走向IMO

数学奥林匹克试题集锦（2008）

顾问　裘宗沪
2008年IMO中国国家集训队教练组　编

IMO 2008 MADRID

华东师范大学出版社

走向IMO

数学奥林匹克试题集锦

(2008)

2008年IMO中国国家集训队教练组　编

华东师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

走向 IMO：数学奥林匹克试题集锦．2008/2008 年 IMO 中国国家集训队教练组编．—上海：华东师范大学出版社，2008

ISBN 978-7-5617-6293-6

Ⅰ.走… Ⅱ.2… Ⅲ.数学课—中学—试题 Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 116034 号

走向 IMO

数学奥林匹克试题集锦(2008)

编　　者　2008 年 IMO 中国国家集训队教练组
策划编辑　倪　明(数学工作室)
组稿编辑　徐　金
审读编辑　徐　金　陈信漪
封面设计　高　山
版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
电话总机　021-62450163 转各部门　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537(兼传真)
门市(邮购)电话　021-62869887
门市地址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　址　www.ecnupress.com.cn

印 刷 者　昆山市亭林彩印厂
开　　本　890×1240　32 开
插　　页　6
印　　张　6.75
字　　数　156 千字
版　　次　2008 年 8 月第一版
印　　次　2008 年 8 月第一次
书　　号　ISBN 978-7-5617-6293-6/G·3654
定　　价　20.00 元

出 版 人　朱杰人

前　言

本书以2008年国家集训队的测试题和国家队的训练题为主体，搜集了2007年8月至2008年7月间国内主要的数学竞赛及2008年国际数学奥林匹克试题和解答，并且附上了2008年美国和俄罗斯数学奥林匹克的试题与解答.这些试题大多是从事数学奥林匹克教学和研究的专家们的精心创作，其中的一些解答源自国家集训队和国家队队员，他们的一些巧思妙解为本书增色不少.

在过去的一年中，我国中学生数学竞赛的主要赛事有2007年全国高中数学联赛(由中国数学会普及工作委员会主办)，2008年中国数学奥林匹克(CMO)(由中国数学奥林匹克委员会主办)，以及由中国数学奥林匹克委员会主办的第6届中国女子数学奥林匹克(CGMO)和第7届西部数学奥林匹克(WCMO)等.

在2008年国家集训队和国家队集训期间，得到了裘宗沪、王杰、潘承彪等专家们的鼓励、支持和指导，得到了吴建平先生的各方面的帮助.另外在国家集训队集训期间，美国国家队领队冯祖鸣先生、天津师范大学的李建泉先生和江西的陶平生先生为学生做了专题讲座，提供了一些测验题.在国家队集训期间，潘承彪先生、叶中豪先生也为学生做了精彩的报告，在此对他们表示衷心的感谢.

本书倾注了许多专家和学者的心血，书中有许多他们的创造性的工作.本书可供数学爱好者、参加数学竞赛的广大中学生、从事数学竞赛教学的教练员、开设数学选修课的教师参考.

2007 年全国高中数学联赛及加试由吴建平整理，2008 年中国数学奥林匹克由陈永高整理，2007 年第 6 届中国女子数学奥林匹克由朱华伟整理，2007 年第 7 届中国西部数学奥林匹克由刘诗雄整理，2007 年中国东南地区数学奥林匹克由李胜宏、陶平生整理，2008 国家集训队测试题由熊斌整理，2008 年中国国家队选拔考试题由余红兵整理，2008 年国家队培训题由冯志刚整理，2008 年国际数学奥林匹克（第 49 届 IMO）由熊斌和冯志刚整理. 2008 年俄罗斯数学奥林匹克由李伟固提供，2008 年美国数学奥林匹克由冷岗松提供.

囿于作者的水平，加上编写时间仓促，不足和错误在所难免，请广大读者朋友批评指正，不吝施教.

