高等数学

王文杰　孙圣芳　韩朝晖　主编

湖南师范大学出版社

高等数学

王文杰　孙圣芳　韩[illegible]　主编

湖南师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学 / 王文杰，孙圣芳，韩朝晖主编．—长沙：湖南师范大学出版社，2008.1

ISBN 978-7-81081-822-3

Ⅰ．高…　Ⅱ．①王…②孙…③韩…　Ⅲ．高等数学—高等学校—教材　Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 013303 号

高等数学

王文杰　孙圣芳　韩朝晖　主编

◇责任编辑：莫　华

◇责任校对：蒋旭东

◇出版发行：湖南师范大学出版社

地址/长沙市岳麓山　邮编/410081

电话/0731.8853867　8872751　传真/0731.8872636

网址/http://press.hunnu.edu.cn

◇经销：湖南省新华书店

◇印刷：国防科技大学印刷厂

◇开本：670×960　1/16

◇印张：16.75

◇字数：267 千字

◇版次：2008 年 2 月第 1 版　2008 年 2 月第 1 次印刷

◇印数：1—6000 册

◇书号：ISBN 978-7-81081-822-3

◇定价：29.00 元

前　言

随着社会的不断发展，数学在人们的工作和生活中的作用越来越重要，人们运用数学思想和方法来分析和解决实际问题的情况越来越普遍。为适应时代的要求，培养全面发展的合格人才，成人高等教育各专业均开设了《高等数学》课程。我们这本教材主要是为成人高等教育专科层次各专业的学生而编写的。

本书共分九章，前五章由王文杰同志编写，后四章及综合练习由孙圣芳同志编写，在编写过程中，我们一方面总结自己长期从事《高等数学》教学的经验，另一方面参考了一部分已出版的同类教材，吸取其中的优点。同时，考虑到了不同专业学生的需要以及成人业余学习的特点，在不影响学科体系的前提下，坚持“基础、通俗、实用”的原则。

本书的出版得到了湖南文理学院领导和湖南师范大学出版社领导的关心和支持，在此谨向他们和为本书出版付出辛勤劳动的同志表示衷心感谢。由于编者的水平有限，并且时间仓促，因此本书一定还存在着很多的问题和不足之处，希望各位专家以及使用本书的教师和学生批评指正。

编　者

2007 年 11 月 8 日

目　录

第1章　函数与极限

1.1　函数 ………………………………………………………… 1
1.1.1　函数的概念 ………………………………………………… 1
1.1.2　函数的几种特性 ……………………………………………… 8
1.1.3　初等函数 …………………………………………………… 9
习题　1.1 ……………………………………………………… 15
1.2　极限 ………………………………………………………… 15
1.2.1　数列的极限 ………………………………………………… 15
1.2.2　函数的极限 ………………………………………………… 17
1.2.3　函数的连续性 ……………………………………………… 24
习题　1.2 ……………………………………………………… 29

第2章　导数与微分

2.1　导数的概念 ………………………………………………… 31
2.1.1　导数的定义 ………………………………………………… 31
2.1.2　函数的可导性与连续性的关系 ……………………………… 37
习题　2.1 ……………………………………………………… 39
2.2　导数的运算法则 ……………………………………………… 39
2.2.1　基本初等函数的导数公式 …………………………………… 40
2.2.2　函数导数的四则运算法则 …………………………………… 40
2.2.3　反函数求导法则 …………………………………………… 44
2.2.4　复合函数求导法则 ………………………………………… 45
习题　2.2 ……………………………………………………… 49
2.3　隐函数的导数与由参数方程确定的函数的导数 ………………… 50
2.3.1　隐函数的导数 ……………………………………………… 50

2.3.2 由参数方程所确定的函数的导数 …… 53
习题 2.3 …… 54
2.4 高阶导数 …… 55
习题 2.4 …… 56
2.5 函数的微分 …… 57
2.5.1 微分的概念 …… 57
2.5.2 微分基本公式与运算法则 …… 60
2.5.3 微分的应用 …… 61
习题 2.5 …… 64

第3章 中值定理与导数的应用

3.1 中值定理 …… 65
习题 3.1 …… 68
3.2 罗必达法则 …… 68
习题 3.2 …… 72
3.3 函数性态的研究 …… 73
3.3.1 函数单调性的判定 …… 73
3.3.2 函数的极值与最大值、最小值 …… 74
3.3.3 曲线的凹凸性与拐点 …… 77
3.3.4 函数图形的描绘 …… 80
习题 3.3 …… 82

