高等院校精品课系列教材

高等院校经济数学系列教材

线性代数（第三版）

Linear Algebra

上海财经大学应用数学系 编

上海财经大学出版社

高等院校精

高等院校经济数学系列教材

线性代数

（第三版）

上海财经大学应用数学系　编

上海财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/上海财经大学应用数学系编. —3版. —上海:上海财经大学出版社,2011.2

高等院校精品课系列教材

高等院校经济数学系列教材

ISBN 978-7-5642-0955-1/F·0955

Ⅰ.①线… Ⅱ.①上… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第006520号

□ 责任编辑 刘光本

□ 封面设计 钱宇辰

XIANXING DAISHU

线 性 代 数

(第三版)

上海财经大学应用数学系 编

上海财经大学出版社出版发行

(上海市武东路321号乙 邮编200434)

网 址:http://www.sufep.com

电子邮箱:webmaster @ sufep.com

全国新华书店经销

上海崇明裕安印刷厂印刷装订

2011年2月第3版 2011年2月第1次印刷

787mm×960mm 1/16 12.25印张 313千字

(习题集 12印张 307千字)

印数:11 001—15 000 定价:42.00元

(本教材免费赠送配套习题集,请直接向售书单位索取。)

前 言

《线性代数》是理工类和经管类高等院校学生必修的一门重要基础理论课程.它的基本概念、理论和方法,具有较强的逻辑性、抽象性和广泛的实用性.通过该课程的学习,能使学生掌握该课程的基本理论和基本方法,且对学生其他能力的培养(如逻辑推理能力、抽象思维能力)和数学素养的提高也有着重要的作用.这些理论方法和能力为一些后续课程的学习及在各个领域进行理论研究和实践工作提供了必要的保证,受到各院校的高度重视.

根据新世纪经济管理人才对基础数学教学的要求,本着“厚基础、宽口径、高素质”的理念,上海财经大学应用数学系在 2003 年着手编写《高等数学》、《线性代数》和《概率论与数理统计》,并在 2003 年 6 月出版了《线性代数》教材.参加本版《线性代数》教材编写的教师是:王健(第一章行列式),李志远(第二章矩阵、第五章线性方程组、第七章线性代数在线性规划中的应用),钱晓明(第三章向量的线性相关性与矩阵的秩),张远征(第四章线性空间、第六章特征值与二次型),叶玉全(第八章 MATLAB 在线性代数中的应用).并由冉启康副教授和张远征副教授进行统稿.

《线性代数》在 2006 年被上海财经大学纳入学校精品课程建设项目,得到校领导与教务处的大力支持和资助,也得到了应用数学系领导的极大关注和帮助.为此我们对《线性代数》教材进行了修订,并在 2007 年 2 月出版了《线性代数》(第二版).第二版的宗旨是在国家教育委员会颁发的《线性代数》教学大纲的基本框架下,在保证学科的系统性、逻辑性和科学性的前提下,力求做到通俗易懂、由浅入深、兼顾发展.在内容上,交换了原第四章的线性空间与第五章的线性方程组,在方程组理论的有关证明中,比较多地使用了向量的线性相关性工具;在线性空间这一章中,先对向量空间做了充分叙述,在此基础上引进线性空间与线性变换这些比较抽象的概念.最后是两个附录:其一是线性代数的一些实际应用例子介绍;其二是对进行数学实验的 Matlab 软件在线性代数方面的简单使用做了一些简单的介绍.参加第二版教材编写的成员是顾桂定(第一章),李志远(第二章),钱晓明(第三章),张震峰(第四章),董程栋(第五章),张远征(第六章),周解勇(附录 A、附录 B).最后由顾桂定和张远征进行统稿.

2010 年,我们重新编写了《线性代数习题集》.借此机会,我们又对《线性代数》教材进行了新的修订,在第二章的内容安排上交换了第三节与第四节的顺序,并做了一定的修改.这主要是考虑到使教材与习题集形成一个更全面完善的整体(当然完全可以独立使用),以期使同学

们更好地掌握《线性代数》这门课的知识.

参加本教材第三版编写的成员是顾桂定(第一章),田方(第二章),钱晓明(第三章),张震峰(第四章),董程栋(第五章),张远征(第六章).最后由顾桂定进行统稿.