2008 年 IMO 中国国家集训队教练组

2008 年 7 月

目　录

2007年全国高中数学联赛

受中国数学会委托，2007 年全国高中数学联赛由天津市数学会承办．中国数学会普及工作委员会和天津市数学会负责命题工作，这是“第十四次全国数学普及工作会议”对《高中数学竞赛大纲》进行修订之后的第一次竞赛活动．

“全国高中数学联赛”所涉及的知识范围不超出现行《全日制普通高级中学数学教学大纲》中所规定的教学内容和要求，在方法的要求上有所提高．主要考查学生对基本知识和基本技能的掌握情况，以及综合、灵活运用知识的能力．试卷包括 6 道选择题，6 道填空题和 3 道解答题．全卷满分 150 分．

“全国高中数学联赛加试”与国际数学奥林匹克接轨，在知识方面有所扩展；适当增加一些教学大纲之外的内容．试卷包括 3 道解答题，其中一道是平面几何题．全卷满分 150 分．

试卷复评工作于 2007 年 11 月 16 日至 19 日在天津进行，中国数学会普及工作委员会及天津数学会的负责人参加．经过复评确定了“2007 年全国高中数学联赛各赛区一等奖名单”，2007 年各地获得赛区一等奖的总人数为 1 141 名．根据教育部的规定，这些同学可以被保送进入大学．

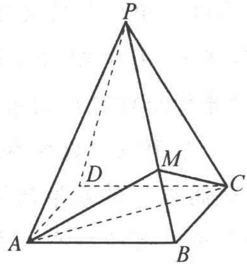
2007 年全国高中数学联赛的另一项任务是确定“2008 年中国数学奥林匹克(暨第 23 届全国中学生数学冬令营)”的营员，共有 181 名同学获得这一资格．

一、选择题(本题满分 36 分,每小题 6 分)

1 如图,在正四棱锥 $P-ABCD$ 中,$\angle APC=60°$,则二面角 $A-PB-C$ 的平面角的余弦值为(　　).

(A) $\frac{1}{7}$　　(B) $-\frac{1}{7}$　　(C) $\frac{1}{2}$　　(D) $-\frac{1}{2}$

解 如图,在侧面 PAB 内,作 $AM\perp PB$,垂足为 M. 连结 CM、AC,则 $\angle AMC$ 为二面角 $A-PB-C$ 的平面角.



不妨设 $AB=2$,则 $PA=AC=2\sqrt{2}$,斜高为$\sqrt{7}$,故 $2\times\sqrt{7}=AM\cdot 2\sqrt{2}$,由此得 $CM=AM=\sqrt{\frac{7}{2}}$.

在 $\triangle AMC$ 中,由余弦定理得

$$\cos\angle AMC=\frac{AM^2+CM^2-AC^2}{2\cdot AM\cdot CM}=-\frac{1}{7}.$$

故选 B.

2 设实数 a 使得不等式 $|2x-a|+|3x-2a|\geqslant a^2$ 对任意实数 x 恒成立,则满足条件的 a 所组成的集合是(　　).

(A) $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$　　(B) $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

(C) $\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right]$　　(D) $[-3,3]$

解 令 $x=\dfrac{2}{3}a$,则有 $|a|\leqslant\dfrac{1}{3}$,排除 B、D. 由对称性排除 C. 从而只有 A 正确. 故选 A.

一般地,对 $k\in\mathbf{R}$,令 $x=\dfrac{1}{2}ka$,则原不等式为

$$|a|\cdot|k-1|+\frac{3}{2}|a|\cdot\left|k-\frac{4}{3}\right|\geqslant|a|^2,$$

由此易知原不等式等价于 $|a|\leqslant|k-1|+\dfrac{3}{2}\left|k-\dfrac{4}{3}\right|$,对任意的 $k\in\mathbf{R}$ 成立. 由于

$$|k-1|+\frac{3}{2}\left|k-\frac{4}{3}\right|=\begin{cases}\dfrac{5}{2}k-3,\ k\geqslant\dfrac{4}{3},\\ 1-\dfrac{1}{2}k,\ 1\leqslant k<\dfrac{4}{3},\\ 3-\dfrac{5}{2}k,\ k<1,\end{cases}$$

所以,$\min\limits_{k\in\mathbf{R}}\left\{|k-1|+\dfrac{3}{2}\left|k-\dfrac{4}{3}\right|\right\}=\dfrac{1}{3}$,从而上述不等式等价于 $|a|\leqslant\dfrac{1}{3}$.

