrm{C}$. 我们要求决定此物体的温度 u 和时间 t 的关系,并计算 20 分钟后物体的温度. 这里我们假定空气的温度保持为 $u_a=24°\mathrm{C}$.

解 为了解决上述问题，需要了解有关热力学的一些基本规律. 例如,热量总是从温度高的物体向温度低的物体传导的;在一定的温度范围内(其中包括了上述问题的温度在内)，一个物体的温度变化速度与这一物体的温度和其所在介质温度的差值成比例. 这是已为实验证明了的**牛顿(Newton)冷却定律**.

设物体在时刻 t 的温度为$u=u(t)$,则温度的变化速度以$\frac{du}{dt}$来表示. 注意到热量总是从温度高的物体向温度低的物体传导的,因而 $u_0>u_a$,所以温差$u-u_a$恒正;又因物体将随时间而逐渐冷却,故温度变化速度$\frac{du}{dt}$恒负. 因此由牛顿冷却定律得到

$$\frac{du}{dt}=-k(u-u_a) \tag{1.1}$$

这里 $k>0$ 是比例常数. 方程(1.1)就是物体冷却过程的数学模型,它含有未知函数 u 及它的一阶导数$\frac{du}{dt}$,这样的方程,我们称为**一阶微分方程**.

为了决定物体的温度 u 和时间 t 的关系,我们要从方程(1.1)中"解出"u. 注意到 u_a是常数,且 $u-u_a>0$,可将(1.1)改写成

$$\frac{d(u-u_a)}{u-u_a}=-k\,dt \tag{1.2}$$

这样,变量 u 和 t 被"分离"开来了. 两边积分,得到

$$\ln(u-u_a)=-kt+\tilde{c} \tag{1.3}$$

这里 $\tilde{c}$ 是"任意常数". 根据对数的定义,得到

$$u-u_a=\mathrm{e}^{-kt+\tilde{c}}$$

由此,令 $\mathrm{e}^{\tilde{c}}=c$,即得

$$u=u_a+c\mathrm{e}^{-kt} \tag{1.4}$$

根据"初始条件":

$$\text{当 } t=0 \text{ 时}, u=u_0 \tag{1.5}$$

容易确定"任意常数" c 的数值. 为此目的,以 $t=0$ 和 $u=u_0$ 代入(1.4),得到

$$c=u_0-u_a$$

于是

$$u=u_a+(u_0-u_a)\mathrm{e} \tag{1.6}$$

如果 k 的数值确定了，(1.6) 就完全决定了温度 u 与时间 t 的关系.

根据条件 $t=10$①, $u=u_1$, 得到

$$u_1=u_a+(u_0-u_a)\mathrm{e}^{-10k}$$

由此，

$$k=\frac{1}{10}\ln\frac{u_0-u_a}{u_1-u_a}$$

用给定的 $u_0=150$, $u_1=100$ 和 $u_a=24$ 代入，得到

$$k=\frac{1}{10}\ln\frac{150-24}{100-24}=\frac{1}{10}\ln 1.66\approx 0.051$$

从而

$$u=24+126\mathrm{e}^{-0.051t} \tag{1.7}$$

这样，根据方程(1.7)，就可以计算出任何时刻 t 物体的温度 u 的数值了. 例如 20 分钟后物体的温度就是 $u_2\approx 70$°C. 方程(1.7)还告诉我们，当 $t\to+\infty$ 时，$u\to 24$°C, 这可以解释为：经过一段时间后，物体的温度和空气的温度将会没有什么差别了. 事实上，经过 2 小时后，物体的温度已变为 24.3°C, 与空气的温度已相当接近. 而经过 3 小时后，物体的温度为 24.01°C, 我们的一些测量仪器已测不出它与空气的温度的差别了. 在实用上，人们认为这时物体的冷却过程已基本结束. 所以，经过一段时间后(比如 3 小时后)，可以认为物体的温度和空气的温度并没有什么差别了.

微分方程的"解"可以用图形表示出来，这往往给我们一个简明直观的了解. 图(1.1)就是"解"(1.7)的图形.

我们从例 1 中可以大体看出用微分方程解决实际问题的基本步骤：(1)建立起实际问题的数学模型，也就是建立反映这个实际问题的微分方程；(2)求解这个微分方程；(3)用所得的数学结果

① 为书写方便起见，在运算过程中，我们略去各量的量纲.

