概率论与数理统计

——典型问题及分析

GAILÜLUN YU SHULI TONGJI

李伯忍　张忠志　刘群锋　编

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

概率论与数理统计
——典型问题及分析

李伯忍　张忠志　刘群锋　编

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内容简介

本书是《概率论与数理统计》(张忠志等编)一书的配套学习参考书,全书共7章.主要内容有随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机向量、随机变量的数字特征、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验.每章由本章知识要点、典型例题讲解、习题解答三部分组成.

本书可作为高等学校理工类(非数学专业)以及经管类各专业的概率论与数理统计课程的教学参考书,也可供相关专业技术人员参考.

图书在版编目(C I P)数据

概率论与数理统计：典型问题及分析/李伯忍，张忠志，刘群锋编. --天津:天津大学出版社，2011.2
ISBN 978-7-5618-3846-4

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①李… ②张… ③刘… Ⅲ. ①概率论－高等学校－教学参考资料②数理统计－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第014599号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨欢
地　　址 天津市卫津路92号天津大学内(邮编:300072)
电　　话 发行部:022-27403647　邮购部:022-27402742
网　　址 www.tjup.com
印　　刷 昌黎太阳红彩色印刷有限责任公司
经　　销 全国各地新华书店
开　　本 185mm×260mm
印　　张 7
字　　数 180千
版　　次 2011年2月第1版
印　　次 2011年2月第1次
定　　价 18.00元

前　　言

概率论与数理统计是高等学校理工、经济和管理类各专业的必修课程. 其本身理论性强,应用性强,处理问题的思想方法独特. 为帮助学生正确理解概率论与数理统计的基本概念、基本理论和方法,我们编写了《概率论与数理统计——典型问题及分析》.

全书共7章,主要内容有随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机向量、随机变量的数字特征、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验. 每章由本章知识要点、典型例题讲解和习题解答三部分组成. 知识要点部分是要求学生必须掌握的基本知识,体现了学习概率统计的基本要求;典型例题讲解部分则是对课程的重点内容,或是难点内容进行分析、综合和归纳,使学生正确掌握概率统计的基本理论与方法. 习题解答部分给出了教材中所有习题的解答,以此提高学生解决问题的能力.

本书在编写过程中参阅了许多书籍和文献,在此向这些作者表示诚挚的感谢! 由于时间仓促,编者水平有限,不当之处在所难免,恳请读者不吝指正!

编　者

2010年10月

目　　录

第1章　随机事件及其概率

1.1　本章知识要点

一、随机试验和随机事件

1. 随机试验

概率论中所研究的随机试验通常用 E 表示，且具有下列三个特点：

(1)可以在相同的条件下重复进行；

(2)每次试验的结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

(3)进行一次试验之前不能预知哪一个结果会出现.

2. 样本空间

随机试验 E 的所有可能的结果组成的集合称为 E 的样本空间，常记为 S. 样本空间的元素，即随机试验 E 的每个结果，称为样本点.

3. 随机事件

样本空间 S 的子集为 E 的随机事件，简称事件. 在每次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，称这一事件发生. 随机事件一般用大写的字母 A,B,C,D 等来表示.

4. 基本事件

由一个样本点组成的单点集，称为基本事件.

5. 必然事件

样本空间 S 包含所有的样本点，它是它自身的子集，它在每次试验中总是发生的，称为必然事件.

6. 不可能事件

空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，它是样本空间 S 的子集，但在每次试验中都不发生，称为不可能事件.

二、事件间的关系及运算

1. 事件间的关系

事件间的关系及运算共有7种，事件是一个集合，因此事件间的关系和运算自然按集合论中集合间的关系与集合运算来处理. 下面给出这些运算在概率论中的含义. 设随机试验 E 的样本空间为 S，而 A,B 是 S 的子集.

(1)若 $A\subset B$，则称事件 B 包含事件 A，即事件 A 发生必然导致事件 B 发生.

(2)若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，即 $A=B$，则称事件 A 与事件 B 相等.

(3)事件 $A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$，称为事件 A 与事件 B 的和事件. 当且仅当事件 A,B 中至少有一个发生时，和事件 $A\cup B$ 发生.

(4) 事件 $A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$，称为事件 A 与事件 B 的积事件. 当且仅当事件 A,B 都发生时，积事件 $A\cap B$ 发生. $A\cap B$ 通常记为 AB.

特别地，对于有限个或可列个事件的和事件与积事件可以类似地定义，请大家自己给出相应的定义.