3 将号码分别为 1,2 ,…,9 的九个小球放入一个袋中,这些小球仅号码不同,其余完全相同. 甲从袋中摸出一个球,其号码为 a,放回后,乙从此袋中再摸出一个球,其号码为 b. 则使不等式 $a-2b+10>0$ 成立的事件发生的概率等于(　　).

(A) $\dfrac{52}{81}$　　(B) $\dfrac{59}{81}$　　(C) $\dfrac{60}{81}$　　(D) $\dfrac{61}{81}$

解 甲、乙二人每人摸出一个小球都有 9 种不同结果，故基本事件总数为 $9^2=81$ 个. 由不等式 $a-2b+10>0$ 得 $2b<a+10$.

于是，当 $b=1, 2, 3, 4, 5$ 时，每种情形 a 可取 $1, 2, \cdots, 9$ 中每一个值，使不等式成立，则共有 $9\times 5=45$ 种；

当 $b=6$ 时，a 可取 $3, 4, \cdots, 9$ 中每一个值，有 7 种；

当 $b=7$ 时，a 可取 $5, 6, 7, 8, 9$ 中每一个值，有 5 种；

当 $b=8$ 时，a 可取 $7, 8, 9$ 中每一个值，有 3 种；

当 $b=9$ 时，a 只能取 9，有 1 种.

于是，所求事件的概率为 $\dfrac{45+7+5+3+1}{81}=\dfrac{61}{81}$. 故选 D.

4 设函数 $f(x)=3\sin x+2\cos x+1$. 若实数 a、b、c 使得 $af(x)+bf(x-c)=1$ 对任意实数 x 恒成立，则 $\dfrac{b\cos c}{a}$ 的值等于（　　）.

(A) $-\dfrac{1}{2}$　　(B) $\dfrac{1}{2}$　　(C) -1　　(D) 1

解 令 $c=\pi$，则对任意的 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x)+f(x-c)=2$，于是取 $a=b=\dfrac{1}{2}$，$c=\pi$，则对任意的 $x\in\mathbf{R}$，有 $af(x)+bf(x-c)=1$，由此得 $\dfrac{b\cos c}{a}=-1$. 故选 C.

更一般地，由题设可得

$$f(x)=\sqrt{13}\sin(x+\varphi)+1,$$

$$f(x-c)=\sqrt{13}\sin(x+\varphi-c)+1,$$

其中 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ 且 $\tan\varphi=\frac{2}{3}$. 于是，$af(x)+bf(x-c)=1$ 可化为

$$\sqrt{13}a\sin(x+\varphi)+\sqrt{13}b\sin(x+\varphi-c)+a+b=1,$$

即

$$\begin{aligned}&\sqrt{13}a\sin(x+\varphi)+\sqrt{13}b\sin(x+\varphi)\cos c\\&\quad-\sqrt{13}b\cos(x+\varphi)\sin c+(a+b-1)=0,\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&\sqrt{13}(a+b\cos c)\sin(x+\varphi)-\sqrt{13}b\sin c\cos(x+\varphi)\\&\quad+(a+b-1)=0.\end{aligned}$$

由已知条件，上式对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，故必有

$$\begin{cases}a+b\cos c=0, & ①\\ b\sin c=0, & ②\\ a+b-1=0. & ③\end{cases}$$

若 $b=0$，则由 ① 知 $a=0$，显然不满足式 ③. 故 $b\neq0$. 所以，由 ② 知 $\sin c=0$，故 $c=2k\pi+\pi$ 或 $c=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

当 $c=2k\pi$ 时，$\cos c=1$ 则 ①、③ 两式矛盾. 故 $c=2k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$，$\cos c=-1$. 由 ①、③ 知 $a=b=\frac{1}{2}$，所以 $\frac{b\cos c}{a}=-1$.

