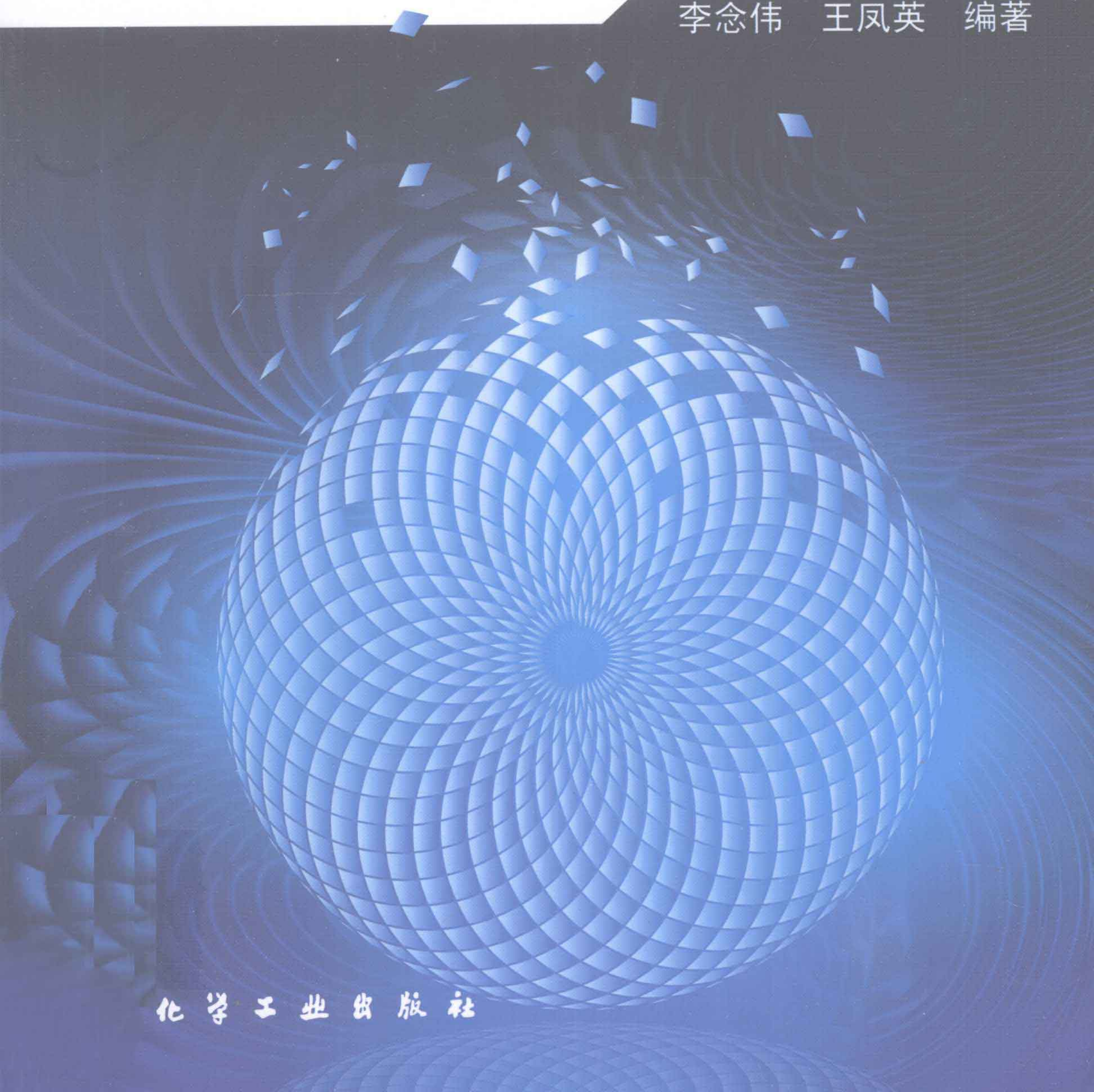
北京市优秀教学团队“数学公共基础系列课程教学团队”资助项目

概率论与数理统计典型问题分析

李念伟　王凤英　编著

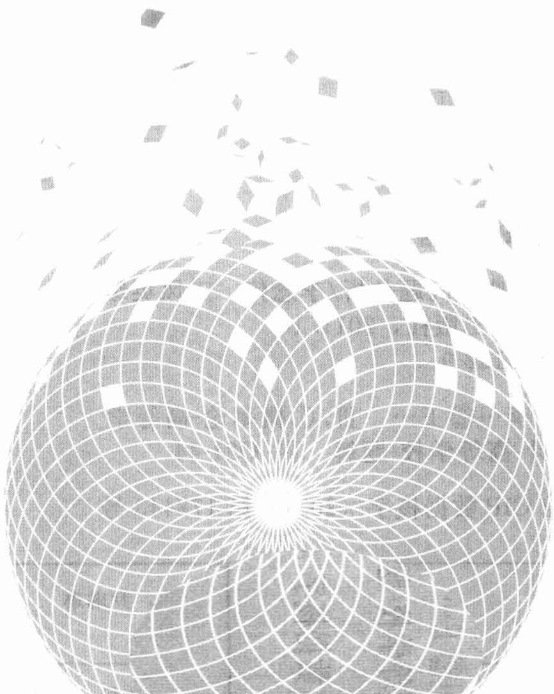


化学工业出版社

北京市优秀教学团队“数学公共基础系列课程教学团队”资助项目

概率论与数理统计典型问题分析

李念伟　王凤英　编著



化学工业出版社
·北京·

本书内容涵盖了概率论与数理统计各部分的基本内容、解题的方法与技巧、典型例题分析、自测题及参考答案及相关教材《概率论与数理统计》的习题详解。对各章的重要知识点及易错易混的问题进行了分析，有利于学生正确理解相关概念，并精选一些典型例题，对教材《概率论与数理统计》的内容进行了充实和补充。本书对教师的教学和学生的学习将起到较好的辅助作用。

该书既可作为大学本科工科、经管类专业等《概率论与数理统计》课程的教学参考用书，又可作为在校大学生同步辅导书和硕士研究生入学考试复习用书。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计典型问题分析/李念伟，王凤英编著.—北京：化学工业出版社，2011.10
ISBN 978-7-122-12192-9

Ⅰ.概…　Ⅱ.①李…②王…　Ⅲ.①概率论-高等学校-题解②数理统计-高等学校-题解　Ⅳ.O21-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 178443 号

责任编辑：陈　蕾　　　　装帧设计：尹琳琳
责任校对：蒋　宇