(5) 事件 $B-A=\{x\mid x\in B$ 且 $x\notin A\}$，称为事件 B 与事件 A 的差事件. 当且仅当事件 B 发生且事件 A 不发生时，差事件 $B-A$ 发生.

(6) 若 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 是互不相容的，或互斥的. 即事件 A 与事件 B 不能同时发生.

(7) 若 $A\cup B=S$ 且 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互为对立事件，又称事件 A 与事件 B 为互逆事件. 即对每次试验而言，事件 A,B 中必有一个发生，且仅有一个发生. A 的对立事件常记为 $\overline{A}$.

以上这 7 种关系如图 1-1 ~ 1-6 所示.

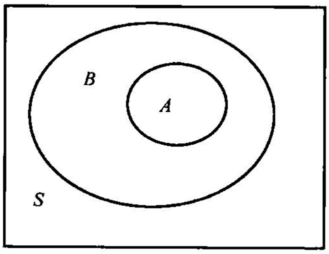

图 1-1　$A\subset B$

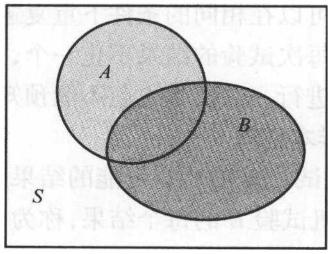

图 1-2　$A\cup B$

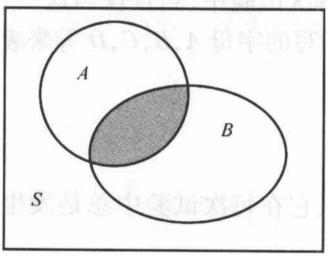

图 1-3　$A\cap B$

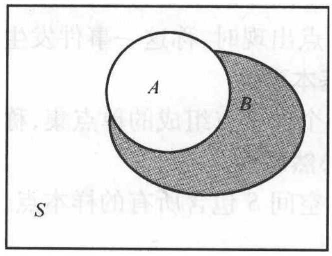

图 1-4　$B-A$

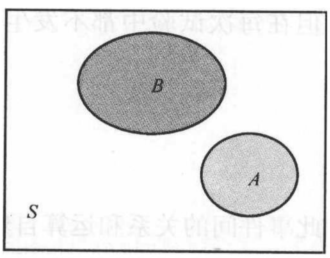

图 1-5　$A\cap B=\varnothing$

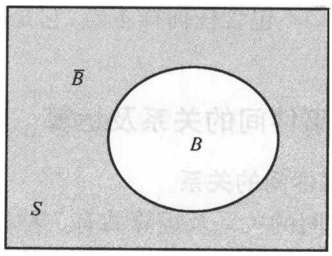

图 1-6　$B\cup\overline{B}=S, B\cap\overline{B}=\varnothing$

2. 事件运算公式

在进行事件的运算时，经常要用到下述定理（设 A,B,C 为事件）.

交换律：$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$.

结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C; A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

德摩根律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

德摩根律可以推广到有限个事件，请大家自己给出.

三、事件的概率及其性质

1. 概率的公理化定义

设 E 是随机试验，S 是它的样本空间. 对于 E 的每一个事件 A 赋予一个实数，记为 $P(A)$，称为事件 A 的概率，如果它满足下列条件：

(1)（非负性）对于任意事件 A，有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(2)（规范性）对于必然事件 S，有 $P(S)=1$；

(3)（可列可加性）设事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 两两互不相容，即 $A_iA_j=\varnothing$，$i\neq j(i,j=1,2,\cdots)$，有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)\cdots.$$

2. 概率的古典定义

古典概率模型具有以下两个特点：

(1)试验的样本空间只包含有限个样本点；

(2)试验中每个基本事件发生的可能性相同.

设古典概型的样本空间 S 由 n 个基本事件组成，而事件 $A(A\subset S)$ 包含 k 个基本事件，则事件 A 的概率定义为

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 中包含基本事件的个数}}{S\text{ 中基本事件总数}}.$$

3. 概率的性质

(1)对于不可能事件$\varnothing$，$P(\varnothing)=0$；对于任一事件 A，$0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

(2)求逆公式：$P(\overline{A})=1-P(A)$.

(3)减法公式：$P(B-A)=P(B)-P(AB)$，特别地，若 $A\subset B$，则有

$$P(B-A)=P(B)-P(A),$$

从而有 $P(B)\geqslant P(A)$.