5 设圆 O_1 和圆 O_2 是两个定圆，动圆 P 与这两个定圆都相切，则圆 P 的圆心轨迹不可能是(　　).

(A)　　(B)　　(C)　　(D)

解 设圆 O_1 和圆 O_2 的半径分别是 r_1、r_2，$|O_1O_2|=2c$，则一般地，圆 P 的圆心轨迹是焦点为 O_1、O_2，且离心率分别是 $\dfrac{2c}{r_1+r_2}$ 和 $\dfrac{2c}{|r_1-r_2|}$ 的圆锥曲线.（当 $r_1=r_2$ 时，O_1O_2 的中垂线是轨迹的一部分，当 $c=0$ 时，轨迹是两个同心圆.）

当 $r_1=r_2$ 且 $r_1+r_2<2c$ 时，圆 P 的圆心轨迹如选项 B；当 $0<2c<|r_1-r_2|$ 时，圆 P 的圆心轨迹如选项 C；当 $r_1\neq r_2$ 且 $r_1+r_2<2c$ 时，圆 P 的圆心轨迹如选项 D. 由于选项 A 中的椭圆和双曲线的焦点不重合，因而圆 P 的圆心轨迹不可能是选项 A. 故选 A.

6 已知 A 与 B 是集合 $\{1, 2, 3, \cdots, 100\}$ 的两个子集，满足：A 与 B 的元素个数相同，且 $A\cap B$ 为空集. 若 $n\in A$ 时总有 $2n+2\in B$，则集合 $A\cup B$ 的元素个数最多为（　　）.

(A) 62　　(B) 66　　(C) 68　　(D) 74

解 先证 $|A\cup B|\leqslant 66$，只须证 $|A|\leqslant 33$，为此只须证若 A 是 $\{1, 2, \cdots, 49\}$ 的任一个 34 元子集，则必存在 $n\in A$，使得 $2n+2\in A$. 证明如下：

将 $\{1, 2, \cdots, 49\}$ 分成如下 33 个集合：

$\{1, 4\}$，$\{3, 8\}$，$\{5, 12\}$，…，$\{23, 48\}$ 共 12 个；

$\{2, 6\}$，$\{10, 22\}$，$\{14, 30\}$，$\{18, 38\}$ 共 4 个；

$\{25\}$，$\{27\}$，$\{29\}$，…，$\{49\}$ 共 13 个；

$\{26\}$，$\{34\}$，$\{42\}$，$\{46\}$ 共 4 个.

由于 A 是 $\{1, 2, \cdots, 49\}$ 的 34 元子集，从而由抽屉原理可知上述 33 个集合中至少有一个 2 元集合中的数均属于 A，即存在 $n\in$

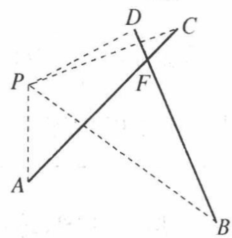
A,使得 $2n+2 \in A$.

如取 $A = \{1, 3, 5, \cdots, 23, 2, 10, 14, 18, 25, 27, 29, \cdots, 49, 26, 34, 42, 46\}$, $B = \{2n+2 \mid n \in A\}$,则 A、B 满足题设且 $|A \cup B| = 66$. 故选 B.

二、填空题(本题满分 54 分,每小题 9 分)

7 在平面直角坐标系内,有四个定点 $A(-3, 0)$, $B(1, -1)$, $C(0, 3)$, $D(-1, 3)$及一个动点 P,则 $|PA|+|PB|+|PC|+|PD|$的最小值为________.