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号　邮政编码 100011）
印　　刷：北京市振南印刷有限责任公司
装　　订：三河市宇新装订厂
720mm×1000mm　1/16　印张 15¼　字数 327 千字　2011 年 10 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899
网　　址：http：//www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：29.80 元

前　言

本书为教材《概率论与数理统计》（李念伟、王凤英编著，ISBN 978-7-122-07049-4）相配套的教学参考书。

全书涵盖了概率论与数理统计各部分基本内容、解题方法与技巧、典型例题分析、自测题及参考答案及《概率论与数理统计》的习题详解。本书对各章的重要知识点及易错易混的问题进行了分析，有利于学生正确理解相关概念，并精选一些典型例题，对《概率论与数理统计》的内容进行了充实和补充；对《概率论与数理统计》中的习题给出了较详尽的解题过程。对教师的教学和学生的学习将起到较好的辅助作用。

由于水平所限，本书如有不妥之处，诚挚希望专家、同行和广大读者批评指正。

本书为北京市优秀教学团队“数学公共基础系列课程教学团队”资助出版的系列图书之一。

作　者

2011 年 6 月

目　录

第一部分　概率论与数理统计基础内容

第二部分 《概率论与数理统计》习题详解

第一部分

概率论与数理统计基础内容

第 1 章 随机事件与概率

1.1 主要内容

1.1.1 随机事件及其运算

(1) 随机现象

在一定条件下不止有一种结果，而哪一种结果会出现事先不能确定.

