GUOWAI SHUXUE JINGSAI SHITI JINGXUAN

国外数学竞赛试题精选

（初中分册）

葛显良 主编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

国外数学竞赛试题精选

（初中分册）

葛显良　主编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

国外数学竞赛试题精选. 初中分册/葛显良主编. —杭州：浙江大学出版社，2010.7

ISBN 978-7-308-07752-1

Ⅰ.①国… Ⅱ.①葛… Ⅲ.①数学课—初中—习题 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 123439 号

国外数学竞赛试题精选(初中分册)

葛显良　主编

责任编辑　王同裕
文字编辑　夏晓冬
封面设计　刘依群
出版发行　浙江大学出版社
(杭州市天目山路 148 号　邮政编码 310007)
(网址：http://www.zjupress.com)
排　　版　杭州大漠照排印刷有限公司
印　　刷　德清县第二印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　10.25
字　　数　231 千
版 印 次　2010 年 7 月第 1 版　2010 年 7 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-07752-1
定　　价　20.00 元

浙江大学出版社发行部邮购电话 (0571) 88925591

编写说明

数学是锻炼思维的体操，以数学为内容的竞赛已有悠久的历史. 在6世纪，意大利的Tartalia和Cardano曾以解一元三次方程为内容进行过激烈的竞赛. 在9世纪，法国科学院等也曾以悬赏的形式征求对数学难题的解答，通过有奖比赛而得到重要的数学发现.

国际数学奥林匹克的权威人士认为，以激发数学才能和引起数学兴趣为目的，中学生自愿参加的数学竞赛是从匈牙利开始的. 继匈牙利之后，罗马尼亚于1902年由《数学杂志》组织过数学竞赛. 在以后的30年中再没有其他国家系统举办过重大的类似活动，直到匈牙利数学竞赛造就的大师们纷纷登台的时候，欧洲其他国家才睁开惊奇的目光，产生了浓厚的兴趣，并争相效仿.

事实表明，20世纪50年代以来，世界各地举办中学生数学竞赛的热潮，它既为国际数学奥林匹克(IMO)的诞生准备了条件，又为世界数学奥林匹克的发展提供了动力.

随着世界各地各级各类数学竞赛活动的蓬勃开展，对数学奥林匹克竞赛试题的研究也悄然兴起. 国际数学奥林匹克的发展使得竞赛的试题也形成一定的规范：它不再限定在各国高中数学的范围，而更多的是一般中学不怎么涉及的领域，如初等数论、组合论、平面几何、不等式等方面. 而且试题的难度不在于了解和解决试题所需要的数学知识的多少，而在于对数学本质的洞察力以及是否具有创造力和数学的机智，试题无模式可套，要求学生探索思考，寻找规律.

由于IMO试题的上述特点，有人认为IMO试题代表的是一种特殊的数学，可以称为“奥林匹克数学”. 对于数学奥林匹克活动而言，其中最吸引人的，无疑就是那一道道闪耀着数学智慧，散发着数学美的试题.

基于数学竞赛试题的重要作用，对竞赛试题的研究和分析就成为一项重要的工作. 为加强交流学习，开阔视野，给数学奥林匹克爱好者提供学习的源泉，我们特组织编写本书.

本书汇集了国外重大数学竞赛的试题和解答. 这些竞赛试题构思独特，新颖别致，灵活深邃，内容广，内涵深. 解这些题不仅需要扎实的基础知识和基本技能，也需要灵活的思维和坚强的毅力. 因此，对于有志于参加数学竞赛的同学来说，本书中的问题是不可或缺的训练材料. 本书也是对国际数学竞赛资料的一次大整理，可作为各数学竞赛老师的一份重要资料，作为数学爱好者了解数学竞赛的一个窗口.

目　录

一、实数及其运用

二、代　数

三、几　何

四、其他主题

实数及其应用

1. 近似值

1. 以下哪一个是$\frac{1983}{10000}$的正平方根的最佳估计值？ ( )

A. 0.0045 B. 0.0141 C. 0.0445 D. 0.1408 E. 0.4453

【解】 将给定数夹在两个完全平方之间，

$$\frac{1600}{10000}<\frac{1983}{10000}<\frac{2500}{10000}.$$

取平方根

$$\frac{40}{100}<\sqrt{\frac{1983}{10000}}<\frac{50}{100},$$

即

$$0.4<\sqrt{\frac{1983}{10000}}<0.5.$$

答 E.