解 如图,设 AC 与 BD 交于 F 点,则



$|PA|+|PC| \geqslant |AC| = |FA|+|FC|$,

$|PB|+|PD| \geqslant |BD| = |FB|+|FD|$,

因此,当动点 P 与 F 点重合时,$|PA|+|PB|+|PC|+|PD|$ 取到最小值 $|AC|+|BD| = 3\sqrt{2}+2\sqrt{5}$.

8 在$\triangle ABC$ 和$\triangle AEF$ 中,B 是 EF 的中点,$AB = EF = 1$, $BC = 6$, $CA = \sqrt{33}$,若$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AF} = 2$,则$\overrightarrow{EF}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的夹角的余弦值等于________.

解 因为 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AF} = 2$,所以,$\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}) + \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}) = 2$, 即

$$\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BF} = 2.$$

因为 $\overrightarrow{AB}^2=1$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=\sqrt{33}\times 1\times\dfrac{33+1-36}{2\times\sqrt{33}\times 1}=-1$，$\overrightarrow{BE}=-\overrightarrow{BF}$，所以

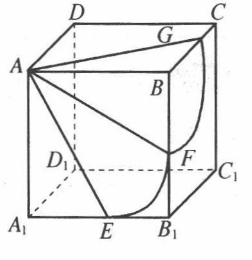
$$1+\overrightarrow{BF}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})-1=2,$$

即 $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{BC}=2$.

设$\overrightarrow{EF}$与$\overrightarrow{BC}$的夹角为 θ，则有 $|\overrightarrow{BF}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\cos\theta=2$，即 $3\cos\theta=2$，所以 $\cos\theta=\dfrac{2}{3}$.

9 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1. 以顶点 A 为球心，$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$为半径作一个球，则球面与正方体的表面相交所得到的曲线的长等于________.

解 如图，球面与正方体的六个面都相交，所得的交线分为两类：一类在顶点 A 所在的三个面上，即面 AA_1B_1B、面 $ABCD$ 和面 AA_1D_1D 上；另一类在不过顶点 A 的三个面上，即面 BB_1C_1C、面 CC_1D_1D 和面 $A_1B_1C_1D_1$ 上.



在面 AA_1B_1B 上，交线为$\overset{\frown}{EF}$且在过球心 A 的大圆上，因为 $AE=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，$AA_1=1$，则 $\angle A_1AE=\dfrac{\pi}{6}$. 同理，$\angle BAF=\dfrac{\pi}{6}$，所以 $\angle EAF=\dfrac{\pi}{6}$，故$\overset{\frown}{EF}$的长为$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{9}\pi$. 而这样的弧共有三条.

在面 BB_1C_1C 上，交线为$\overset{\frown}{FG}$且在距球心为 1 的平面与球面相交所得的小圆上，此时，小圆的圆心为 B，半径为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\angle FBG=\frac{\pi}{2}$.

所以，$\overset{\frown}{FG}$ 的长为$\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$. 这样的弧也有三条.

于是，所得的曲线长为 $3\times\frac{\sqrt{3}\pi}{9}+3\times\frac{\sqrt{3}\pi}{6}=\frac{5\sqrt{3}\pi}{6}$.

10 已知等差数列$\{a_n\}$的公差 d 不为 0，等比数列$\{b_n\}$的公比 q 是小于 1 的正有理数. 若 $a_1=d$，$b_1=d^2$，且$\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{b_1+b_2+b_3}$是正整数，则 q 等于________.

解 因为

$$\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{b_1+b_2+b_3}=\frac{a_1^2+(a_1+d)^2+(a_1+2d)^2}{b_1+b_1q+b_1q^2}=\frac{14}{1+q+q^2},$$

故由已知条件知道：$1+q+q^2$ 为$\frac{14}{m}$，其中 m 为正整数.

