经济数学基础(三)

概率论与数理统计

电子科技大学出版社

图书在版编目（CIP 数据）
概率论与数理统计/杨桂元主编.—成都：电子科技大学出版社，
2002.2
ISBN 7—81065—871—9
Ⅰ.概... Ⅱ.杨... Ⅲ.①概率论②数理统计
Ⅳ.021

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 005795 号

经济数学基础（三）

概率论与数理统计

主编 杨桂元

出　　版：电子科技大学出版社（成都市建设北路二段四号，邮编：610054）
责任编辑：陈松明
发　　行：电子科技大学出版社
印　　刷：成都墨池教育印刷总厂
开　　本：850×1168　1/32　印张　13.25　字数　298 千字
版　　次：2002 年 2 月第一版
印　　次：2002 年 2 月第一次印刷
书　　号：ISBN 7—81065—871—9/O・32
印　　数：1—6000 册
定　　价：18.80 元

前　言

《经济数学基础》(包括《微积分》、《线性代数》和《概率论与数理统计》)是财经管理类专业的核心课程之一，是一门重要的基础课。学好这门课程不但能为学生将来从事经济计量分析提供一个有力的工具，而且对于学生逻辑思维能力的培养和创新思维的开发都有着不可替代的作用。

近年来，随着时代的发展和教学改革的不断深入，如何在数学教学中推行素质教育，努力培养学生的创新意识与创新精神，是我们必须面对的一个新课题。过去，我们往往只注重数学知识的传授，但怎样用数学方法解决实际问题却讲得不多，因而学生只会算题，不知道怎么用，而一旦到用的时候，很多数学知识又忘掉了。这是一个很深刻的教训！之所以会形成这种局面，除了课时的限制之外，现行教材中缺乏数学在实际中应用的实例也是一个重要的原因。我们编写这套教材就是为了改变这个现状所作的一种努力和尝试。

这套教材以原国家教委高等教育司审定的“高等学校财经管理类专业核心课程《经济数学基础》教学大纲”为依据，遵循“以应用为目的，以必需够用为度”的原则，吸收了国内外同类教材的优点，并揉进了我们教学改革的经验。在编写的过程中，对这门课程的一些经典内容，我们在叙述的时候力求做到结合实际、深入浅出、简明扼要，同时还增加了数学方法的介绍及其在经济应用方面的比重。为了巩固学习效果，每节之后都附有一定数量的课后练习，每章之后还配有习题。书后附有练习及习题的答案与提示，可

供教与学的参考。

这套教材的另一个主要特色是每一章后面都附有与教材内容配套的数学应用实例。这些实例都具有一定的针对性，力求理论与实际应用相结合，既可以在课堂上讲授，也可以作为学生的课外阅读材料。希望通过这些实例的阅读和讲授，能缩短数学方法和实际应用的距离，使学生确实感到数学有用，并知道怎样去用，以培养“用数学”的意识。我们衷心希望通过本课程的学习，能使学生在为后继课程奠定良好基础的同时，数学素养和应用数学知识解决实际问题的能力都能得到提高。

《概率论与数理统计》是《经济数学基础》的第三部分。本书由杨桂元任主编，各章的编写人员为：葛恒林编写第一章和第七章，赵魁君编写第二章，钱晓莉(杭州商学院)编写第三章和第四章，苏孝正编写第五章和第六章，杨桂元编写各章的应用实例。全书由主编总纂、修改定稿。

本书在编写过程中，得到了安徽财贸学院教务处、基础部的领导和数学教研室各位同仁的大力支持，在此一并致以诚挚的谢意。

由于我们水平有限，书中谬误及不当之处在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

2001 年 12 月

目　　录

第一章 随机事件与概率

在自然界里，在人类社会的各种活动中，人们能够观察到各种现象. 有一类现象，在一定的条件下其结果有确定性，即必然发生或必然不发生. 例如，向上抛出的物体必然会下落；在一个大气压下水加热到 100℃必然会沸腾，而在 40℃时就不会沸腾；等腰三角形的两底角必然相等；等等. 这类现象称为确定性现象或必然现象. 在自然界里和社会上还存在着另外一种现象，这种现象与必然现象不同，在一定的条件下，其结果有偶然性，可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果. 例如，掷一枚均匀的硬币，落下后，可能正面向上，也可能反面向上；一射击运动员打一枚飞碟，可能打中也可能打不中；新生的婴儿可能是男，也可能是女；一火车站在相同条件下运营，每天发送的旅客数却并不完全相同；等等. 这类现象称为偶然性现象或随机现象.