2. 5^8 中有几位数字？ ( )

A. 4 B. 5 C. 6 D. 7 E. 8

【解法 1】 $5^8=(5^2)^4=25^4=(25^2)^2=(625)^2=390625$. 这里有 6 位数字.

答 C.

【解法 2】 几个不同的近似值是可能的，如

$$5^8=(625)^2\approx(600)^2\approx 360000,$$

或

$$5^8=\frac{10^8}{2^8}=\frac{100000000}{256}\approx\frac{100000000}{250}=400000.$$

在近似范围内这些表示 5^8 有 6 位数字.

答 C.

3. 如图 1 所示，在一片树叶上放一张透明方格纸，方格纸上的小正方形边长为 0.5 厘米. 这片树叶的面积(以厘米^2 为单位) 最接近于 ( )

A. 6 B. 9 C. 12

D. 18 E. 24

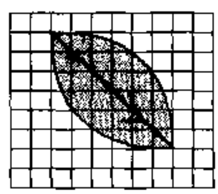

图 1

【解】 由图可知，叶子大约完全占据了 14 个方格，部分地占据了 16 个方格. 假定被部分占据的每个方格被占了一半，这就等价于有 14 +8 个，或者说大约有 22 个方格被叶子占据. 因为每个方格的面积是 0.25 厘米^2，所以叶子占据的总面积(以厘米^2 为单位) 约为0.25×22 或者说约为 5.5.

答　A.

2. 速度、时间和距离

1. 我的汽车配备了一种特别牌子的轮胎，装在前轮其可使用的距离为 40000 千米，装在后轮则可使用 60000 千米，如果将前后轮胎交换使用，我用这一组四个轮胎可行驶的最大距离（以千米为单位）是　（　　）

A. 52000　　B. 50000　　C. 48000　　D. 40000　　E. 44000

【解】　汽车行驶 1 千米四个轮胎的平均功能损耗率为

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{40000}+\frac{1}{40000}+\frac{1}{60000}+\frac{1}{60000}\right)=\frac{1}{48000}.$$

每个轮胎依据此损耗率来使用是最优的. 所以汽车的最大行驶距离是 48000 千米.

答　C.

2. 从布里斯班开往图文巴的列车在每个整点发车，从图文巴开往布里斯班的列车也是每逢整点发车，两个方向的行驶时间都是 3 小时 45 分钟. 如果你坐上中午 12 点从图文巴开往布里斯班的火车，在旅途中将有几列开往图文巴的列车从你的列车旁边经过？　（　　）

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6　　E. 7

【解】　当你离开图文巴时，有三列从布里斯班开来的列车正在铁路上行驶，另有一列正从布里斯班开出，总共是四列. 在你的 $3\frac{3}{4}$ 小时的行程中，又会有三列火车开出布里斯班，所以一共将有七列火车从你的列车旁驶过.

答　E.

3. 两列火车速度之比等于同向行驶从相遇到相离所需时间与反向行驶从相遇到相离所需时间之比，这两列火车速度之比是　（　　）

A. $(1+\sqrt{2}):1$　B. $2:1$　　C. $3:1$　　D. $4:1$　　E. $3:2$

【解】　设两列火车的速度分别为 V_1 和 $V_2(V_1>V_2)$，则

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\dfrac{L_1+L_2}{V_1-V_2}}{\dfrac{L_1+L_2}{V_1+V_2}},$$

其中 L_1, L_2 是两列火车的长度，于是

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{V_1+V_2}{V_1-V_2},$$

即　$$V_1{}^2-2V_1V_2-V_2{}^2=0.$$

设　$$V_1=kV_2,$$

则　$$k^2-2k-1=0,$$

则　$$k=1+\sqrt{2},\text{（舍去负根）}$$

因此，速度之比 $V_1:V_2=(1+\sqrt{2}):1$.

答　A.