第4章 不定积分

4.1 不定积分的概念 …… 84
4.1.1 原函数 …… 84
4.1.2 不定积分的定义 …… 85
习题 4.1 …… 86
4.2 不定积分的基本公式与性质 …… 86
4.2.1 基本公式 …… 86
4.2.2 基本性质 …… 88
习题 4.2 …… 90

4.3　不定积分的计算 …… 91
4.3.1　换元积分法 …… 91
4.3.2　分部积分法 …… 96
4.3.3　有理函数的不定积分 …… 99
习题　4.3 …… 104

第5章　定积分

5.1　定积分的概念与基本性质 …… 106
5.1.1　定积分问题的提出 …… 106
5.1.2　定积分的定义 …… 107
5.1.3　定积分的基本性质 …… 109
习题　5.1 …… 110
5.2　定积分的计算 …… 111
5.2.1　基本公式 …… 111
5.2.2　换元法 …… 113
5.2.3　分部积分法 …… 115
习题　5.2 …… 116
5.3　定积分在几何上的应用 …… 116
习题　5.3 …… 120

第6章　常微分方程初步

6.1　微分方程的基本概念 …… 121
习题　6.1 …… 123
6.2　一阶微分方程 …… 124
6.2.1　可分离变量方程 …… 124
6.2.2　齐次方程 …… 125
6.2.3　一阶线性微分方程 …… 127
习题　6.2 …… 129
6.3　三种特殊的二阶微分方程 …… 130
6.3.1　$y''=f(x)$型微分方程 …… 130
6.3.2　$y''=f(x,y')$型微分方程 …… 130

6.3.3 $y''=f(y,y')$型微分方程 ………… 131
习题 6.3 ………… 131
6.4 二阶常系数齐次线性微分方程 ………… 132
6.4.1 微分方程 ………… 132
习题 6.4 ………… 134
6.5 二阶常系数非齐次线性微分方程举例 ………… 134
习题 6.5 ………… 136

第7章 向量代数与空间解析几何

7.1 空间直角坐标系 ………… 137
7.1.1 空间直角坐标系和点的坐标 ………… 137
7.1.2 空间两点间的距离 ………… 139
7.1.3 曲面与方程 ………… 140
习题 7.1 ………… 141
7.2 向量代数 ………… 142
7.2.1 向量的概念 ………… 142
7.2.2 向量的加减法 ………… 143
7.2.3 数与向量的乘法 ………… 144
7.2.4 向量在坐标轴上的投影 ………… 144
7.2.5 向量的坐标表示 ………… 145
7.2.6 向量的数量积 ………… 148
7.2.7 两向量的向量积 ………… 150
习题 7.2 ………… 151
7.3 空间中的平面 ………… 152
7.3.1 平面方程 ………… 152
7.3.2 两平面间的夹角 ………… 155
7.3.3 点到平面的距离 ………… 156
习题 7.3 ………… 156
7.4 空间直线 ………… 157
7.4.1 空间曲线的一般式方程 ………… 157
7.4.2 空间直线方程 ………… 157

7.4.3　两直线间的夹角及直线与平面间的夹角 …… 159
习题　7.4 …… 160
7.5　二次曲面 …… 160
习题　7.5 …… 167

第 8 章　二元微分学

8.1　二元函数的基本概念 …… 168
8.1.1　二元函数的定义 …… 168
8.1.2　二元函数的极限与连续 …… 170
习题　8.1 …… 172
8.2　偏导数 …… 173
8.2.1　偏导数的定义 …… 173
8.2.2　二元复合函数的求导法则 …… 175
8.2.3　高阶偏导数 …… 177
8.2.4　二元隐函数的偏导数 …… 178
习题　8.2 …… 179
8.3　全微分 …… 180
8.3.1　全微分的概念 …… 180
8.3.2　全微分在近似计算中的应用 …… 182
习题　8.3 …… 182
8.4　偏导数的应用 …… 183
8.4.1　偏导数在几何方面的应用 …… 183
8.4.2　二元函数的极值 …… 186
习题　8.4 …… 188