(2) 随机试验

对于随机现象（可重复）的观察，用 E 表示.

(3) 样本空间

随机试验中一切可能结果（**样本点**）所组成的集合，用 Ω 表示.

(4) 随机事件

样本空间的某些样本点组成的集合，通常用 A，B，C，D…表示.

(5) 基本事件

只含一个样本点的随机事件.

(6) 随机事件间的关系

① **包含关系**：如果属于 A 的样本点必属于 B，则称 B 包含 A，记为 $A\subset B$，或 $B\supset A$.

② **事件相等**：如果属于 A 的样本点必属于 B，且属于 B 的样本点必属于 A，即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称 A 与 B 相等，记作 $A=B$.

③ **互不相容**：如果属于 A 的样本点不属于 B，且属于 B 的样本点也不属于 A，则称 A 与 B 互不相容.

(7) 随机事件的运算

① **事件的并（和事件）**：包含事件 A 与 B 的所有样本点的事件称为事件 A 与 B 的并（或称 A 与 B 的和），记作 $A\cup B$. $A\cup B$ 表示“事件 A 与 B 至少有一个发生”.

② **事件的交（积事件）**：包含事件 A 与 B 的所有相同样本点的事件称为事件 A 与 B 的交（或称 A 与 B 的积），记作 $A\cap B$（或 AB）. $A\cap B$ 表示“事件 A 与 B 同时发生”.

③ **事件的差**：属于事件 A 而不属于事件 B 的样本点所组成的事件称为 A 对 B 的差，记作 $A-B$. $A-B$ 表示“事件 A 发生而事件 B 不发生”.

④ **对立事件**：若事件 A 与 B 不能同时发生且又不能同时不发生，则称 A 与 B 为对立事件，或称事件 A 与 B 相互对立．记作 $A=\overline{B}$或 $B=\overline{A}$.

(8) 随机事件的运算律

① **交换律**：$A\cup B=B\cup A$；$A\cap B=B\cap A$.

② **结合律**：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

③ **分配律**：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$；$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

④ **对偶律（德莫根公式）**：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$；$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

1.1.2 概率

(1) 确定概率的频率方法

设随机试验 E 的样本空间为 Ω，A 为 E 的一个事件，在 n 次重复试验中，事件 A 发生的次数 $n(A)$称为 A 的**频数**．称$\frac{n(A)}{n}$为事件 A 在 n 次重复试验中发生的**频率**，记作：$f_n(A)=\frac{n(A)}{n}$.

频率满足以下性质.

① **非负性**：对任意事件 A，有 $f_n(A)\geqslant 0$.

② **正则性**：$f_n(\Omega)=1$.

③ **可列可加性**：若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_k,\cdots$ 互不相容，有

$$f_n\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right)=\sum_{k=1}^{+\infty} f_n(A_k).$$

(2) 概率

在 n 次重复试验中，事件 A 发生的次数为 $n(A)$，如果当试验次数 n 较大时，频率 $f_n(A)=\frac{n(A)}{n}$稳定地在某数值 p 附近摆动，而且随着试验次数的增加，这种摆动的幅度越来越小，则称数值 p 为事件 A 发生的**概率**．记作 $P(A)=p$.

(3) 概率的公理化定义

设随机试验 E 的样本空间为 Ω，如果对 E 的任一事件 A 都有一个实数 $P(A)$ 与之对应，且满足下面三条公理.

公理 1（非负性）：对任一事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$.

公理 2（正则性）：对必然事件 Ω，有 $P(\Omega)=1$.

公理 3（可列可加性）：若事件 A_1，A_2，…，A_k，…互不相容，有

$$P(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k)=\sum_{k=1}^{+\infty} P(A_k).$$

那么称 $P(A)$为事件 A 的**概率**.