4. 有三个古董钟 P, Q, R，它们的时针都掉了，只剩下分针，而且都走得较快，这三个钟每小时分别快了 2 分钟、6 分钟及 12 分钟，若在中午将这三个钟的分针都调整指向钟面上的数字 12. 请问几小时后这三个钟的分针会指示相同的分钟数？（　　）

A. 22　　B. 24　　C. 26　　D. 28　　E. 30

【解】 时钟 P 和 Q 每小时相差 4 分，所以将于 $\frac{60}{4} = 15$ 小时后和以后每 15 小时后指示同样的分数，同样地 P 和 R 每 $\frac{60}{10} = 6$ 小时后显示同样的分数，而 Q 和 R 在 $\frac{60}{12-6} = 10$ 小时后显示同样时间. 于是我们要求被 15，6 和 10 整除的最小的小时数，即 15，6 和 10 小时的最小公倍数，即 30 小时后三个钟的分针会指示相同的分钟数.

答　E.

5. 一支登山探险队雇用挑夫搬运食物及装备，登山者的食物及装备约需 400 位挑夫来搬运，但是必须多雇用一些挑夫来搬运挑夫们所需的食物及衣物，已知一位挑夫可搬运 7 位挑夫所需的食物及衣物，请问这个登山队最少需雇用多少位挑夫？（　　）

A. $457\frac{1}{7}$　　B. 458　　C. $466\frac{2}{3}$　　D. 467　　E. 500

【解】 因为每一位挑夫能运送 7 位挑夫的食物和衣物，每位挑夫有 $\frac{6}{7}$ 的负荷去运送登山者的装备，因为登山者需要 400 挑夫的负荷，所以所需挑夫的人数是大于或等于

$$400 \div \frac{6}{7} = \frac{7 \times 400}{6} = 466\frac{2}{3}$$

的最小整数，即 467.

答　D.

6. 某高中每天上课时间为上午 8:30 至下午 3:30，请问在这段时间内校园里的大钟的时针和分针会夹成直角几次？（　　）

A. 6　　B. 11　　C. 12　　D. 13　　E. 14

【解】 第一次出现在上午 9 时而最后一次是下午 3 时（因为有一次接近上午 8:27，有一次接近下午 3:32），在 9 时和 10 时之间恰有 1 次，10 时和 11 时之间有 2 次，11 时和 12 时之间有 2 次，12 时和 1 时之间有 2 次，1 时和 2 时之间有 2 次，2 时和 3 时之间有 1 次，因而成直角的次数是 $2+2+2+2+2+1+1 = 12$.

答　C.

3. 平均值

1. 在保龄球游戏的最近一局中凯恩得 199 分，从而把若干局的平均分由 177 分提高到 178 分，为了把他的平均分提高到 179 分，下一局他必须得（　　）

A. 179 分　　B. 180 分　　C. 199 分　　D. 200 分　　E. 201 分

【解】 设凯恩已玩了 n 局，则

$$\frac{177n + 199}{n+1} = 178.$$

这样 $177n + 199 = 178n + 178$，即 $n = 21$. 如果 x 是他的下一个分数，则

$$\frac{178 \times 22 + x}{23} = 179.$$

所以 $$x = 23 \times 179 - 22 \times 178 = 201.$$

答 E.

2. 如果 n 个连续正整数之和是 105，则在以下诸数中 n 的值不能是 (　　)

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6　　E. 7

【解】 这 n 个整数的平均数是 $\frac{105}{n}$.

n	平均数	解	
3	35	34,35,36	存在
4	$26\frac{1}{4}$	这必须是中间两个整数的平均数，不可能	
5	21	19,20,21,22,23	存在
6	$17\frac{1}{2}$	15,16,17,18,19,20	存在
7	15	12,13,14,15,16,17,18	存在

答 B.