令 $1+q+q^2=\frac{14}{m}$，则

$$q=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{14}{m}-1}=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{56-3m}{4m}}.$$

由于 q 是小于 1 的正有理数，所以 $1<\frac{14}{m}<3$，即 $5\leqslant m\leqslant 13$ 且$\frac{56-3m}{4m}$是某个有理数的平方，由此可知 $q=\frac{1}{2}$.

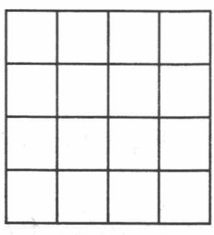
11 已知函数 $f(x)=\dfrac{\sin(\pi x)-\cos(\pi x)+2}{\sqrt{x}}\left(\dfrac{1}{4}\leqslant x\leqslant\dfrac{5}{4}\right)$，则 $f(x)$ 的最小值为________.

解 实际上，$f(x)=\dfrac{\sqrt{2}\sin\left(\pi x-\dfrac{\pi}{4}\right)+2}{\sqrt{x}}\left(\dfrac{1}{4}\leqslant x\leqslant\dfrac{5}{4}\right)$. 设 $g(x)=\sqrt{2}\sin\left(\pi x-\dfrac{\pi}{4}\right)\left(\dfrac{1}{4}\leqslant x\leqslant\dfrac{5}{4}\right)$，则 $g(x)\geqslant 0$，$g(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4}\right]$上是增函数，在$\left[\dfrac{3}{4},\dfrac{5}{4}\right]$上是减函数，且 $y=g(x)$ 的图像关于直线 $x=\dfrac{3}{4}$ 对称，则对任意 $x_1\in\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4}\right]$，存在 $x_2\in\left[\dfrac{3}{4},\dfrac{5}{4}\right]$，使 $g(x_2)=g(x_1)$. 于是

$$f(x_1)=\frac{g(x_1)+2}{\sqrt{x_1}}=\frac{g(x_2)+2}{\sqrt{x_1}}\geqslant\frac{g(x_2)+2}{\sqrt{x_2}}=f(x_2).$$

而 $f(x)$在$\left[\dfrac{3}{4},\dfrac{5}{4}\right]$上是减函数，所以，$f(x)\geqslant f\left(\dfrac{5}{4}\right)=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$，即 $f(x)$在$\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{5}{4}\right]$上的最小值是$\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$.

12 将 2 个 a 和 2 个 b 共 4 个字母填在如图所示的 16 个小方格内，每个小方格内至多填 1 个字母，若使相同字母既不同行也不同列，则不同的填法共有________种.（用数字作答）



解 使 2 个 a 既不同行也不同列的填法有 $C_4^2A_4^2=72$ 种，同样，使 2 个 b 既不同行也不同列的填法也有 $C_4^2A_4^2=72$ 种，故由乘法原理，这样的填法共有 72^2 种，其中不符合要求的有两种情况：2 个 a 所在的方格内都填有 b 的情况有 72 种；2 个 a 所在的方格内仅有 1 个方格内填有 b 的情况有 $C_{16}^1A_9^2=16\times72$ 种. 所以，符合题设条件的填法共有 $72^2-72-16\times72=3\,960$ 种.

三、解答题(本题满分 60 分，每小题 20 分)

13 设 $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(n+1-k)}$，求证：当正整数 $n\geqslant2$ 时，$a_{n+1}<a_n$.

证明 由于 $\dfrac{1}{k(n+1-k)}=\dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{n+1-k}\right)$，因此 $a_n=\dfrac{2}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$.

于是，对任意的正整数 $n\geqslant2$，有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(a_n-a_{n+1})&=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{n+2}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\\&=\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\&=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-1\right)>0,\end{aligned}$$

即 $a_{n+1}<a_n$.

14 已知过点(0, 1)的直线 l 与曲线 C：$y=x+\dfrac{1}{x}(x>0)$ 交于两个不同点 M 和 N. 求曲线 C 在点 M、N 处的切线的交点轨迹.