对随机现象进行一次或较少几次观察，其结果具有不确定性，但是在相同条件下进行大量观察时，它的结果却呈现出某种规律性. 例如，根据各个国家各个时期的大量人口统计资料，新生婴儿中男婴和女婴的比例大约总是 1∶1；均匀的硬币抛掷多次，落下后，正面向上的次数大约占抛掷次数的一半；等等. 这种规律性称为随机现象的统计规律性.

概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律性的一门数学学科.

概率统计的理论和方法应用十分广泛，目前已涉及几乎所有科学技术领域及国民经济的各个部门. 在经济管理科学日趋定量

化的今天,概率统计已成为现代经济管理工作者必须掌握的基本工具技能课程.

1.1 随机事件

一、随机试验

为了研究随机现象的统计规律性,我们把对随机现象进行的观察和所做的科学实验,统称为试验,用字母 E 表示.下面是一些试验的例子.

E_1:抛一枚硬币,落下后,观察正面、反面出现的情况.

E_2:掷一枚骰子,观察出现的点数.

E_3:记录某商店一天内接待的顾客数.

E_4:从一批灯管中任取一只,测试其寿命.

E_5:射手进行射击,击不中再击,直至击中为止,观察射击情况.

以上所举五个试验的例子,都有一些共同的特点:

1. 在相同的条件下,可以重复进行;

2. 每次试验的可能结果不止一个,并且事先能明确所有可能的结果;

3. 在试验进行之前,不能确定哪一个结果会出现.

在概率论中,我们把具有重复性、明确性、随机性三个特点的试验称为随机试验,简称试验,以后所说试验均为随机试验.我们是通过随机试验来研究随机现象的.

二、随机事件

在一次随机试验中可能出现也可能不出现,而在大量重复试验中具有统计规律性的事件,称为随机事件,简称事件.一般用大

写字母 $A,B,C\cdots$，等表示. 例如，在试验 E_1 中，$A=\{$出现正面$\}$，$B=\{$出现反面$\}$；在试验 E_4 中，$C=\{$寿命为 800 小时$\}$，$D=\{$寿命大于 1000 小时$\}$等都是随机事件.

随机试验中，每一个可能出现的结果都是一个随机事件，它们是这个试验中最简单、不可再分的事件，称为基本事件. 例如，在试验 E_1 中$\{$出现正面$\}$，$\{$出现反面$\}$；在试验 E_2 中$\{$出现 1 点$\}$，$\{$出现 2 点$\}$，…，$\{$出现 6 点$\}$，都是基本事件. 由基本事件组合而成的事件称为复合事件. 在 E_2 中$\{$点数大于 4$\}$是一个复合的随机事件，它是由$\{$出现 5 点$\}$，$\{$出现 6 点$\}$，这两个基本事件所组成，只要这两个基本事件中有一个发生，$\{$点数大于 4$\}$这一事件就发生.

在一次试验中必然会发生的事件叫做必然事件，记为 Ω；在一次试验中必然不会发生的事件叫做不可能事件，记为 $\varnothing$. 例如，在试验 E_2 中，$\{$点数不大于 6$\}$是必然事件，$\{$点数大于 6$\}$是不可能事件；在试验 E_5 中，$\{$至少射击 1 次$\}$是必然事件，$\{$射击次数小于 1$\}$是不可能事件.

必然事件和不可能事件都是确定性事件，实际上并不是随机事件，但是为了以后讨论方便，我们把它们当作特殊的随机事件.

三、样本空间

前面已经提出，基本事件就是随机试验的每一个可能的结果 ω 组成的单点集$\{\omega\}$. 每一个可能的结果 ω 称为随机试验的一个样本点，由随机试验 E 的所有样本点组成的集合，称为试验 E 的样本空间. 对于任何一个随机试验，其结果必定是全部基本事件中的一个. 这样，样本空间作为一个事件一定是必然事件，所以也用 Ω 表示. 样本空间的元素是由试验 E 的内容所确定的.