3. 一个青年团体，如果有五个 9 岁的成员退出，或者有五个 17 岁的青年加入(两种情况不同时发生)，其成员的平均年龄都将增加 1 岁，那么，这个团体原有成员的人数是 (　　)

A. 20　　B. 22　　C. 24　　D. 26　　E. 28

【解】 设这个团体成员的人数是 N，他们的年龄总和是 T，五个 9 岁成员脱离会使平均年龄增加 1，即

$$\frac{T-45}{N-5} = \frac{T}{N} + 1 = \frac{T+N}{N},$$

五个 17 岁的青年加入也会产生同样的效果，即

$$\frac{T+85}{N+5} = \frac{T}{N} + 1 = \frac{T+N}{N}.$$

把这两个方程交叉相乘，得到方程

$$NT - 45N = NT + N^2 - 5T - 5N,$$

和 $$NT + 85N = NT + N^2 + 5T + 5N,$$

化简之后得到两个方程

$$N^2 + 40N = 5T, N^2 - 80N = -5T.$$

相加，得到 $2N^2 - 40N = 0$，即 $N(N-20) = 0$. 关于这个方程，有意义的解是 $N = 20$.

答 A.

4. 温格卡里学校新建五个教室，平均每班减少 6 人. 如果再建五个教室，那么平均每班又减少 4 人. 假设学生总数保持不变，问这个学校有多少学生？ (　　)

A. 560　　B. 600　　C. 650　　D. 720　　E. 800

【解法 1】

每班平均人数	班数	学生总数
n	k	nk
$n-6$	$k+5$	$nk+5n-6k-30$
$n-10$	$k+10$	$nk+10n-10k-100$

因为学生总数保持不变，所以必定有

$$5n-6k-30=0, \tag{1}$$

$$10n-10k-100=0. \tag{2}$$

由 2 × (1) 得 $$10n-12k-60=0. \tag{3}$$

由(2) − (3) 得 $$2k-40=0, k=20.$$

由(1) 有 $$5n=120+30, n=30,$$

因此学生总数是 $nk=600$.

答 B.

【解法 2】 设 $x=$ 学生总数，$n=$ 最初的班数. 于是最初每班平均人数是$\frac{x}{n}$.

当增加 5 个班时，每班平均人数成为$\frac{x}{n+5}$.

因此 $$\frac{x}{n+5}=\frac{x}{n}-6. \tag{1}$$

当再增加 5 个班时，每班平均人数成为$\frac{x}{n+10}$.

于是 $$\frac{x}{n+10}=\frac{x}{n}-10, \tag{2}$$

解联立方程(1) 和(2)，得到 $n=20, x=600$.

答 B.

4. 分数

1. 如果 $p=\frac{1}{3}, q=\frac{10}{3}$ 且 $r=\frac{3}{10}$，则下列各式哪一个是正确的？ ( )

A. $p>q$ 且 $q>r$ B. $q>r$ 且 $r>p$ C. $q>p$ 且 $p>r$

D. $r>p$ 且 $p>q$ E. $p>r$ 且 $r>q$

【解】 $p=\frac{1}{3}=\frac{10}{30}; q=\frac{10}{3}=\frac{100}{30}; r=\frac{3}{10}=\frac{9}{30}$. 所以 $q>p$ 且 $p>r$.

答 C.

2. 分数$\frac{37}{13}$可写成形式 $2+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{z}}}$，其中$(x,y,z)$ 等于 ( )

A. (11,2,5) B. (1,5,2) C. (5,2,11) D. (1,2,5) E. (13,11,2)

【解】 $\frac{37}{13}=2+\frac{11}{13}=2+\frac{1}{\frac{13}{11}}=2+\frac{1}{1+\frac{2}{11}}=2+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{11}{2}}}=2+\frac{1}{1+\frac{1}{5+\frac{1}{2}}}$.

与给定分数比较，$(x,y,z)=(1,5,2)$.

答 B.

注：像上面这样的表达式称为"连分数"，所有有理数可表示成连分数. 无理数不能表示成连分数，但很多无理数可以直接表示成"无限连分数". 例如$\sqrt{2}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\cdots}}}$.