本书可作为理工类和经管类高等院校各专业的教材或教学参考书.

由于编者水平所限,书中不当之处在所难免,恳请得到广大读者与同仁的批评指正.

编　者

2011年2月

目　录

第一章

行列式

行列式是研究矩阵性质的一个重要工具．在本章中，我们介绍一般 n 阶行列式的定义及一些基本性质，最后是著名的克莱姆(Cramer)法则．本章的重点是行列式的计算和克莱姆法则；难点是一般 n 阶行列式的计算．一般而言，对于 4 阶或以上阶的行列式，首先都要利用行列式性质化其至某些容易计算的具有特殊结构的行列式，或展开成低阶行列式再进行计算．

关于行列式计算方法的综述，在《习题集》[①]里有介绍，同学们可参阅.

第一节 排列与逆序

为引出 n 阶行列式的定义，首先介绍有关排列与逆序等概念．

一、排列

定义 1.1 n 个不同自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组 $p_1\ p_2\cdots\ p_n$，称作为 n 级**排列**，其中每个自然数 p_i 称作该排列的第 i 个元素．

如 1,2,3 三个自然数，213 是一个 3 级排列，此时 $p_1=2,p_2=1,p_3=3$；312 也是一个 3 级排列，此时 $p_1=3,p_2=1,p_3=2$. 值得指出的是上述定义中的“有序”两个字，123 和 213 是两个不同的排列．

那么 1,2,3 可以有多少种不同的排列呢？我们可以一一列出，共有 6 种不同的排列：123，132,213,231,312,321. 那么 n 个自然数可以构成多少种不同的排列呢？按照一一列出的办法显然不是一个好办法．

我们不妨考虑 4 个自然数 1,2,3,4 的所有排列．首先从 4 个数中任意抽出一个数排在第 1 位置上，成为元素 p_1，显然，这种抽取有 4 种可能性；其次在余下的 3 个数中再抽出一个数排在第二位置上，作为元素 p_2，而这种可能性有 3 种；于是形成 p_1p_2 的可能性就有 4×3 种；继续下去，再在余下的 2 个数中再抽出一个数排在第三位置上，作为元素 p_3，而这种可能性只有 2 种了；直到最后只剩下一个数放在第 4 位置上，成为元素 p_4，这只有一种取法，于是 4 个自然数共有 $4\times3\times2\times1=4!=24$ 种不同排列．这种统计方法称之为乘法原理.

我们一般用 P_n 表示所有 n 级不同排列的种数．故 $P_4=4!=24$；$P_3=3!=6$. 不难得到：

$$P_n=n(n-1)\cdots21=n!.$$

---

① 《习题集》是指与此教材配套的由上海财经大学应用数学系编写的《线性代数习题集》，简称《习题集》，下同.

二、逆序

标准顺序 n 个不同自然数按从小到大自然顺序的排列，称之为(n 级)的标准顺序排列．如 123 是一个(3 级)标准顺序的排列．

定义 1.2 在排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中，若有 $p_s>p_t(s<t)$，则称 p_s 与 p_t 构成该排列的一个**逆序**；一个排列中，所有逆序的总数称作该排列的逆序数，记作 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$．当 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$ 为奇数时，称 $p_1p_2\cdots p_n$ 为**奇排列**；当 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$ 为偶数或零时，称 $p_1p_2\cdots p_n$ 为**偶排列**．

如排列 231，由于 2 与 1 构成一个逆序，3 与 1 也构成一个逆序，故 $\tau(231)=2$，从而 231 是一个偶排列；同样对于排列 321，由于 2 与 1、3 与 1、3 与 2 分别构成一个逆序，故 $\tau(321)=3$，故 321 是一个奇排列．标准顺序排列是偶排列，因为其逆序数为零.