(4) 概率的基本性质

性质 1 $P(\varnothing)=0$.

性质 2（有限可加性） 若事件 A_1，A_2，…，A_n互不相容，则

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)=\sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

性质 3　对任一事件 A，都有 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

性质 4　对任何两个事件 A，B，都有 $P(B-A)=P(B)-P(AB)$.

推论 1　若 $A\subset B$，则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$.

推论 2　若 $A\subset B$，$P(A)\leqslant P(B)$.

性质 5（加法公式）　对任何两个事件 A，B，都有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

推论　对任何 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n，都有

$$\begin{aligned}P\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)=&\sum_{k=1}^{n}P(A_k)-\sum_{1\leqslant k_1<k_2\leqslant n}P(A_{k_1}A_{k_2})+\cdots+\\&(-1)^{m-1}\sum_{1\leqslant k_1\leqslant\cdots\leqslant k_m\leqslant n}P(A_{k_1}A_{k_2}\cdots A_{k_m})+\\&\cdots+(-1)^{n-1}P\left(\bigcap_{k=1}^{n}A_k\right)\end{aligned}$$

(5) 古典概型

随机试验 E 的样本空间 Ω 满足：

含样本点的个数有限；

每个样本点出现等可能.

则随机事件 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{\text{事件 } A \text{ 所含样本点的个数}}{\text{样本空间 } \Omega \text{ 所含样本点的个数}}=\frac{k}{n}.$$

(6) 几何概型

随机试验 E 为在一个可度量几何区域 Ω 中等可能的任意投点，点落入 Ω 的任意子区域 D 中的可能性大小与 D 的测度成正比，而与其位置和形状无关．其随机事件 A 发生概率为

$$P(A_D)=\frac{D\text{ 的测度}}{\Omega\text{ 的测度}},$$

其中事件 A_D 表示“在区域 Ω 中随机投点，而该点落在区域 D 中”. 若 Ω 是平面区域，测度为平面区域面积；若 Ω 是区间，测度为区间长度.

1.1.3　条件概率

(1) 条件概率

设 A，B 为随机试验 E 中的两个事件，若 $P(A)>0$，则称

$$P(B|A)=\frac{P(BA)}{P(A)}$$

为“在事件 A 发生的条件下，事件 B 发生”的条件概率.

若 $P(B)>0$，则称

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

为“在事件 B 发生的条件下，事件 A 发生”的条件概率

注：条件概率 $P(B|A)$ 实际上是将样本空间 Ω 缩小为 Ω_A.

(2) **乘法公式**

若 $P(A)>0$,则有 $P(AB)=P(A)P(B|A)$;

若 $P(B)>0$,则有 $P(AB)=P(B)P(A|B)$.

乘法公式可以推广为：若 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

(3) **完备事件组**

设 A_1，A_2，$\cdots$，A_n为样本空间 Ω 中的一组事件，满足：

① $A_1,A_2,\cdots,A_n$互不相容且 $P(A_i)>0$，$(i=1,2,\cdots,n)$；

② $$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega .$$

(4) **全概率公式**

若 A_1，A_2，$\cdots$，A_n为样本空间 Ω 中的一个完备事件组，则对 Ω 中任一事件 B，有

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i) .$$

(5) **贝叶斯公式**

若 A_1，A_2，$\cdots$，A_n为样本空间 Ω 中的一个完备事件组，则对 Ω 中任一事件 B，若 $P(B)>0$，有

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(A_jB)}{P(B)} = \frac{P(A_j)P(B \mid A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)} \quad (j = 1,2,\cdots,n) .$$

1.1.4 事件的独立性

(1) **两个事件相互独立**

事件 A，B 满足 $P(AB)=P(A)P(B)$.

(2) **两个事件相互独立的等价条件**

当 $P(A)>0$ 时，$P(B|A)=P(B)$；

当 $P(B)>0$ 时，$P(A|B)=P(A)$.

性质 1 若事件 A 与 B 独立，则 A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立.