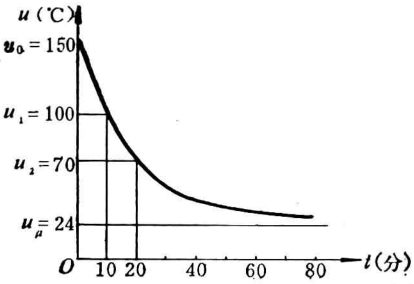

图 (1.1)

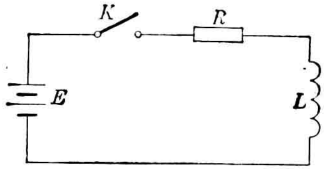

图 (1.2)

解释实际问题，从而预测到某些物理过程的特定性质，以便达到能动地改造世界，解决实际问题的目的.

建立起实际问题的数学模型一般是比较困难的，因为这需要对与问题有关的自然规律有一个清晰的了解(例如，例 1 中就要了解热力学中的牛顿冷却定律)，同时也需要有一定的数学知识. 为了要建立起实际问题的数学模型，读者一定要学习有关的自然科学和工程技术的专业知识. 微分方程往往可以看作是各种不同物理现象的数学模型. 我们在建立微分方程的时候，只能考虑影响这个物理现象的一些主要因素，而把其他一些次要因素忽略掉. 如果的确考虑到了那些最主要的因素，那么，我们所得到的微分方程，它的解和所考虑的物理现象就是比较接近的. 这时，我们得到的数学模型是有用的；否则，我们还应该考虑其他的一些因素，以便建立起更为合理的数学模型.

下面再举几个例子说明如何建立微分方程的问题. 至于如何求解这些微分方程，则留待以后各章再讨论.

例 2 R-L 电路

如图(1.2)的 R-L 电路，它包含电感 L，电阻 R 和电源 E. 设 $t=0$ 时，电路中没有电流. 我们要求建立：当开关 K 合上后，电流 I 应该满足的微分方程. 这里假设 R、L、E 都是常数.

解 为了建立电路的微分方程，我们引用关于电路的基尔霍夫(Kirchhoff)第二定律：在闭合回路中，所有支路上的电压的代数和等于零.

注意到经过电阻R的电压降是RI，而经过电感L的电压降是$L\dfrac{dI}{dt}$，由基尔霍夫第二定律得到

$$E-L\frac{dI}{dt}-RI=0$$

即

$$\frac{dI}{dt}+\frac{R}{L}I=\frac{E}{L} \tag{1.8}$$

求出的$I=I(t)$应满足条件：

$$当\ t=0\ 时,I=0 \tag{1.9}$$

如果假定在$t=t_0$时，$I=I_0$，电源E突然短路，因而E变为零，此后亦保持为零. 那末电流I满足方程

$$\frac{dI}{dt}+\frac{R}{L}I=0 \tag{1.10}$$

及条件：

$$当\ t=t_0时,I=I_0 \tag{1.11}$$

例 3 R-L-C电路

如图(1.3)所示的R-L-C电路，它包括电感L、电阻R和电容C. 我们设R、L、C均为常数，电源$e(t)$是时间t的已知函数. 我们要求建立：当开关K合上后，电流I应该满足的微分方程.

解 注意到经过电感L、电阻R和电容C的电压降分别为：$L\dfrac{dI}{dt}$、RI和$\dfrac{Q}{C}$，其中Q为电量，因此由基尔霍夫第二定律得到

$$e(t)=L\frac{dI}{dt}+RI+\frac{Q}{C} \tag{1.12}$$

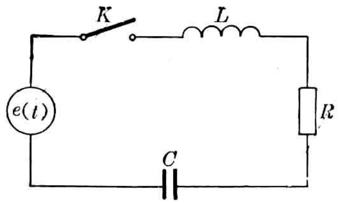

图 (1.3)

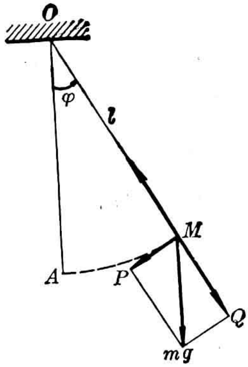

图 (1.4)

因为 $I=\frac{dQ}{dt}$,微分(1.12)得到

$$\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dI}{dt}+\frac{I}{LC}=\frac{1}{L}\frac{de(t)}{dt} \tag{1.13}$$

这就是电流 I 应该满足的微分方程. 如果 $e(t)=$常数,得到

$$\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dI}{dt}+\frac{I}{LC}=0 \tag{1.14}$$

如果又有 $R=0$,则得到

$$\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{1}{LC}=0 \tag{1.15}$$

例 4 数学摆

数学摆是系于一根长度为 l 的线上而质量为 m 的质点 M, 在重力作用下,它在垂直于地面的平面上沿圆周运动, 如图(1.4)所示. 我们要确定摆的运动方程.