逆序数的计算方法 设 $p_1p_2\cdots p_n$ 是一个 n 级排列．根据逆序数的定义，我们可以定义该排列中某个元素 p_i 的逆序数为：在 $p_1p_2\cdots p_{i-1}$ 中比 p_i 大的个数，记为 t_i. 于是

$$\tau(p_1p_2\cdots p_n)=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{i=1}^{n}t_i.$$

例 1 计算 $\tau(32415)$ 和 $\tau(n(n-1)(n-2)\cdots 21)$．

解 对于排列 32415，有 $t_1=0,t_2=1,t_3=0,t_4=3,t_5=0$，故 $\tau(32415)=4$. 而排列 $n(n-1)(n-2)\cdots 21$，则 $t_1=0,t_2=1,t_3=2,\cdots,t_{n-1}=n-2,t_n=n-1$，故 $\tau(n(n-1)(n-2)\cdots 21)=0+1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

三、对换

定义 1.3 在某个 n 级排列中，任意对换两个元素的位置(如对换 p_s 与 p_t 的位置)，其余元素不动，称作该排列的一个**对换**，可记作

$$p_1\cdots p_s\cdots p_t\cdots p_n\xrightarrow{(p_s,p_t)}p_1\cdots p_t\cdots p_s\cdots p_n.$$

对换对排列的奇偶性是会产生影响的．例如，$\tau(123)=0$，即 123 是偶排列，现对换 1 和 2 的位置，得排列 213，即 $123\xrightarrow{(1,2)}213$. 而 $\tau(213)=1$，故排列 213 是奇排列．事实上，我们有

定理 1.1 对换改变排列的奇偶性．

证明 (1)相邻位置元素的对换．设

$$a_1\cdots a_lpqb_1\cdots b_m\xrightarrow{(p,q)}a_1\cdots a_lqpb_1\cdots b_m,$$

并设原排列元素 p,q 的逆序数为 $t_{l+1}=s_1,t_{l+2}=s_2$，则对换之后排列的元素 q,p 的逆序数分别是

$$\bar{t}_{l+1}=\begin{cases}s_2-1, & p>q\\ s_2, & p<q\end{cases},\qquad \bar{t}_{l+2}=\begin{cases}s_1, & p>q\\ s_1+1, & p<q\end{cases}.$$

所以该两个元素的逆序数之和在两个排列中总是相差 1，而其余元素的逆序数都没有变化，故两个排列的奇偶性不同．

(2)任意位置元素的对换．设

$$a_1\cdots a_lpc_1\cdots c_mqb_1\cdots b_k\xrightarrow{(p,q)}a_1\cdots a_lqc_1\cdots c_mpb_1\cdots b_k,$$

该对换可以分解成：

先作 $m+1$ 次相邻元素的对换：$a_1\cdots a_lc_1\cdots c_mqpb_1\cdots b_k$；

再作 m 次相邻元素的对换：$a_1\cdots a_l q c_1\cdots c_m p b_1\cdots b_k$.
该过程共进行了 $2m+1$ 次相邻位置的对换，由(1)的结论，两个排列的奇偶性不同． ■

推论　任意一个 n 级排列 $p_1p_2\cdots p_n$，都可以对换成标准顺序的排列 $12\cdots n$，且对换的次数与排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 具有相同的奇偶性．

例 2　把 32415 对换成标准顺序的排列．

解　$32415\xrightarrow{(1,3)}12435\xrightarrow{(3,4)}12345$，故 32415 是一个偶排列．但注意 $\tau(32415)=2$ 并不一定成立．事实上，$\tau(32415)=4$.

定理 1.2　所有 n 级排列中($n\geqslant 2$)，奇偶排列各有一半．

证明　我们可以对 n 用归纳法来证．$n=2$ 时，只有 12 和 21 两种排列，奇偶排列各为一个，结论成立．设 $n-1$ 时结论成立，即对于 $1,2,\cdots,n-1$ 构成的 $(n-1)!$ 个排列中，奇偶排列各有一半．当 n 时，考察 n 级排列 $p_1p_2\cdots p_n$，对任意某个固定元素 $p_i=n$ 取定后，则剩下元素的排列构成了 $n-1$ 级的全排列，由归纳法假设，奇偶排列各有一半．而 n 级排列可以看成是 n 个如此的 $n-1$ 级排列构成，每一个 $n-1$ 级排列的奇偶排列都各有一半，于是 n 级排列的奇偶排列也各有一半． ■

如在所有 6 种 3 级排列中，有奇排列三个：321，213，132；偶排列三个：123，231，312.