第 9 章　二重积分简介

9.1　二重积分的概念和性质 …… 189
9.1.1　一个实例 …… 189
9.1.2　二重积分的定义 …… 190
9.1.3　二重积分的性质 …… 191
9.2　二重积分的计算 …… 192

9.2.1 利用直角坐标计算二重积分 …… 192
9.2.2 利用极角坐标计算二重积分 …… 197
习题 9.2 …… 200
综合练习一 …… 201
综合练习二 …… 204
综合练习三 …… 208
综合练习四 …… 212
参考答案 …… 216
附录 I 几种常用的曲线 …… 243
附录 II 积分表 …… 246

第 1 章　函数与极限

1.1　函　数

1.1.1　函数的概念

1. 常量与变量

人们在生产实践中经常遇到各种不同的量,有些是**不变的量(称为常量)**,有些是**变化的量(称为变量)**. 例如,我们考察某自由落体时,该物体的质量可以看作是常量,而该物体下降的距离则是变量.

常量和变量具有相对性,应视我们的考察过程而定. 例如,某种商品的价格在某段时间内是常量,但在较长时间内则是变量.

常量习惯用 a, b, c, d 等表示,变量习惯用 x, y, z 等表示.

2. 集合

我们通常将**具有特定性质的一些事物的总体叫做集合**,而把这些事物叫做集合的元素. 例如,一个班的全体学生组成一个集合,其中的每一个学生就是该集合的一个元素.

通常用大写字母 A, B, C 等表示集合,用小写字母 a, b, c 等表示集合的元素.

元素与集合的关系:若 a 是集合 A 中的元素,则称 a 属于 A,记作 $a \in A$.

若 a 不是集合 A 中的元素,则称 a 不属于 A,记作 $a \notin A$.

对于一个集合 A 来说,其元素应该是确定的,即对于任意一个元素 a,要么 $a \in A$,要么 $a \notin A$. 这是集合的一个重要特性.

表示集合的方法通常有两种:

①列举法:列出集合的所有元素,并用大括号括起来.

例如　$A = \{1, 2, 3, 4\}$

②描述法:将集合中元素的共同属性描述出来.

例如 $B=\{x|x^2-1=0$ 且 $x\in\mathbf{R}\}$表示方程 $x^2-1=0$ 的实数解集.

集合与集合的关系:对于两个集合 A, B, 若 B 中的每个元素都是 A 中的元素,则 B 叫做 A 的子集,记作 $B\subseteq A$.

例如 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{1, 3\}$, 则 $B\subseteq A$.

对于两个集合 A、B, 若 $B\subseteq A$, 并且 $A\subseteq B$, 则称 A 与 B 相等,记作$A=B$.

不含任何元素的集合叫做空集,记作$\varnothing$. 规定空集是任何集合的子集.

例如 $A=\{x|x^2+1=0$ 且 $x\in\mathbf{R}\}$是空集.

区间:设 a, b 为实数,且 $a<b$, 我们把集合$\{x|a<x<b\}$叫做以 a, b 为端点的开区间,记作(a, b),

即 $(a, b)=\{x|a<x<b\}$.

类似可定义闭区间:$[a, b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$;

半开半闭区间:$(a, b]=\{x|a<x\leqslant b\}$, $[a, b)=\{x|a\leqslant x<b\}$.

邻域:设 $\delta>0$. 我们称 $U(x_0, \delta)=(x_0-\delta, x_0+\delta)$为以 x_0 为中心, δ 为半径的邻域. 将邻域 $U(x_0, \delta)$的中心 x_0 去掉后的集合称为 x_0 的去心 δ 邻域,记为$\mathring{U}(x_0, \delta)$.

3. 函数的定义

设 D 为一给定数集,若有一个对应规则 f, 对于 D 内的每一个值 x 都有唯一的值 y 与 x 相对应,则称 f 为定义在 D 上的一个函数. 它在 x 的数值为$f(x)$,记为:$y=f(x)$. D 称为f的定义域, x 称为自变量, y 称为因变量或函数值, y 值的集合叫做f的值域. f的定义域通常记为 D_f,值域记为 R_f.

函数就是两个数集之间的一个对应规则,该对应规则通过函数值所表示出来.

定义域和对应规则是函数的两个要素. 函数与表示其变量的符号是无关的.