解 设取反时针运动的方向作为计算摆与铅垂线所成的角 φ 的正方向. 质点 M 沿圆周的切向速度 v 可以表为 $v=l\frac{d\varphi}{dt}$. 作用于质点 M 的重力 mg 将摆拉回平衡位置 A. 把重力 mg 分解为两个分量 $\overrightarrow{MQ}$ 和 $\overrightarrow{MP}$,第一个分量 $\overrightarrow{MQ}$ 沿着半径 OM 的方向,与线的拉

力相抵消，它不会引起质点M的速度 v 的数值的改变．第二个分量 $\overrightarrow{MP}$沿着圆周的切线方向，它引起质点M的速度 v 的数值的改变．因为 $\overrightarrow{MP}$总是使质点M向着平衡位置A的方向运动，即当角 φ 为正时，向减小 φ 的方向运动；当角 φ 为负时，向增大 φ 的方向运动，所以 $\overrightarrow{MP}$的数值等于$-mg\sin\varphi$．因此，摆的运动方程是

$$m\frac{dv}{dt}=-mg\sin\varphi \tag{1.16}$$

即

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-\frac{g}{l}\sin\varphi \tag{1.17}$$

如果只研究摆的微小振动，即当 φ 比较小时的情况，我们可以取 $\sin\varphi$ 的近似值 φ 代入方程(1.17)．这样，就得到微小振动时摆的运动方程

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{g}{l}\varphi=0 \tag{1.18}$$

如果我们假设摆是在一个粘性的介质中摆动，那么，沿着摆的运动方向就存在一个与速度 v 成比例的阻力．如果阻力系数是 μ，则摆的运动方程变为

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{\mu}{m}\frac{d\varphi}{dt}+\frac{g}{l}\varphi=0 \tag{1.19}$$

如果沿着摆的运动方向恒有一个外力 $F(t)$作用于它，这时摆的运动称为强迫微小振动，其方程为

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{\mu}{m}\frac{d\varphi}{dt}+\frac{g}{l}\varphi=\frac{1}{ml}F(t) \tag{1.20}$$

当要确定摆的某一个特定的运动时，我们应该给出摆的初始状态：

$$\text{当 } t=0 \text{ 时,}\quad \varphi=\varphi_0,\quad \frac{d\varphi}{dt}=\omega_0 \tag{1.21}$$

这里 φ_0 代表摆的初始位置，ω_0 代表摆的初始角速度．

从以上所举的几个例子中不难发现，完全无关的、本质上不同的物理现象有时可以由同类型的微分方程来描述．例如，反映物体冷却过程的方程

$$\frac{du}{dt}=-k(u-u_a) \tag{1.1}$$

和反映 R-L 电路中电流变化规律的方程

$$\frac{dI}{dt}+\frac{R}{L}I=\frac{E}{L} \tag{1.8}$$

都可以写成

$$\frac{dy}{dt}+K^2y=B \tag{1.22}$$

这里K、B是常数．而 R-L-C 电路的方程

$$\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dI}{dt}+\frac{I}{LC}=\frac{1}{L}\frac{de(t)}{dt} \tag{1.13}$$

和数学摆的强迫微小振动的方程

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{\mu}{m}\frac{d\varphi}{dt}+\frac{g}{l}\varphi=\frac{1}{ml}F(t) \tag{1.20}$$

都具有同一形式

$$\frac{d^2y}{dt^2}+b\frac{dy}{dt}+cy=f(t) \tag{1.23}$$

这里b、c是常数．又 L-C 电路方程

$$\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{I}{LC}=0 \tag{1.15}$$

和阻力系数 $\mu=0$ 的数学摆的自由微小振动方程

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{g}{l}\varphi=0 \tag{1.18}$$

均属于同样的数学模型

$$\frac{d^2y}{dt^2}+k^2y=0 \tag{1.24}$$

这里k是常数．