(3) **n 个事件两两独立**

n 个事件 A_1，A_2，$\cdots$，A_n满足：

$$P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j) \quad (1\leqslant i<j\leqslant n).$$

(4) **n 个事件相互独立**

n 个事件 A_1，A_2，$\cdots$，A_n同时满足：

$$P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j) \quad (1\leqslant i<j\leqslant n);$$

$$P(A_iA_jA_k)=P(A_i)P(A_j)P(A_k) \quad (1\leqslant i<j<k\leqslant n);$$

$$\cdots\cdots$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n) \quad (1\leqslant n).$$

性质 2 若事件 A_1，A_2，$\cdots$，A_n相互独立，则将其中若干个事件换为各自的对

立事件，所得诸事件仍相互独立.

(5) 试验的独立性

n 个试验 E_1，E_2，…，E_n，试验 E_1 的任一结果、试验 E_2 的任一结果、……、试验 E_n 的任一结果都相互独立.

(6) 伯努利试验

试验 E 只有两个可能结果 A 和 $\overline{A}$，且 $P(A)=p$，$(0<p<1)$.

(7) 伯努利概型（n 重伯努利试验）

即 n 次重复独立伯努利试验．对于 n 重伯努利试验，若事件 A 在一次试验中发生的概率为 $p(0<p<1)$，则事件 A 在 n 次试验中恰好发生 k 次的概率为

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (k=0,1,2,\cdots,n).$$

1.2 解题方法与易错易混的问题

本章中的一些概念容易混淆或存在一些模糊认识，下面举例说明.

(1) 事件间的关系

① 由 $A-B=C$ 不能推出 $A=B\cup C$.

若令 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{1,3,5\}$，则 $C=A-B=\{2,4\}$，$B\cup C=\{1,2,3,4,5\}\neq A$.

注：但 $A\supset B$ 时，由 $A-B=C$ 可推出 $A=B\cup C$.

② 由 $A=B\cup C$ 不能推出 $A-B=C$.

若令 $A=\{1,2,3,5\}$，$B=\{1,2\}$，$C=\{1,3,5\}$，则 $A=B\cup C$，$A-B=\{3,5\}\neq C$.

注：当 $B\subset A$，$C\subset A$，且 $BC=\varnothing$ 时，由 $A=B\cup C$ 可推出 $A-B=C$.

③ 一般情况下，$A\cup(B-C)\neq A\cup B-C$.

若令 $A=\{1,2\}$，$B=\{2,3\}$，$C=\{2\}$，则 $A\cup(B-C)=\{1,2,3\}$，$A\cup B-C=\{1,3\}$.

注：当 $AC=\varnothing$ 时，$A\cup(B-C)=A\cup B-C$.

(2) 事件与概率

在确定事件和事件的概率时，经常借助于文氏图．在图中“事件看形状，概率看面积”.

例如：设事件 A，B，则有 $B-A=B-AB$，即 $B-A$ 与 $B-AB$ 的图形相同；而 $B-A$ 的面积则是 B 的面积减去 AB 的面积，即有 $P(B-A)=P(B)-P(AB)$.

(3) 概率的性质

在概率性质中有 $P(\varnothing)=0$，但若 $P(A)=0$ 时，事件 A 未必是不可能事件. 例如：设试验 E 为“随机地向边长为 1 的正方形上投点”，即样本空间

$\Omega=\{(x,y)\mid 0\leqslant x,y\leqslant 1,x,y\in\mathbf{R}\}$；设事件 $A=\{(x,y)\mid x=y,(x,y)\in\Omega\}$，则 $P(A)=0$，而 $A\neq\varnothing$.

注：若 $P(A)=1$，事件 A 未必是必然事件.

(4) 事件的独立性

① 事件的独立没有传递性

设三事件 A，B，C，若 A 与 B 独立，且 B 与 C 独立，而 A 与 C 未必独立.