例如 若 u, v 都是实数,

则 $f(u)=u+1$ 与 $g(v)=v+1$ 是同一函数.

函数的表示通常有以下三种方法:

①解析法(公式法):用数学式子表示两个变量之间的对应关系.

②图示法(图象法):用平面直角坐标中的曲线来表示两个变量之间的关系.

③表格法(列表法):将自变量的一些值与相应的函数值列成表格表示变量之间的对应关系.

例1　求函数 $y=\dfrac{1}{\ln(x-1)}+\sqrt{5-x}$ 的定义域.

解　要使该函数有意义，自变量 x 必须满足以下条件:

$$\begin{cases}\ln(x-1)\neq 0\\ x-1>0\\ 5-x\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow 1<x<2 \text{ 或 } 2<x\leqslant 5$$

$\Rightarrow$该函数的定义域为　$D=(1,2)\cup(2,5]$.

例2　设 $f(x)=\begin{cases}2, & x<1,\\ x+3, & 1\leqslant x<5.\end{cases}$ 求 $f(0)$, $f(3)$, $f(9)$.

解　该函数的定义域为:$D=(-\infty,5)$,

$f(0)=2$, $f(3)=3+3=6$, $f(9)$无定义.

4. 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域是 D_f，值域是 R_f，即

$$f:x\mapsto y=f(x)\in R_f\quad(x\in D_f).$$

将 f 的自变量和因变量的“角色”对调，即将 $y\in R_f$ 作为自变量，如果对每个 $y\in R_f$，在 D_f 中只有唯一的 x 使得 $f(x)=y$，则将 y 变成 x 的对应法则 φ 就确定了一个新的函数 φ，即

$$\varphi:y\mapsto x=\varphi(y)\in D_f\quad(y\in R_f).$$

新函数 $x=\varphi(y)\,(y\in R_f)$ 称为函数 $y=f(x)\,(x\in D_f)$ 的**反函数**.

这时，原来的函数 $y=f(x)\,(x\in D_f)$ 称为**直接函数**. 函数 φ 由函数 f 完全确定，因此，通常将 φ 写成 f^{-1}. 所以

$$x\underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}}y\quad(x\in D_f,\ y\in R_f).$$

f 和 f^{-1} 在数集 D_f 和 R_f 之间建立了一一对应关系.

习惯上，总是将自变量用 x 表示，因变量用 y 表示，所以 $y=f(x)\,(x\in D_f)$ 的反函数写成

$$y=f^{-1}(x)\quad(x\in R_f).$$

由反函数的定义可知:反函数$f^{-1}(x)$的定义域$D_{f^{-1}}$是直接函数$f(x)$的值域R_f，反函数$f^{-1}(x)$的值域$R_{f^{-1}}$是直接函数$f(x)$的定义域D_f，即

$$D_{f^{-1}}=R_f,\ R_{f^{-1}}=D_f.$$

这里，自然会提出的一个问题是:在什么条件下$y=f(x)\ (x\in D_f)$有反函数?

假若$y=f(x)$在其定义域D_f上是单调的，则有

$$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow x_1=x_2\quad (x_1,\ x_2\in D_f).$$

所以，对每个$y\in R_f$，只能有一个$x\in D_f$使得$y=f(x)$，从而可以确定新函数$x=\varphi(y)$(如图 1-1). 因此，单调函数必有反函数. 但反之不然，即有反函数的函数不一定是单调的.

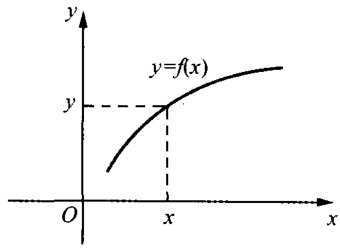

图 1-1

一般地说，并非每个函数都可以唯一确定一个反函数.

例 3 设$y=x^2\ (x\in\mathbf{R})$. 它在定义域$\mathbf{R}$上不单调，对于给定的$y>0$，有两个x与之对应，即$x=\pm\sqrt{y}$. 所以不能确定一个反函数. 但在$(-\infty,0)$上$y=x^2$单调减少，在$(0,+\infty)$上$y=x^2$单调增加，它们分别表示抛物线$y=x^2$的左、右半支，所以

$$y=x^2\ (x\in(-\infty,0))\text{有反函数}\ y=-\sqrt{x}\ (x\in(0,+\infty));$$

$$y=x^2\ (x\in(0,+\infty))\text{有反函数}\ y=\sqrt{x}\ (x\in(0,+\infty)).$$

例 4 求函数$y=\frac{1}{2}(a^x-a^{-x})\ (x\in\mathbf{R},\ a>0,\ a\neq1)$的反函数.