(4)加法公式：$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

性质(4)容易推广到 n 个事件的情形，这里给出三个事件 A_1,A_2,A_3 的加法公式，

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup A_3)=&P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-\\&P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3).\end{aligned}$$

四、条件概率

1. 条件概率的定义

设 A,B 是两个事件，且 $P(B)>0$，称

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

为事件 B 发生的条件下事件 A 发生的条件概率.

2. 乘法公式

设 $P(A)>0$,则有

$$P(AB)=P(A)P(B|A),$$

一般地,若 $P(A_1A_2\cdots A_n)>0$,则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

3. 划分的定义

设 S 为随机试验 E 的样本空间,$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是 E 的一组事件,若

(1)$B_iB_j=\varnothing(i\neq j),i,j=1,2,\cdots,n$;

(2)$\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i=S$,

则称 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为一个完备事件组或 S 的一个划分.

4. 全概率公式

若 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为一个完备事件组,且 $P(B_i)>0,i=1,2,\cdots,n$,则对任意事件 A,有

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i).$$

5. 贝叶斯(Bayes)公式

若 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为一个完备事件组,且 $P(B_i)>0,i=1,2,\cdots,n,A$ 是一个事件,$P(A)>0$,则有

$$P(B_k\mid A)=\frac{P(B_k)P(A\mid B_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)},\quad k=1,2,\cdots,n.$$

五、事件的独立性

1. 事件独立的定义

(1)设 A,B 是两个事件,如果满足等式 $P(AB)=P(A)P(B)$,则称事件 A 与 B 相互独立.

(2)设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 $n(n\geqslant2)$ 个事件,如果其中任意两个事件相互独立,即满足

$$P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j)\quad(1\leqslant i<j\leqslant n),$$

则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两独立.

(3)设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 $n(n\geqslant2)$ 个事件,如果其中任意 $k(2\leqslant k\leqslant n)$ 个事件均满足

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})\quad(1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n),$$

则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

2. 独立事件的性质

(1)若 A 与 B 相互独立,且 $P(A)>0$,则 $P(B|A)=P(B)$,反之亦然.

(2)若 A 与 B 相互独立,则 $\overline{A}$ 与 B,A 与 $\overline{B},\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立.

(3)若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立,则其中任意 $k(2\leqslant k\leqslant n)$ 个事件也相互独立.

(4)若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立,则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=\prod_{i=1}^{n}P(A_i),$$

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=1-\prod_{i=1}^{n}P(\overline{A}_i).$$

1.2 典型例题讲解

例1 掷两枚骰子,设事件 $A=\{$点数之和等于5$\}$,求 $P(A)$. 有一位同学是这样求解的:因试验可能的结果只有两个,一个是点数之和等于5,另一个是点数之和不等于5,而事件 A 只含其中的一种,因此 $P(A)=1/2$. 这种解法正确吗?

解 这种解法不正确,究其原因是对样本空间进行了不正确的划分,这种分割导致了样本空间的两个部分不是等可能的. 事件 $\overline{A}$ 是指"点数之和不等于5",若用二维数组 (i,j) 表示样本点,则样本空间

$$S=\{(i,j)\mid i,j=1,2,\cdots,6\},$$

共含有36个样本点,每个样本点发生的可能性相等. 而事件

$$A=\{(1,4),(2,3),(4,1),(3,2)\},$$

事件 $\overline{A}$ 含有32个样本点,有

$$P(A)=4/36=1/9,\quad P(\overline{A})=32/36=8/9.$$

事实说明了 A 与 $\overline{A}$ 不是等可能的. 正确的结果是 $P(A)=1/9$. 在古典概型的概率计算中,应把握好等可能性这一特点.

例2 概率为0的事件是否必定为不可能事件?

解 不可能事件的概率为0,反之不然. 例如,今向 $(0,1)$ 区间随机投点,事件 A 为"落点恰好在0.5处",显然事件 $A\neq\varnothing$,但 $P(A)=0$.

例3 100件外形完全相同的产品,其中40件为一等品,60件为二等品. 设 A 表示"从100件产品中任取一件,连续抽取3次,所得3件均为一等品". 试求下列两种情况下事件 A 发生的概率.

(1)每次取出一件,经测试后放回,再继续取下一件(有放回抽样);

(2)每次取出一件,经测试后不放回,在余下的产品中继续取下一件(无放回抽样).