例如掷三枚均匀硬币．设 A 为“至少两个正面”，B 为“全正面或全反面”，C 为“至多一个正面”，试验的样本空间为

$$\Omega=\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH,TTT\},$$

其中 H 表示正面，T 表示反面. 容易算出：

$$P(A)=P(C)=\frac{1}{2}，P(B)=\frac{1}{4}，P(AB)=P(BC)=\frac{1}{8}，P(AC)=0.$$

即有 $$P(AB)=P(A)P(B)，P(BC)=P(B)P(C)，P(A)P(C)=\frac{1}{4}.$$

所以 A 与 C 不独立.

② 两两独立与相互独立不等价

以三个事件的独立性为例.

如设有一个均匀的正四面体，第一、二、三面分别涂上红、黄、蓝一种颜色，第四面涂上红、黄、蓝三种颜色。现以 A，B，C 分别记投一次四面体底面出现红、黄、蓝颜色的事件，则

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2}，P(AB)=P(AC)=P(BC)=\frac{1}{4}.$$

所以 A，B，C 两两独立，但

$$P(ABC)=\frac{1}{4}\neq\frac{1}{8}=P(A)P(B)P(C).$$

因而 A，B，C 不相互独立.

又如设有一均匀正八面体，其第一、二、三、四面涂有红色，第一、二、三、五面图黄色，第一、六、七、八面涂蓝色。现以 A，B，C 分别表示投一次正八面体，底面出现红、黄、蓝颜色的事件，则

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2},$$

$$P(ABC)=\frac{1}{8}=P(A)P(B)P(C).$$

但是

$$P(AB)=\frac{3}{8}\neq\frac{1}{4}=P(A)P(B),$$

$$P(AC)=\frac{1}{8}\neq\frac{1}{4}=P(A)P(C),$$

$$P(BC)=\frac{1}{8}\neq\frac{1}{4}=P(B)P(C).$$

所以 A，B，C 不两两独立.

(5) 事件的独立与互不相容

事件的独立是事件间的概率属性，而事件互不相容是事件间的相互关系．所以事件独立性与事件互不相容不能混为一谈.

① 若当 A，B 为两个独立事件，且 $P(A)>0$，$P(B)>0$，则 A，B 为相容事件. 即由 $P(AB)=P(A)P(B)$ 且 $P(A)>0$，$P(B)>0$，则 $P(AB)\neq 0$.

② 若当 A，B 为互不相容事件，且 $P(A)>0$，$P(B)>0$，则事件 A，B 不独立. 即由 $P(AB)=0$ 且 $P(A)>0$，$P(B)>0$，则 $P(AB)\neq P(A)P(B)$.

注 但若 A，B 中有一个概率为 0，则 A 与 B 独立同 A 与 B 互不相容可同时成立.

(6) $P(AB)$与 $P(B|A)$的关系

就 $P(AB)$与 $P(B|A)$两式而言，不难区别它们的意义：前者是事件 A，B 都发生的概率；后者是在 A 发生的条件下 B 发生的概率．但在具体问题中二者很容易混淆，关键是如何正确理解 AB，$B|A$ 的意义.

例如，在一袋子中有 7 个黑球、3 个白球，现从中依次不放回取出两个球．

求取到两个白球的概率以及若第一次取到白球，第二次又取到白球的概率.

根据题意，设：$A=$“第一次取到白球”，$B=$“第二次取到白球”．则 $AB=$“取到两个白球”．实际上，A 的含义可以理解为在两次取球中“第一次取到白球，第二次取球或黑或白”；B 的含义可以理解为在两次取球中“第一次取球或黑或白，第二次取到白球”．则“取到两个白球”即为事件 A，B 的积事件 AB，即

$$P(AB)=\frac{C_3^1}{C_{10}^1}\times\frac{C_2^1}{C_9^1}=\frac{1}{15}.$$

而“第一次取到白球，第二次又取到白球”是强调在 A 发生后 B 再发生，即在第一次取出 1 个白球后，第二次从剩下的 7 个黑球，2 个白球中取出 1 个白球，故

$$P(B|A)=\frac{C_2^1}{C_9^1}=\frac{2}{9}.$$

条件概率实际上是缩减了样本空间.