解 函数

$$y=\frac{1}{2}(a^x-a^{-x})\quad (a>1)$$

的图形如图 1-2 所示. 由函数式得

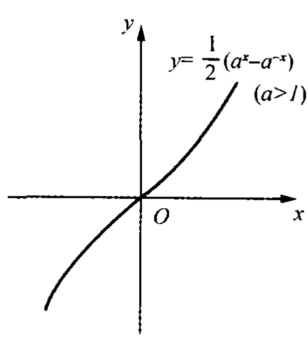

图 1-2

$$a^x-a^{-x}-2y=0,$$

即$(a^x)^2-2y(a^x)-1=0$. 对a^x配方，得

$$(a^x-y)^2=1+y^2,$$

所以 $a^x - y = \pm\sqrt{1+y^2}$，即

$$a^x = y \pm \sqrt{1+y^2}.$$

由于 $a^x > 0(\forall x \in \mathbf{R})$，而 $y - \sqrt{1+y^2} < 0$，故得

$$a^x = y \sqrt{1+y^2},$$

因此 $x = \log_a(y + \sqrt{1+y^2})$. 所以，所求的反函数为

$$y = \log_a(x + \sqrt{1+x^2}) \quad (x \in \mathbf{R}).$$

若 $y = f(x)(x \in D)$ 的反函数是 $y = f^{-1}(x)(x \in R_f)$，则后者的图形可由前者的图形得到. 事实上，设

$$C: y = f(x) \quad (x \in D).$$

$$C_1: x = f^{-1}(y) \quad (y \in R_f).$$

$$C_2: y = f^{-1}(x) \quad (x \in R_f).$$

由于 $y = f(x)$，$x = f^{-1}(y)$，故 $(x, f(x))$ 与 $(f^{-1}(y), y)$ 是同一个点，所以 C 与 C_1 是同一个图形. 而点 (x, y) 与点 (y, x) 关于直线 $y = x$ 对称，故 C_2 与 C 关于 $y = x$ 对称，从而 C_2 与 C 关于直线 $y = x$ 对称，如图 1-3 所示.

例 5　$y = 2^x(x \in \mathbf{R})$ 与 $y = \log_2 x(x > 0)$ 互为反函数，其图形如图 1-4 所示.

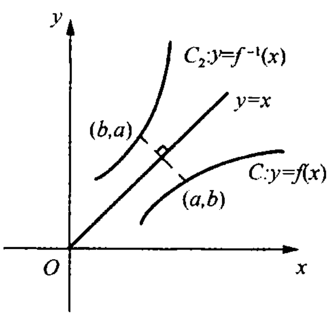

图 1-3

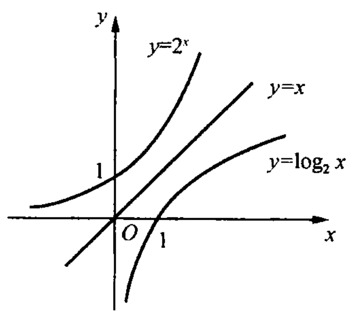

图 1-4

5. 复合函数

函数的复合是从已知函数产生新函数的一种方法.

设有两个函数

$$y = f(u), \quad u \in D_1$$

和

$$u=g(x), \quad x\in D.$$

如果 g 的值域 $R(g)\subset D_1$，则对于每个 $x\in D$，由 g 确定一个 $u\in R(g)\subset D_1$，从而这个 u 经过 f 又唯一地确定一个 y. 这样，对每个 $x\in D$，可以唯一确定一个 y（如图 1-5），从而确定一个新函数，这个函数称为由 $u=g(x)$ 和 $y=f(u)$ 构成的一个**复合函数**，其函数记号通常用 $f\circ g$ 表示，所以

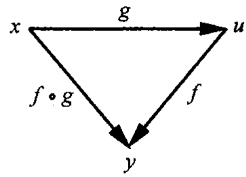

图 1-5

$$(f\circ g)(x)=f(g(x)), \quad x\in D.$$

也可以不用抽象的复合函数记号 $f\circ g$，而直接将这个复合函数表示为

$$y=f(g(x)), \quad x\in D.$$

在这个复合函数中，变量 u 有双重身份：既是函数 g 的函数值，又是函数 f 的自变量，它在 x 和 y 之间起着桥梁的作用，通常称为**中间变量**.