以下是前面五个试验的样本空间：

Ω_1：$\{$正，反$\}$

Ω_2：$\{1,2,3,4,5,6\}$

Ω_3：$\{0,1,2,\cdots\}$

Ω_4:$\{T|T\geqslant 0\}$

Ω_5:$\{+,-+,--+,\cdots\}$这里"+"表示击中,"-"表示没击中.

因为样本空间是集合,因而,可以用集合表示事件,例如在 E_2 的样本空间 Ω_2 中,基本事件{出现 1 点},{出现 2 点},…,{出现 6 点},可以用单点集{1},{2},…,{6}表示,而复合事件{点数大于 4}是由基本事件"5","6"所组成,是 Ω_2 的子集{5,6}.

特别要指出的是,样本空间 Ω 就是必然事件,空集$\varnothing$不包含任何样本点,作为样本空间 Ω 的子集,就是不可能事件.

四、事件间的关系和运算

为研究事件及其概率的需要,有必要引入事件之间的一些重要关系和运算. 由于随机事件是样本空间 Ω 的子集,所以事件之间的关系与运算和集合论中集合之间的关系与运算是一致的. 这样,我们常用集合的关系和运算来分析事件的关系与运算.

(1)事件的包含与相等. 若事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称事件 B 包含事件 A,记为 $B\supset A$,或 $A\subset B$.

如果事件 B 包含事件 A,并且事件 A 也包含事件 B,则称事件 A 与事件 B 相等,记为 $A=B$.

(2)事件的和(并). 事件 A 与事件 B 至少有一个发生,即"A 或 B",这一事件称为事件 A 与事件 B 的和事件,记为 $A\cup B$ 或 $A+B$.

(3)事件的积(交). 事件 A 与事件 B 同时发生,即"A 且 B",这一事件称为事件 A 与事件 B 的积事件,记为 $A\cap B$ 或 AB.

事件的和与事件的积都可以很容易地推广到任意有限多个,以至可列无限多个事件上去.[①]

---

① 一个集合,如果其中的元素能与自然数集 $N=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$ 的元素组成一一对应关系,则称该集合为可列集. 显然可列集是一个无限集合.

(4)事件的差. 事件 A 发生而事件 B 不发生，称为事件 A 与事件 B 的差事件，记为 $A-B$.

(5)互不相容事件. 若事件 A 与事件 B 不可能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互不相容(互斥). 基本事件是两两互不相容的.

(6)对立事件. 如果事件 A 与事件 B 满足 $A\cup B=\Omega$，且 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互为对立事件(逆事件)，事件 A 的对立事件记为 $\overline{A}$，显然 $\overline{\overline{A}}=A$. 对立事件一定是互不相容的，反之，互不相容事件不一定是对立事件.

(7)完备事件组. n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容，且 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\Omega$，则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成一个完备事件组. 样本空间 Ω 的全体基本事件构成一个完备事件组.

与集合一样，事件间的关系和运算可以用图 1－1～图 1－6 直观地表示. 例如，在图 1－1 中矩形表示样本空间 Ω，圆 A 和圆 B

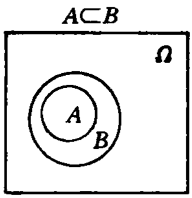

图 1－1

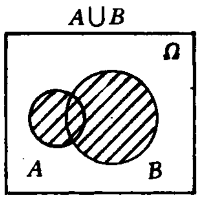

图 1－2

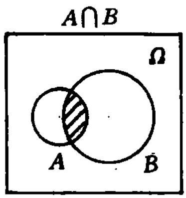

图 1－3

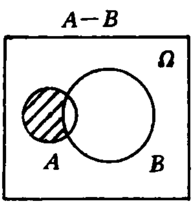

图 1－4

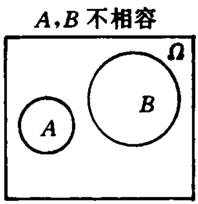

图 1－5

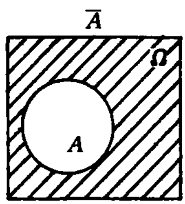

图 1－6

分别表示事件 A 和事件 B，且事件 B 包含事件 A. 其他各图中的阴影部分表示事件 A 与事件 B 的各种关系和运算.