2. 当纸牌游戏开始时，安恩、博比和卡拉每人所拥有的钱数之比为 11∶8∶5. 在游戏结束时，钱的总数不变，但每人的钱数之比变成 4∶3∶2. 判定下列论断哪个是真的？（ ）

A. 安恩和博比输，卡拉赢　　B. 安恩和卡拉赢，博比输

C. 安恩赢，博比输，卡拉不输不赢　　D. 安恩输，卡拉赢，博比不输不赢

E. 以上皆非

【解】 安恩、博比和卡拉原有的钱数分别占总数的$\frac{11}{24}$，$\frac{8}{24}$和$\frac{5}{24}$，可以将这三个数写成$\frac{33}{72}$，$\frac{24}{72}$，$\frac{15}{72}$. 当游戏结束时相应的比率分别为$\frac{4}{9}$，$\frac{3}{9}$和$\frac{2}{9}$，它们可写为$\frac{32}{72}$，$\frac{24}{72}$，$\frac{16}{72}$. 于是安恩输了，卡拉赢了，博比不输不赢.

答 D.

3. Ⅰ号混合液由柠檬汁、油和醋以 1∶2∶3 的比例配成，Ⅱ号混合液由同样三种液体以 3∶4∶5 的比例配成，将两种混合液倒在一起后，可以调成下面哪一种比例的混合液？（ ）

A. 2∶5∶8　　B. 4∶5∶6　　C. 3∶5∶7　　D. 5∶6∶7　　E. 7∶9∶11

【解法 1】 设混合液Ⅰ和Ⅱ以比 $x:y$ 混合，最后所得的混合物中柠檬汁∶油∶醋 $=a:b:c$. 我们有$\frac{1}{6}x+\frac{3}{12}y=a$，$\frac{2}{6}x+\frac{4}{12}y=b$，$\frac{3}{6}x+\frac{5}{12}y=c$，

即 $2x+3y=12a$，$4x+4y=12b$，$6x+5y=12c$，

即 $2x+3y=12a$，$2y=24a-12b$，$4y=36a-12c$，

即 $2x+3y=12a$，$y=12a-6b$，$0=12a-24b+12c$，

即 $x=-12a+9b$，$y=12a-6b$，$0=a-2b+c$.

答案(A)不成立，因为它会使 $y<0$.

答案(B)不成立，因为它会使 $x<0$.

答案(C)满足 $a-2b+c=0$，得到 $x=9>0$，$y=6>0$.

答案(D)不成立，因为它会使 $x<0$.

答案(E)不成立，因为它会使 $x<0$.

答 C.

【解法 2】 注意混合液Ⅰ和Ⅱ中三种东西所占份额之比分别为$\frac{2}{12}:\frac{4}{12}:\frac{6}{12}$和$\frac{3}{12}:\frac{4}{12}:\frac{5}{12}$.

因此在 Ⅰ 和 Ⅱ 任一种混合液中，$\frac{2}{12} \leqslant$ 柠檬汁占的份额 $\leqslant \frac{3}{12}$.

考虑各项选择中柠檬汁的份额：

答案(A) 中的份额 $= \frac{2}{15} < \frac{2}{12}$，因此不可能.

答案(B) 中的份额 $= \frac{4}{15} > \frac{3}{12}$，因此不可能.

答案(D) 中的份额 $= \frac{5}{18} > \frac{3}{12}$，因此不可能.

答案(E) 中的份额 $= \frac{7}{27} > \frac{3}{12}$，因此不可能.

答　C.

4. 四位歌手轮唱一首含有四个相等乐段的歌曲，每人把这首歌曲唱三遍就结束，第一位歌手开始唱第二个乐段时第二位歌手开始唱，第一位歌手开始唱第三个乐段时第三位歌手开始唱，第一位歌手开始唱第四个乐段时第四位歌手开始唱. 试问四个人同时唱的时间占总的歌唱时间的几分之几？　（　　）

【解】 满足条件的时间是唱 15 个乐段的时间，因为当第一位歌手唱完时，第四位歌手还要继续唱最后三个乐段. 当第一位歌手在唱第一遍的最后一个乐段（第四乐段）时以及在唱第二遍和第三遍时，四位歌手都同时在唱，因此四位歌手同时歌唱的时间是 9 个乐段的时间，答案是 $\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$.

答　B.

注：下图说明四位歌手轮唱时起止的情况.