第二节　行列式的定义

为简单起见，在本章中我们总是在实数范围 R 上讨论问题．事实上，所有的定义、性质和定理都可相应地推广到复数 C 上．

一、2 阶和 3 阶行列式

由 $2^2=4$ 个数，按下列形式排成 2 行 2 列的方形

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

称作为 2 阶行列式，一般可记作 D_2，其被定义为一个具有 $2!$ 项的代数和：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

由 $3^2=9$ 个数组成的 3 行 3 列的 3 阶行列式，记作 D_3，其被定义为一个具有 $3!$ 项的代数和

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{1.1}$$

一般 3 阶行列式的计算可按对角线法得到．所谓对角线法，指的是(1.1)式右端的六项中，三项符号为正的项是按行列式从左上到右下(45 度)连线相乘得到，如第一项从左上角的 a_{11} 经 a_{22} 连到 a_{33}；第二项从 a_{12} 到 a_{23}，遇到右边界再移到下一行的左边界，连接 a_{31}，…；对于三项符号为负则是按行列式从右上到左下(45 度)连线相乘得到，遇到左边界再移到下一行的右边界，进行连接．

例 3 计算 3 阶行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \end{vmatrix}$ 的值.

解 按对角线法,

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 3\times(-5)\times(-1)+0\times(-1)\times4+1\times2\times(-3)-1\times(-5)\times4-0\times2\times(-1)-3\times(-1)\times(-3)=15+0+(-6)-(-20)-0-9=20.$$

现在我们来考察三阶行列式定义(1.1)右端代数和的特征:

(1)共有 3! =6 项相加,其最后结果是一个数值;

(2)每项有 3 个数相乘:$a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$,而每个数取自不同行不同列,即行足标固定为 123,列足标则是 1,2,3 的某个排列 $p_1p_2p_3$;

(3)每项的符号由列足标排列 $p_1p_2p_3$ 的奇偶性决定,即符号是 $(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}$.

故三阶行列式(1.1)可写成

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{3!}(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}. \tag{1.2}$$

二、n 阶行列式

定义 1.4 由 n^2 个数组成的 n 行 n 列的 n 阶行列式定义为如下 n! 项的代数和:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{n!}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}, \tag{1.3}$$

其中 $\sum\limits_{n!}$ 表示对所有 n 阶列足标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 对应的项 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 求和,共有 $P_n=n!$ 项.在第 i 行第 j 列交叉位置上的元素称为 (i,j) 元素,一般用 a_{ij} 表示.(i,i) 位置上的元素 a_{ii} 称作对角元素.n 阶行列式一般可记作 D_n(或 D);有时也可记作 $\det(a_{ij})$.

特别地,定义 1 阶行列式(即 $n=1$)为:$|a_{11}|=a_{11}$.

显然,n 阶行列式定义的代数和具有以上类似于 3 阶行列式的三项特征,即

(1)有 n! 项相加,其最后结果是一个数值;

(2)每项有 n 个数相乘:$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$,而每个数取自不同行不同列,即行足标固定为 $12\cdots n$,列足标则是 $1,2,\cdots,n$ 的某个排列 $p_1p_2\cdots p_n$;

(3)每项的符号由列足标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的奇偶性决定,即符号是 $(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}$.

例 4 利用行列式的定义证明

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}.$$

证明 由定义

$$D_4 = \sum_{4!} (-1)^{\tau(p_1p_2p_3p_4)} a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3} a_{4p_4}.$$

考察带有 a_{1p_1} 的项，由于元素 $a_{12}=a_{13}=a_{14}=0$，故在所有加项中，除了形如 $a_{11}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}$ 的项，其余的项都为零，而这些保留下来的项有 3！个.

由于 $p_1=1$ 已取定，故 p_2,p_3,p_4 只有在 2,3,4 中取值．又由于 $a_{23}=a_{24}=0$，故上述保留下来的 3！项中，除了形如 $a_{11}a_{22}a_{3p_3}a_{4p_4}$ 的项，其余的项都为零，此时剩下的项还有 2！个.