由条件概率公式有

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\dfrac{C_3^1}{C_{10}^1}\times\dfrac{C_2^1}{C_9^1}}{\dfrac{C_3^1}{C_{10}^1}}=\frac{C_2^1}{C_9^1}=\frac{2}{9}.$$

1.3 典型例题分析

【例 1.1】 设 A，B 为两任意事件，求事件$(\overline{A}\cup B)(A\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})(A\cup\overline{B})$的概率．

解

$$\begin{aligned}&(\overline{A}\cup B)(A\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})(A\cup\overline{B})\\&=(\overline{A}\cup B)(A\cup\overline{B})(A\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})\\&=(\overline{A}A\cup B\overline{B}\cup AB\cup\overline{A}\,\overline{B})(A\overline{A}\cup B\overline{B}\cup A\overline{B}\cup\overline{A}B)\\&=(AB\cup\overline{A}\,\overline{B})(A\overline{B}\cup\overline{A}B)\end{aligned}$$

$$=(AB)(A\overline{B})\cup(AB)(\overline{A}B)\cup(\overline{A}\,\overline{B})(A\overline{B})\cup(\overline{A}\,\overline{B})(\overline{A}B)$$
$$=\varnothing$$
则 $$P\{(\overline{A}\cup B)(A\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})(A\cup\overline{B})\}=0.$$

【例 1.2】 求以下情形时方程 $x^2+bx+c=0$ 有两个实根的概率：

(1) 方程中的系数 b，c 分别是一枚骰子先后两次掷出的点数；

(2) 系数 b，c 是同时掷两枚骰子出现的点数.

解 设 $A=$ {方程有两个实根}，且样本点总数为 $6^2=36$.
方程 $x^2+bx+c=0$ 有两个实根等价于 $b^2-4c\geqslant 0$，即 $b^2\geqslant 4c$.

(1) 由题意：当 $c=1$ 时，b 可为 2，3，4，5，6；

当 $c=2$ 时，b 可为 3，4，5，6；

当 $c=3$ 或 $c=4$ 时，b 可为 4，5，6；

当 $c=5$ 或 $c=6$ 时，b 可为 5，6.

即两枚骰子出现的点数共有 $5+4+2\times3+2\times2=19$ 种组合.

则所求概率为 $P(A)=\dfrac{19}{36}$.

(2) 由题意当两枚骰子出现的点数为 (1,1)，(2,2)，(3,3) 时不满足 $b^2\geqslant 4c$，则所求概率为 $P(A)=\dfrac{11}{12}$.

【例 1.3】 现有 3 个红球、2 个白球．将它们随机放入四个不同的盒子，求下列事件的概率：

(1) 每个盒子至少放入 1 球；

(2) 恰有 2 个红球放入同一个盒子.

分析 5 个球随机放入四个盒子，则每个球都有 4 种可能，故样本空间的样本点总数为 4^5．设 $A=${每个盒子至少放入一球}．“每个盒子至少放入一球”即为有一个盒子放入 2 个球，容易得出下面的解法：从 5 个球中任选出 1 个球任意放入一个盒子，其余的 4 个球对于四个盒子全排列，即 $P(A)=\dfrac{C_5^1C_4^1\times4!}{4^5}=\dfrac{15}{32}$ 或 $P(A)=\dfrac{C_4^1P_5^4}{4^5}=\dfrac{15}{32}$.

这种解法看起来很有道理，但是错误，它违反了“不重不漏”的原则．若将 5 个球和四个盒子编号：1，2，3，4，5 及一、二、三、四，当 1 号球被选出放入一号盒，其余 4 个球全排列时 2 号球可能排到一号盒；当 2 号球被选出放入一号盒，其余 4 个球全排列时 1 号球也可能排到一号盒．这样就出现了重复，其它的球都会出现类似情况．正确的解法如下.