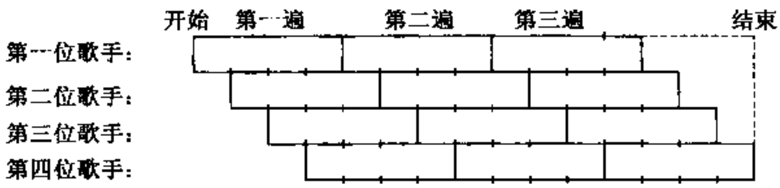

图 2

5. 指数

1. 如果把 $100^{25} - 25$ 的结果写成十进制数，则该数中各位数字之和是　（　　）

A. 219　　B. 444　　C. 432　　D. 453　　E. 462

【解】 100^{25} 是 1 后面跟着 50 个零，$100^{25} - 25$ 是 48 个 9 后面跟着 75（即 $\underbrace{999\cdots99}_{48个}75$），各位数字之和是 $48 \times 9 + 7 + 5 = 432 + 12 = 444$.

答　B.

2. 如果将 7^{1983} 除以 100，则余数是　（　　）

A. 1　　B. 7　　C. 43　　D. 49　　E. 57

【解法 1】 注意 $7^2 = 49, 7^3 = 343, 7^4 = 2401$，则 7^4 的任何幂也以 $\cdots 01$ 结尾. 现在

$$7^{1983} = 7^{1980} \times 7^3 = (7^4)^{495} \times 343 = (\cdots 01) \times 343 = (\cdots 43).$$

答　C.

【解法 2】　因为 $7^4=(7^2)^2=49^2=(50-1)^2=2500-100+1=2401$，且 $2401\equiv 1 \pmod{100}$，我们有

$$7^{1983}=7^{1980}\times 7^3=(7^4)^{495}\times 343\equiv(1)(343)\equiv 43 \pmod{100}.$$

答　C.

3. 如果把数 $x=2^{100}$，$y=3^{75}$ 和 $z=5^{50}$ 从小到大排序，则按此次序它们被写成　(　　)

A. x,y,z　　B. x,z,y　　C. y,x,z　　D. y,z,x　　E. z,y,x

【解】　注意到 $x=2^{100}=(2^4)^{25}=(16)^{25}$，类似地 $y=(27)^{25}$ 且 $z=(25)^{25}$. 因为 $16<25<27$，它推导出 $16^{25}<25^{25}<27^{25}$，即 $x<z<y$.

答　B.

4. 如果将下列数按大小顺序排列，位于中间的数是哪个？　(　　)

A. $2(2^7)$　　B. $2(2^6)-2$　　C. $2+2(2^6)$　　D. 2^7　　E. $\frac{2^7}{2}$

【解】　这些数是 $2^8,2^7-2,2^7+2,2^7$ 和 2^6，按大小排在中间的是 2^7.

答　D.

5. 乘积 $5^{17}\times 4^9$ 中数字的位数是　(　　)

A. 7　　B. 10　　C. 17　　D. 18　　E. 26

【解】　$5^{17}\times 4^9=5^{17}\times 2^{18}=(5\times 2)^{17}\times 2=2\times 10^{17}$，即 2 后面有 17 个 0，是一个 18 位数.

答　D.

6. 将 200^{1988} 展开，下列数中与它的位数最接近的是　(　　)

A. 450　　B. 4000　　C. 4500　　D. 6500　　E. 40000

【解】　10^n 展开需用 $(n+1)$ 位数字. 因此，如果 200^{1988} 可以近似地表示成 10 的幂次的形式，那么问题就解决了.

因为
$$2^{10}=1024\approx 10^3,$$
所以
$$2^{1000}=(2^{10})^{100}\approx(10^3)^{100}=10^{300},$$
则
$$2^{1988}=\frac{2^{2000}}{2^{12}}=\frac{(2^{1000})^2}{2^{12}}\approx\frac{10^{600}}{4\times 10^3}=\frac{10^{597}}{4},$$
所以
$$(200)^{1988}=2^{1988}\times 100^{1988}\approx\frac{10^{597}}{4}\times 10^{3976}=\frac{1}{4}\times 10^{4573}.$$

答　C.

7. 2^{2005} 的值用十进制表示，它的位数最接近于　(　　)

A. 400　　B. 500　　C. 600　　D. 700　　E. 800

【解法 1】　$2^{2005}=(2^{10})^{200}\times 32=(1024)^{200}\times 32\approx 10^{600}\times 10^2=10^{602}$.