由于 $p_1=1,p_2=2$ 已取定，故 p_3,p_4 只能取值 3 或 4，而 $a_{34}=0$，所以 p_3 取 3，如此 p_4 只能取 4. 于是在所有 24 项中，只剩有一项 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$，其余项都为零．又由于 $\tau(1234)=0$，从而成立

$$D_4=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}.$$

例 4 的结论可推广到一般 n 阶**下三角行列式**情形：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

类似地，**上三角行列式**和**对角行列式**也成立同样的结论：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

即下(上)三角或对角行列式的值等于对角元素的乘积．显然，若下(上)三角或对角行列式的对角元素有零元素，则该行列式的值为零.

如

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 3\times4\times(-1)\times1=-12,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1\times0\times(-2)\times3=0.$$

例 5 设 n 阶(反对角)行列式：

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & \cdots & d_2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & d_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ d_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

利用行列式的定义，计算 D 的值.

解 由定义，$D=\sum\limits_{n!}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$．注意到行列式的零元素分布，除了 p_1

$=n$ 的项 $a_{1n}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，其他的项都为零．当 p_1 取定为 n 时，$p_2,\cdots,p_n$ 只能在 $1,2,\cdots,(n-1)$ 中取值．同样，除了 $p_2=n-1$ 的项 $a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{np_n}$，其他的项都为零．$p_1=n,p_2=n-1$ 取定后，$p_3,\cdots,p_n$ 只能在 $1,2,\cdots,(n-2)$ 中取值．最后，p_n 只能取 1．因此所有 $n!$ 项中只剩下一项：$a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}=d_1d_2\cdots d_n$．由例 1，该项的符号是 $(-1)^{\tau(n(n-1)\cdots 2\cdot 1)}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$．于是得到

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & \cdots & d_2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & d_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ d_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}d_1d_2\cdots d_n.$$

例 5 的结论可推广到一般 n 阶**反上三角行列式**和**反下三角行列式**：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}.$$

其证明完全同例 5. 也可用降阶法计算，参见《习题集》第一章的例 16.

例 6 利用行列式的定义证明

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明 由定义，$D=\sum\limits_{n!}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots p_{np_n}$．注意到行列式的零元素分布，除了 p_1 取 1 的项 $a_{11}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，其他的项都为零，而这些剩下的项有 $(n-1)!$．当 p_1 取定为 1 时，$p_2,\cdots,p_n$ 只能在 $2,\cdots,n$ 中取值．又由于 $\tau(1p_2\cdots p_n)=\tau(p_2\cdots p_n)$，我们得到

$$\begin{aligned} D &= \sum_{(n-1)!}(-1)^{\tau(1p_2\cdots p_n)}a_{11}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=a_{11}\sum_{(n-1)!}(-1)^{\tau(p_2\cdots p_n)}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

行列式的定义也可以按下列形式给出：

定义 1.4* 由 n^2 个数组成的 n 行 n 列的 n 阶行列式定义如下：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{n!}(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}, \tag{1.3*}$$

其中，$\sum\limits_{n!}$ 表示对所有 n 阶行足标排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 对应的项 $a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}$ 求和，共有 $P_n=n!$ 项．

证明 我们要证明 $\sum\limits_{n!}(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}=\sum\limits_{n!}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$．交换左边和式中各项 $a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}$ 的元素 $a_{q_i i}$ 位置，使得

$$a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}=a_{1s_1}a_{2s_2}\cdots a_{ns_n}.$$

我们假设这些因子经过 m 次的位置对换而完成．于是排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 经 m 次对换成标准顺序排列 $12\cdots n$；同时排列 $12\cdots n$ 也是经 m 次对换成 $s_1s_2\cdots s_n$（例如 $a_{31}a_{12}a_{23}=a_{12}a_{23}a_{31}$ 是经两次位置对换而成的，故 $312\xrightarrow{2}123$；同时 $123\xrightarrow{2}231$）．由定理 1.1 的推论，排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 与排列 $s_1s_2\cdots s_n$ 具有相同的奇偶性．于是

$$\begin{aligned}\sum_{n!}(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}&=\sum_{n!}(-1)^{\tau(s_1s_2\cdots s_n)}a_{1s_1}a_{2s_2}\cdots a_{ns_n}\\&=\sum_{n!}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=D.\end{aligned}$$ ■

事实上，行列式更一般的定义是：

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\sum_{n!}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)+\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n}.$$