一般地说，由两个函数

$$y=\varphi(u), \quad u\in D_1$$

和

$$u=\psi(x), \quad x\in D_2,$$

可以构成复合函数 $y=\varphi(\psi(x))$ 的条件是：ψ 的值域 $R(\psi)$ 与 φ 的定义域 D_1 的交集 $R(\psi)\cap D_1$ 不是空集，即

$$D=\{x\mid x\in D_2,\ \psi(x)\in D_1\}\neq\varnothing.$$

这时，D 就是复合函数 $y=\varphi(\psi(x))$ 的定义域.

例 6 设 $y=f(u)=\sqrt{u-1}\,(u\in[1,+\infty))$，$u=g(x)=\dfrac{1}{x}\,(x\neq 0)$，则它们的复合函数为

$$y=f(g(x))=\sqrt{\frac{1}{x}-1},$$

其定义域 $D=(0,1]$，它是 $D(g)=\mathbf{R}-\{0\}$ 的一个真子集（即 $D\subset D(g)$，且 $D\neq D(g)$）.

例 7 设 $y=\varphi(u)=\lg u\,(u\in(0,+\infty))$，$u=\psi(x)=-x^2\,(x\in\mathbf{R})$，由于 $R(\psi)=(-\infty,0]$，故

$$R(\psi)\cap D(\varphi)=(-\infty,0]\cap(0,+\infty)=\varnothing.$$

从而复合函数 $y=\varphi(\psi(x))$ 的定义域是一个空集，函数 $y=\varphi(\psi(x))$ 无

意义.

注意：函数的复合一般与复合的次序有关，即$f(g(x))$与$g(f(x))$一般不是同一函数，甚至可能其中一个有意义而另一个没有意义.

例 8　设函数φ与ψ如例7，考虑复合函数$y=\psi(\varphi(x))$时，应为

$$y=\psi(u)=-u^2(u\in\mathbf{R})\quad 和\quad u=\varphi(x)=\lg x(x>0),$$

此时

$$y=\psi(\varphi(x))=-(\lg x)^2\quad(x>0).$$

可见复合函数$y=\psi(\varphi(x))$有意义.

例 9　设$y=f(x)=\sin x(x\in\mathbf{R})$，$y=g(x)=a^x(x\in\mathbf{R})$，则它们的两个复合函数为

$$y=f(g(x))=\sin a^x\quad(x\in\mathbf{R})$$

和

$$y=g(f(x))=a^{\sin x}\quad(x\in\mathbf{R}).$$

显然，$f(g(x))\neq g(f(x))$. 事实上，当$x=0$时$\sin a^0=\sin 1$，而$a^{\sin 0}=a^0=1$，$\sin a^0\neq a^{\sin 0}$，所以$f(g(0))\neq g(f(0))$.

还可以考虑多个函数的复合.

例 10　设$y=u^2$，$u=\sin v$，$v=\lg x$，则这三个函数的复合为

$$y=(\sin v)^2=(\sin\lg x)^2.$$

例 11　函数$y=\sqrt{\lg\sin x^2}$可看成下列函数

$$y=\sqrt{u},\ u=\lg v,\ v=\sin w,\ w=x^2$$

的复合，其中u，v，w是中间变量.

例 11 中将一个复合函数“拆成”（或“分解成”）多个简单函数的复合，在第 2 章函数的导数计算中是十分重要的.

例 12　设$f(\frac{1}{x}-1)=\sin x$，求$f(x)$.

解　引进中间变量$t=\frac{1}{x}-1$，则$\frac{1}{x}=t+1$，从而$x=\frac{1}{t+1}$. 函数$f(\frac{1}{x}-1)$可以看成两个函数$f(t)$和$t=\frac{1}{x}-1$的复合. 将$x=\frac{1}{t+1}$代入$\sin x$，可得

$$f(t)=f(\frac{1}{x}-1)=\sin x=\sin\frac{1}{t+1}.$$