解 设 $A=${每个盒子至少放入一球}，$B=${恰有 2 个红球放入同一个盒子}.

(1) $P(A)=\dfrac{C_4^1C_5^2\times3!}{4^5}=\dfrac{15}{64}$.

(2) $P(B)=\dfrac{C_3^2C_4^1C_3^1\times4^2}{4^5}=\dfrac{9}{16}$.

注：(2)式中，$C_3^2C_4^1$表示 3 个红球任取 2 个放入由四个盒子中选出的一个，C_3^1表示余下的 1 个红球放入余下的三个盒子中选出的一个，4^2表示 2 个白球各有 4 种选择.

【例 1.4】 一枚深水炸弹击沉潜艇的概率是$\frac{1}{3}$，击伤潜艇的概率是$\frac{1}{2}$. 已知潜艇若两次被击伤便沉没. 求四枚深水炸弹击沉潜艇的概率.

解 设 B={潜艇被击沉}，A_1={一枚炸弹击沉}，A_2={一枚炸弹击伤}，A_3={一枚炸弹未击中}.

则
$$P(A_1)=\frac{1}{3},\ P(A_2)=\frac{1}{2},\ P(A_3)=\frac{1}{6}.$$

若只有一枚炸弹击中潜艇，可分为“击沉”或“击伤”，

即 $C_4^1\times\frac{5}{6}\times\left(\frac{1}{6}\right)^3=C_4^1\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{6}\right)^3+C_4^1\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{6}\right)^3$.

则
$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-C_4^0\times\left(\frac{1}{6}\right)^4-C_4^1\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{6}\right)^3=1-\frac{13}{6^4}.$$

注：该题也可用多项分布的方法解.

【例 1.5】 某厂生产的仪器，初次检验通过率为 70%，初次检验没有通过的仪器经调试后能通过二次检验的占调试仪器的 80%. 现生产 $n(n\geqslant 2)$台仪器（设每台仪器的生产过程相互独立).

(1) 求仪器全部检验通过的概率；

(2) 求至少有一台仪器检验不通过的概率.

解 (1) 设 A={生产的仪器初检通过}，B={生产的仪器检验通过}，

则
$$P(B)=P(A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=0.7+0.3\times 0.8=0.94.$$

(2) 由题意，检验只有两种结果“通过”与“不通过”，故检验为 Bernoulli 试验，试验(检验)次数为 $n(n\geqslant 2)$，通过率为 0.94.

令 X 表示经检验通过的仪器数，“至少有一台仪器检验不通过”的概率为
$$P\{X\leqslant n-1\}=1-P\{X>n-1\}=1-P\{X=n\}=1-0.94^n$$

注：若给出的试验为“只有两种结果的独立重复试验”，则要联想到 Bernoulli 试验（二项分布）；若所求的是若干事件中“至少”有一个发生的概率，则要联想到用对立事件的概率公式 $P(A)=1-P(\overline{A})$. 这是概率论中常用的思维定势.

【例 1.6】 一猎手使用双筒猎枪狩猎，其射击命中率为 0.6，设能够遇到猎物的概率为 0.7. 求猎手遇到猎物时两次独立射击至少击中一次的概率.

解 设A={猎物出现}，A_i={第 i 次击中猎物}（i=1，2)，

B={两次独立射击至少击中一次}.

由题意，$P(A)=0.7$，$P(A_i|A)=0.6$，

则所求
$$\begin{aligned}P(B)&=P(AB\cup\overline{A}B)=P(AB)=P\{A(A_1\cup A_2)\}=P(A)P\{(A_1\cup A_2)|A\}\\&=P(A)\{P(A_1|A)+P(A_2|A)-P(A_1A_2|A)\}\\&=P(A)\{P(A_1|A)+P(A_2|A)-P(A_1|A)P(A_2|A)\}\\&=0.7\times(0.6+0.6-0.6\times 0.6)=0.588.\end{aligned}$$