第三节 行列式的基本性质

在本小节和第四节中，我们用 $D=\det(a_{ij})$ 表示 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}. \tag{1.4}$$

转置行列式 行列式 D 的行与列对应互换得到的新行列式，称为行列式 D 的转置行列式，记作 D^T，即

$$D^T=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{n1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{n2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix},$$

也就是说，D^T 中 (i,j) 位置上的元素，记作 b_{ij}，就是原行列式 D 中 (j,i) 位置上的元素 a_{ji}，即成立 $b_{ij}=a_{ji}$．

如 $D=\begin{vmatrix}3&0&1\\1&-5&0\\1&2&-1\end{vmatrix}$，则 $D^T=\begin{vmatrix}3&1&1\\0&-5&2\\1&0&-1\end{vmatrix}$，并经计算，有

$$D=\begin{vmatrix}3&0&1\\1&-5&0\\1&2&-1\end{vmatrix}=22,\quad D^T=\begin{vmatrix}3&1&1\\0&-5&2\\1&0&-1\end{vmatrix}=22.$$

事实上，这是一个一般性的结论.

性质 1 $D=D^T$.

证明 记 $D^T=\det(b_{ij})$，则 $b_{ij}=a_{ji}$. 由定义

$$D^T=\sum_{n!}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}=\sum_{n!}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}.$$

交换和式中各项 $a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$ 的元素 a_{p_tt} 位置，使得

$$a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}=a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}.$$

我们假设这些因子经过 m 次的位置对换而完成. 于是排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 经 m 次对换成标准顺序排列 $12\cdots n$，同时排列 $12\cdots n$ 也是经 m 次对换成 $q_1q_2\cdots q_n$（见行列式等价定义(1.3*)中的证明）. 由定理 1.1 的推论，排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 与排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 具有相同的奇偶性. 于是

$$D^T=\sum_{n!}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}=\sum_{n!}(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}=D.$$ ■

该性质表明，在行列式中行与列所处的地位是相同的. 因此，对行成立的行列式性质，对列也同样成立.

性质 2 任意对换行列式的两行(或两列)元素，其值变号(为了叙述上的方便，我们用记号 $r_s\leftrightarrow r_t$ 来表示对换第 s 行与第 t 行的元素，用 $c_s\leftrightarrow c_t$ 表示对换第 s 列与第 t 列的元素).

证明 设 $D=\det(a_{ij})$，交换第 s 行与第 t 行元素，得到的新行列式为

$$\overline{D}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

其中 $b_{ij}=a_{ij}(i\neq s,t,\forall j)$，$b_{sj}=a_{tj}$，$b_{tj}=a_{sj}(\forall j)$. 于是

$$\begin{aligned}\overline{D}&=\sum_{n!}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_s\cdots p_t\cdots p_n)}b_{1p_1}\cdots b_{sp_s}\cdots b_{tp_t}\cdots b_{np_n}\\&=\sum_{n!}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_s\cdots p_t\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{tp_s}\cdots a_{sp_t}\cdots a_{np_n}\\&=\sum_{n!}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_s\cdots p_t\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{sp_t}\cdots a_{tp_s}\cdots a_{np_n}.\end{aligned}$$

由定理 1.1，$(-1)^{\tau(p_1\cdots p_s\cdots p_t\cdots p_n)}=(-1)\cdot(-1)^{\tau(p_1\cdots p_t\cdots p_s\cdots p_n)}$，从而

$$\overline{D}=-\sum_{n!}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_t\cdots p_s\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{sp_t}\cdots a_{tp_s}\cdots a_{np_n}=-D.$$ ■

如 $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=15+0+2-(-5)-0-0=22$，交换第二行和第三行的元素，则 $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -5 & 0 \end{vmatrix}=0+0+(-5)-2-0-15=-22$，即成立

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -5 & 0 \end{vmatrix}.$$

推论 两行(或两列)元素对应相同的行列式，其值为零.