解 (1)有放回抽样的每次抽取都是在相同的条件下进行,这是一个重复排列问题,故随机试验的基本事件总数 $n=100^3$. 事件 A 要求所抽取的3次均是一等品,故事件 A 所包含的基本事件数 $k=40^3$. 依概率的古典定义,有

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{40^3}{100^3}=0.064.$$

(2)无放回抽样的第一件是在100件中抽取的,第二件是在余下的99件中抽取的,第三件是在余下的98件中抽取的,基本事件总数 $n=\mathrm{P}_{100}^3$,事件 A 包含的基本事件数则是在40件一等品中任取3件的排列数,故事件 A 所包含的基本事件数 $k=\mathrm{P}_{40}^3$. 依概率的古典定义,有

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{\mathrm{P}_{40}^3}{\mathrm{P}_{100}^3}=0.061.$$

注:此例是产品的随机抽样问题(即摸球问题),它与后面的分球问题(即分房问题)和随机取数问题是古典概型的三大典型问题,掌握典型问题的解法有助于举一反三,触类旁通,提高解题的能力.

例4 设有 n 个人,每个人等可能地分配到 N 个房间中的一个房间去住 $(n\leqslant N)$,求下

列事件的概率：

(1)指定的 n 间房间里各有一个人住；

(2)恰有 n 间房各有一人；

(3)某一指定的房间恰有 m 个人($m\leqslant n$).

解 样本空间 S 包含的基本事件总数为 N^n(每一个人分配到 N 间房中去都有 N 种方法，这里没有限制每间房住多少人). A 表示"指定的 n 间房间里各有一个人住"；B 表示"恰有 n 间房各有一人"；C 表示"某一指定的房间恰有 m 个人".

(1) n 个人要分配到指定的 n 间房中去，使每间房各有一人. 第一个人有 n 种住法，第二个人有 $n-1$ 种住法，……，最后一间第 n 个人住，所以共有 $n!$ 种住法，即事件 A 包含 $n!$ 个基本事件，则

$$P(A)=\frac{n!}{N^n}.$$

(2) n 个人要分配到 n 间房中去，并且每间房只有一人，有 $n!$ 种分法，而 n 间房可以从 N 间房中任意选取，有 C_N^n 种方法，则

$$P(B)=\frac{\mathrm{C}_N^n\cdot n!}{N^n}.$$

(3)首先从 n 个人中任选 m 个人分配到指定的某一房间中去，有 C_n^m 种选法. 再把剩下的 $n-m$ 个人分配到 $N-1$ 个房间中去的分法有 $(N-1)^{n-m}$ 种. 则

$$P(C)=\frac{\mathrm{C}_n^m\cdot(N-1)^{n-m}}{N^n}.$$

注：这是分房问题，在这类问题中，人与房子都是有其特性的. 处理实际问题时，要弄清楚什么是"人"，什么是"房"，不可颠倒. 常遇见的分房问题，有 n 个人的生日问题，n 封信装入 n 个信封问题(配对问题). 分房问题有时也叫球在盒中分布问题(把人看成球，把房看成盒子). 这类问题在现代统计学中有重要的应用.

例 5 在 $0,1,2,\cdots,9$ 中依次取出 4 个数排列在一起，能组成 4 位偶数的概率为多少？

解 设样本空间 $S=\{abcd\mid 0\leqslant a,b,c,d\leqslant 9\}$，$a,b,c,d$ 互不相等，则 S 包含的基本事件总数 $n=\mathrm{P}_{10}^4=5\ 040$. 构成 4 位偶数的个数为

$$\mathrm{P}_9^3\mathrm{C}_5^1-\mathrm{P}_8^2\mathrm{C}_4^1=2\ 520-224=2\ 296,$$

从而所求概率为

$$p=\frac{2\ 296}{5\ 040}=0.46.$$

注：这是随机取数问题. 4 位偶数的构成可以这样来考虑，在个位上任取一个偶数，则有 C_5^1 种取法，而千、百、十位上由剩下的 9 个数中任取 3 个排列，共有 P_9^3 种排法，但当 0 在千位上时不能构成 4 位数，因此要去掉 0 在千位上的偶数数目，共 $\mathrm{P}_8^2\mathrm{C}_4^1$ 种.

例 6 设考生的报名表来自 3 个地区，各有 10 份、15 份、25 份，其中女生的分别为 3 份、7 份、5 份，随机地从一地区先后任取两份报名表. 试求：

(1)先取到的一份报名表是女生的概率 p；

(2)已知后取到的一份报名表是男生的，而先取到的一份是女生的概率 q.