随机事件的运算满足以下算律：

交换律：$A\cup B=B\cup A \qquad A\cap B=B\cap A$

结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

分配律可以推广到有限或无限多个事件的情形，即

$$A\cap(\bigcup_i A_i)=\bigcup_i(A\cap A_i)$$

$$A\cup(\bigcap_i A_i)=\bigcap_i(A\cup A_i)$$

摩根律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B} \quad \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

摩根律也可以推广到有限或可列无限多个事件的情形，即

$$\overline{\bigcup_i A_i}=\bigcap_i\overline{A_i} \qquad \overline{\bigcap_i A_i}=\bigcup_i\overline{A_i}$$

例 1 甲、乙、丙三人射击同一目标，设 A、B、C 分别表示甲、乙、丙击中，用事件 A、B、C 表示下列各事件：

(1) 三人都击中；

(2) 三人都未击中；

(3) 甲击中，乙、丙未击中；

(4) 三人至少有一人击中；

(5) 三人中至多有一人击中.

解 (1) ABC

(2) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ 或 $\overline{A\cup B\cup C}$

(3) $A\,\overline{B}\,\overline{C}$

(4) $A\cup B\cup C$

(5) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\cup A\,\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}\,B\,\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}\,C$ 或 $\overline{A}\,\overline{B}\cup\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{C}$

例 2 设 A,B,C 为三事件，下列各事件表示什么意思？

(1) $A\bar{B}\bar{C}$；　　　　(2) $(A\cup B)\bar{C}$；

(3) $\bar{B}\bar{C}$；　　　　(4) $\bar{A}\cup\bar{B}$；

(5) $\overline{ABC}$；　　　　(6) $AB\cup BC\cup AC$.

解　(1) $A\bar{B}\bar{C}$ 表示 A 发生且 B、C 都不发生；

(2) $(A\cup B)\bar{C}$ 表示 A 和 B 至少有一个发生且 C 没有发生；

(3) $\bar{B}\bar{C}$ 表示 B,C 都没有发生；

(4) $\bar{A}\cup\bar{B}$ 表示 A、B 中至少有一个没发生；

(5) $\overline{ABC}$ 表示 A,B,C 中至多有两个发生或 A,B,C 不全发生；

(6) $AB\cup BC\cup AC$ 表示 A,B,C 中至少有两个发生.

例 3　证明：$A-B=A\bar{B}$

证　事件 $A-B$ 是事件 A 与 B 的差，它表示事件 A 发生并且 B 不发生. 事件 $A\bar{B}$ 表示事件 A 与 B 的对立事件的积，也表示 A 发生并且 B 不发生，因而 $A-B$ 与 $A\bar{B}$ 是同一个事件，故有 $A-B=A\bar{B}$. 顺便指出：$A-B=A-AB$.

练习 1－1

1. 写出下列随机试验的样本空间：

E_1：掷一枚硬币两次，落下后，观察正、反面出现的情况.

E_2：掷两粒骰子，观察出现的点数.

E_3：记录某电话交换台一分钟内接到的呼唤次数.

E_4：一口袋中装有红、黄、蓝三种颜色球，从袋中任取一只观察其颜色.

E_5：测量一辆汽车通过某路口的速度.

2. 指出下列各题中哪些成立，哪些不成立？

(1) $A\cup B=(A\bar{B})\cup B$；　　　　(2) $\bar{A}B=A\cup B$；

(3) $\overline{A\cup B}C=\bar{A}\bar{B}\bar{C}$；　　　　(4) $(AB)(A\bar{B})=\varnothing$；

(5) 若 $A\subset B$，则 $A=AB$；　　　　(6) 若 $A\subset B$，则 $A=A\cup B$；

(7) 若 $A\subset B$,则 $\overline{B}\subset\overline{A}$;　　　　(8) 若 $B\subset A$,则 $A=A\cup B$.

3. 设 $\Omega=\{1,2,\cdots,10\}$,$A=\{2,3,4\}$,$B=\{3,4,5\}$,$C=\{5,6,7\}$,具体写出下列各式:

(1) $\overline{A}\,B$;　　(2) $\overline{A}\cup B$;　　(3) $\overline{\overline{A}\,\overline{B}}$;

(4) $\overline{A\,\overline{BC}}$;　　(5) $\overline{A(B\cup C)}$.