证明 把该两行元素对换得到的行列式仍是原来的行列式，但由性质 2，得 $D=-D$，所以 $D=0$. ■

如 $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -6+0+2-2-0-(-6)=0.$

性质 3 若行列式某行(或某列)元素有公因子 λ,则 λ 可提到行列式外面(我们用记号 $r_s \to \lambda$ 来表示第 s 行元素提取公因子 λ;$c_s \to \lambda$ 则表示第 s 列提取公因子 λ),即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{s1} & \lambda a_{s2} & \cdots & \lambda a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

特别地,若行列式中某行(或某列)的元素全为零,则行列式的值为零.

证明 由定义,左边的行列式等于

$$\begin{aligned} &\sum_{n!} (-1)^{\tau(p_1 \cdots p_s \cdots p_n)} a_{1p_1} \cdots (\lambda a_{sp_s}) \cdots a_{np_n} \\ &= \lambda \sum_{n!} (-1)^{\tau(p_1 \cdots p_s \cdots p_n)} a_{1p_1} \cdots a_{sp_s} \cdots a_{np_n} = \lambda D. \end{aligned}$$

■

如 $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 22$, $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & -15 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 66$, 即成立

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & -15 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3\times 1 & 3\times(-5) & 3\times 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3\times \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

由性质 3 和性质 2 的推论,可得下列结论:

性质 4 行列式中若有两行(或两列)对应元素成比例,其值为零.

如 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -6 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 12+(-4)+(-12)-(-4)-12-(-12)=0$,其第二行元素是第一行元素的$(-2)$倍.

由行列式的定义,可得到:

性质 5 行列式成立,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{s1}+a''_{s1} & a'_{s2}+a''_{s2} & \cdots & a'_{sn}+a''_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{s1} & a'_{s2} & \cdots & a'_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a''_{s1} & a''_{s2} & \cdots & a''_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

如

$$\begin{vmatrix}3&0&1\\1&-5&0\\1&2&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&0&1\\1&-5&0\\0+1&1+1&-2+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&0&1\\1&-5&0\\0&1&-2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3&0&1\\1&-5&0\\1&1&1\end{vmatrix}$$

$$=31+(-9)=22,$$

直接计算，有 $\begin{vmatrix}3&0&1\\1&-5&0\\1&2&-1\end{vmatrix}=22.$

利用性质 5 和性质 4，又可得到下列性质：

性质 6 行列式某行(或某列)元素加上另一行(或另一列)元素的 λ 倍(如第 t 行元素加上第 s 行元素的 λ 倍，我们用记号 $r_t+\lambda r_s$ 来表示这一过程；若是列，则用记号 $c_t+\lambda c_s$ 来表示)，行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{s1}&a_{s2}&\cdots&a_{sn}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{t1}&a_{t2}&\cdots&a_{tn}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\xlongequal{r_t+\lambda r_s}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{s1}&a_{s2}&\cdots&a_{sn}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{t1}+\lambda a_{s1}&a_{t2}+\lambda a_{s2}&\cdots&a_{tn}+\lambda a_{sn}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

如 $\begin{vmatrix}3&0&1\\1&-5&0\\1&2&-1\end{vmatrix}=22$，第二行的元素加上第三行元素的两倍(注意，第三行元素本身并不改变)，则有

$$\begin{vmatrix}3&0&1\\3&-1&-2\\1&2&-1\end{vmatrix}=3+0+6-(-1)-0-(-12)=22.$$

用行列式的定义来计算行列式的值是很困难的．一般来说，对于高于 3 阶行列式的计算，应首先利用行列式的性质(特别是性质 6)，将其转换为便于计算的行列式(如上(下)三角行列式，或某行(列)元素都为零的行列式，或具有性质 4 的行列式等)．

例 7 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}2&-1&1&-1\\0&0&4&-1\\0&2&4&1\\-2&0&3&2\end{vmatrix}$ 的值．

解 利用行列式的性质 6，将 D 化至上三角行列式．这一过程一般是从左到右逐列进行的．第四行元素加上第一行元素的 1 倍(相当于第四行元素加上第一行的元素)，

$$\begin{vmatrix}2&-1&1&-1\\0&0&4&-1\\0&2&4&1\\-2&0&3&2\end{vmatrix}\xlongequal{r_4+r_1}\begin{vmatrix}2&-1&1&-1\\0&0&4&-1\\0&2&4&1\\0&-1&4&1\end{vmatrix},$$

这就完成了第一列的上三角化．接下来是第二列、第三列的上三角化：