更精确地 $2^{10}=1024>10^3$，所以 $2^{2000}>10^{600}$.

也有 $2005<13\times 155$ 和 $2^{13}=8192<10^4$，

所以 $2^{2005}<(10^4)^{155}$ 及 $2^{13}<10^4$.

因此 $2^{2005}<(10^4)^{155}=10^{620}$.

所以 2^{2005} 的位数最接近于 600.

答　C.

【解法 2】 N 的位数是整数$[\log_{10}N]$，即 $\log_{10}N$ 的整数部分.

注意到 $$2^{13}=8192<10^4 \text{ 和 } 2^{10}=1024>10^3,$$

因而$\frac{4}{13}>\log_{10}2>\frac{3}{10}$.

所以 $$601<\frac{2005\times 3}{10}<\log_{10}2^{2005}<\frac{2005\times 4}{13}<617.$$

所以 2^{2005} 的位数$[\log_{10}2^{2005}]$最接近于 600.

答 C.

6. 正负数

1. 已知 $S_n=1-2+3-4+5-6+\cdots+(-1)^{n+1}n$，其中 n 是正整数，那么 $S_{1992}+S_{1993}$ 等于 ( )

A. -2 B. -1 C. 0 D. 1 E. 2

【解】 可以看出
$$\begin{aligned}S_{1992}+S_{1993}&=2S_{1992}+1993\\&=2[(1-2)+(3-4)+\cdots+(1991-1992)]+1993\\&=2[996\times(-1)]+1993\\&=-1992+1993\\&=1.\end{aligned}$$

答 D.

注：还可以用其他简单办法得出答案.

7. 小数

1. 当在计算器上做一系列加法时，一位学生注意到她将 35.95 错加成 35095. 为了在下一步中得到正确的总数，她现在应当 ( )

A. 加 35.95 B. 减 35059.05 C. 减 35130.95

D. 加 35130.95 E. 减 35095

【解】 为了纠正错误，该学生必须减 35095 再加 35.95，即减(35095 − 35.95)，即减 35059.05.

答 B.

2. 如果 $p=\frac{0.1}{0.3}$，$q=\frac{1}{0.3}$ 且 $r=\frac{0.3}{1}$，则以下结论哪一个是正确的？ ( )

A. $p>q$ 且 $q>r$ B. $q>r$ 且 $r>p$ C. $q>p$ 且 $p>r$

D. $r>p$ 且 $p>q$ E. $p>r$ 且 $r>q$

【解】 $p=\frac{0.1}{0.3}=\frac{1}{3}=0.333\cdots$，$q=\frac{1}{0.3}=\frac{10}{3}=3.333\cdots$，$r=\frac{0.3}{1}=0.3$. 所以 $q>p$ 且 $p>r$.

答 C.

3. 将 $\frac{3}{7}$ 表示为小数形式，位于第 21 位小数位的数是 ( )

A. 8　　B. 4　　C. 5　　D. 7　　E. 2

【解】 $\frac{3}{7}=0.428571\ 42\cdots$,其规律是每隔 6 个数字便重复,第 19 位是 4,第 20 位是 2,第 21 位是 8.

答　A.

8. 百分数

1. 代表某校的 300 名女孩参加夏季运动会和冬季运动会.在夏季,60% 的女孩打板球,其余的 40% 打网球.在冬季,女孩们玩曲棍球或篮球,但每人只能玩一种.玩曲棍球的人里有 56% 在夏天打板球,而打板球的运动员里有 30% 在冬天玩篮球,那么既打网球又玩篮球的女孩的总数为　(　　)

A. 54　　B. 30　　C. 120　　D. 99　　E. 21

【解】 首先我们注意到夏天有 180 个女孩打板球,其他 120 人打网球.如果有 30% 打板球的人到冬天玩篮球,这就是说他们中有 54 人玩篮球,亦即她们中有 $180-54=126$ 人玩曲棍球,但这只占玩曲棍球人数的 56%.于是原来打网球的曲棍球手为 $\frac{44}{56}\times 126=99$,所以既打网球又玩篮球的女孩数为 $120-99=21$.