4. 从某单位任选一人,设 A 表示选到的人会英语,B 表示选到的人会日语,则以下各式表示选到什么样的人:

(1) $\overline{A}$;　(2) $\overline{B}$;　(3) $A-B$;　(4) $\overline{A\cup B}$;　(5) $\overline{AB}$.

5. 设三事件 A,B,C 满足 $ABC=\varnothing$,问这三事件是否一定两两互不相容? 画图说明.

1.2 概　　率

一、频率与概率

一个随机事件,在一次试验中可能发生,也可能不发生,在大量试验中,我们总会发现有些事件发生的可能性大些,有些事件发生的可能性小些.因此,我们总是希望找到一个数量指标来表示事件发生可能性的大小,这个数量指标应该是事件本身所固有的,而不是人们臆测的一种客观的量度,当事件发生的可能性较大时,它的值就大,反之,当事件发生的可能性较小时,它的值就小.这个度量事件 A 发生可能性大小的数量指标,称为事件 A 的概率,记为 $P(A)$.下面我们通过频率来讨论概率.

在相同的条件下,进行了 n 次试验,在这 n 次试验中,事件 A 发生的次数称为事件 A 发生的频数,记为 n_A,频数 n_A 与试验总次数 n 的比值 n_A/n 称为事件 A 发生的频率,记为 $f_n(A)$,即

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}.$$

在 n 次试验中，事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 有以下性质：

(1)**非负性** $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$

(2)**正则性** $f_n(\Omega)=1 \quad f_n(\varnothing)=0$

(3)**可加性** 若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 两两互不相容，则

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k)$$

证 (1)因为 $0\leqslant n_A\leqslant n$ 所以有 $0\leqslant\frac{n_A}{n}\leqslant 1$，即

$$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$$

(2)因为 Ω 是必然事件，在每次试验中必然发生，因此 $n_\Omega=n$；$\varnothing$ 是不可能事件，在每次试验中都不可能发生，因此 $n_\varnothing=0$，所以有

$$f_n(\Omega)=1,\quad f_n(\varnothing)=0$$

(3)只证 $k=2$ 的情形．因为事件 $A_1\cup A_2$ 发生表示事件 A_1,A_2 至少有一个发生，又因为 A_1,A_2 互不相容，所以在 n 次试验中 $A_1\cup A_2$ 发生的频数等于事件 A_1 发生的频数与事件 A_2 发生的频数之和即 $n_{A_1\cup A_2}=n_{A_1}+n_{A_2}$，所以有

$$f_n(A_1\cup A_2)=\frac{n_{A_1\cup A_2}}{n}=\frac{n_{A_1}+n_{A_2}}{n}=f_n(A_1)+f_n(A_2)$$

事件 A 发生的频率是它发生的频数与试验次数之比，它的大小表示事件 A 在试验中发生的频繁程度，反映了事件 A 发生的可能性的大小．因此，很自然的想法是用频率来反映概率，历史上有很多人做过大量试验来探讨这个问题．

例 1 将一枚均匀的硬币抛掷 5 次、50 次、500 次，各做 10 组，以 A 表示“正面向上”，即徽花向上，得到数据如表 1－1 所示．

从表 1－1 可以看出，当抛掷次数比较少时，频率 $f_n(A)$ 波动较大，但随着 n 的增大，$f_n(A)$ 总是在 0.5 附近波动，呈现出稳定性．历史上一些著名学者所做的试验（其数据如表 1－2 所示）更能说明这一点．

表 1—1

实验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_A	$f_n(A)$	n_A	$f_n(A)$	n_A	$f_n(A)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

表 1—2

实　验　者	n	n_A	$f_n(A)$
德·摩根	2048	1061	0.5181
蒲　　丰	4040	2048	0.5069
K·皮尔逊	12000	6019	0.5016
K·皮尔逊	24000	12012	0.5005

例 2　为检验某种子的发芽率，从一大批种子中抽取 10 批种子做发芽试验，其结果如表 1—3 所示.

表 1—3

种子粒数	2	5	10	70	130	310	700	1500	2000	3000
发芽粒数	2	4	9	60	116	282	639	1339	1806	2715
发 芽 率	1	0.8	0.9	0.857	0.892	0.910	0.913	0.893	0.903	0.905