答　E.

注　整个情形可总结为下表:

	曲棍球	篮球	总和
板球	126	54	180
网球	99	21	120
总和	225	75	300

2. 一个大西瓜重 20 千克,其重量的 98% 是水分.把它放在阳光下晒,其中一些水分蒸发了,结果只有 95% 是水分了.现在其重量是　(　　)

A. 17 千克　　B. 19.4 千克　　C. 10 千克　　D. 19 千克　　E. 8 千克

【解】 原来,西瓜的 98% 是水分,所以固体成分为其重量的 2%,即 $\frac{1}{50}\times 20=\frac{2}{5}$ 千克.后来,水分占其重量的 95%,而固体成分为其重量的 5%,即 $\frac{1}{20}$.因此现在它的重量是 $20\times\frac{2}{5}=8$ 千克.

答　E.

9. 运算次序

1. 如果 $p\uparrow$ 表示 $p+1$,$p\downarrow$ 表示 $p-1$,则 $4\uparrow\times 3\downarrow$ 等于　(　　)

A. $9\downarrow$　　B. $10\uparrow$　　C. $11\downarrow$　　D. $12\uparrow$　　E. $13\downarrow$

【解】 我们注意到 $(4\uparrow)\times(3\downarrow)=5\times 2=10$,它等于 $11\downarrow$.

答　C.

10. 平方根

1. $\sqrt{7+\sqrt{13}}-\sqrt{7-\sqrt{13}}$ 等于 ( )

A. $\frac{\sqrt{13}}{3}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D. $\sqrt{2}$ E. $2\sqrt[4]{13}$

【解法 1】 设$\sqrt{7+\sqrt{13}}=x$,$\sqrt{7-\sqrt{13}}=y$,得到 $xy=\sqrt{49-13}=6$.

于是$(x-y)^2=x^2+y^2-2xy=7+\sqrt{13}+7-\sqrt{13}-12=2$,

所以 $x-y=\sqrt{2}$.

答 D.

【解法 2】 $7+\sqrt{13}=\frac{14+2\sqrt{13}}{2}=\frac{1+2\sqrt{13}+(\sqrt{13})^2}{2}=\frac{(\sqrt{13}+1)^2}{2}$.

同理 $7-\sqrt{13}=\frac{(\sqrt{13}-1)^2}{2}$.

所以
$$\begin{aligned}\sqrt{7+\sqrt{13}}-\sqrt{7-\sqrt{13}}&=\sqrt{\frac{(\sqrt{13}+1)^2}{2}}-\sqrt{\frac{(\sqrt{13}-1)^2}{2}}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{13}+1-\sqrt{13}+1)\\&=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.\end{aligned}$$

答 D.

11. 素数(质数)的性质

1. 一个儿童用棱长为 1 厘米的 42 个正方体黏合成一个各面为矩形的立体砖. 如果其底面的周长是 18 厘米,则这块砖的高(以厘米计)是 ( )

A. 3 B. 6 C. 2 D. 7 E. $\frac{7}{3}$

【解】 这块砖的所有边长必须是42的因数,为了找到这些因数,我们注意到$42=1\times2\times3\times7$. 而且这块砖的长和宽相加必须为9厘米(底面周长18厘米的一半),因此宽是2厘米而长是 7 厘米,从而高是 3 厘米.

答 A.

2. 在 1914—1918 年的第一次世界大战期间,在意大利波河山谷发现了一具骸骨、一件损坏的制服和一支戟(一种不长于 10 英尺的武器). 考古学家发现它们是属于一个法国上尉的. 该戟的长度(以英尺计为一整数)乘该上尉被杀死时的那个月份的所有天数,乘该上尉的死期到其骸骨被发现的年数的一半,再乘该上尉死时年龄的一半,等于 451066. 该上尉死于以下哪一战役? ( )

A. 1522 年 2 月都灵战役
B. 1712 年 3 月克雷莫纳战役
C. 1512 年 2 月巴费亚战役
D. 1800 年 6 月马伦戈战役
E. 1796 年 8 月卡斯蒂廖内战役