解 用 $B_i(i=1,2,3)$ 表示"报名表来自第 i 个地区"，则 $P(B_i)=1/3$，$A_k(k=1,2)$ 表示

"第 k 次取到的报名表是女生的",则

$$P(A_1|B_1)=\frac{3}{10},\quad P(A_1|B_2)=\frac{7}{15},\quad P(A_1|B_3)=\frac{5}{25}.$$

(1)由全概率公式可得

$$p=P(A_1)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A_1\mid B_i)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{10}+\frac{1}{3}\times\frac{7}{15}+\frac{1}{3}\times\frac{5}{25}=\frac{29}{90}.$$

(2)报名表来自第 1 个地区,先取到一份女生报名表,后取到一份男生报名表的概率为

$$P(A_1\bar{A}_2|B_1)=\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}=\frac{7}{30},$$

类似地可以计算出

$$P(A_1\bar{A}_2|B_2)=\frac{7}{15}\times\frac{8}{14}=\frac{4}{15},\quad P(A_1\bar{A}_2|B_3)=\frac{5}{25}\times\frac{20}{24}=\frac{1}{6},$$

利用全概率公式可得到不同地区后取到的一份报名表是男生的概率为

$$P(\bar{A}_2|B_1)=\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}+\frac{7}{10}\times\frac{6}{9}=\frac{7}{10},\quad P(\bar{A}_2|B_2)=\frac{8}{15},\quad P(\bar{A}_2|B_3)=\frac{20}{25},$$

再由全概率公式与条件概率公式可得

$$q=P(A_1|\bar{A}_2)=\frac{P(A_1\bar{A}_2)}{P(\bar{A}_2)}=\frac{\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A_1\bar{A}_2\mid B_i)}{\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(\bar{A}_2\mid B_i)}=\frac{\frac{1}{3}\times\left(\frac{7}{30}+\frac{8}{30}+\frac{1}{6}\right)}{\frac{1}{3}\times\left(\frac{7}{10}+\frac{8}{15}+\frac{20}{25}\right)}=\frac{20}{61}.$$

例 7 证明:若 $P(B|A)=P(B|\bar{A})$,则 A 与 B 独立.

证明 由定义知

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)},\quad P(B|\bar{A})=\frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)},$$

则

$$\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)},$$

即

$$P(AB)(1-P(A))=(P(B)-P(AB))P(A).$$

由此得

$$P(AB)=P(A)P(B),$$

即 A 与 B 独立.

例 8 证明:若 $P(A)=0$ 或 $P(A)=1$,则事件 A 与任一事件独立.

证明 设 B 是任意的事件. 若 $P(A)=0$,由 $AB\subseteq A$ 可推得

$$P(AB)\leqslant P(A)=0,$$

于是

$$P(A)P(B)=0=P(AB),$$

即 A 与 B 独立.

若 $P(A)=1$,A 为必然事件,由 $AB=B$ 可推得

$$P(AB)=P(B)=P(A)\cdot P(B),$$

即 A 与 B 独立.

注:必然事件 S 和不可能事件$\varnothing$与任一事件相互独立.

例 9 证明:若 $P(A)>0,P(B)>0$,则命题"A 与 B 独立"与命题"A 与 B 互不相容"不能同时成立.

证明 若上述两个命题同时成立,则有

(1)$P(AB)=P(A)P(B)$;

(2)$AB=\varnothing$.

于是由(2)有 $P(AB)=0$,即 $P(A)P(B)=0$,因此 $P(A)$ 与 $P(B)$ 中至少有一个等于 0,这与条件矛盾. 证毕.

注:由上述结论知:若 $P(A)>0,P(B)>0$,则命题"A 与 B 独立"与命题"A 与 B 互不相容"不能同时成立.

例 10 三个事件 A,B,C 相互独立与 A,B,C 两两独立有何联系?

解 三个事件 A,B,C 相互独立,则事件 A,B,C 满足:

$$P(AB)=P(A)P(B),$$
$$P(AC)=P(A)P(C),$$
$$P(BC)=P(B)P(C),$$
$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C).$$

若去掉最后一个等式 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$,则三个事件 A,B,C 两两独立. 可知若 A,B,C 相互独立,则 A,B,C 两两独立. 反之不然.

1.3 习题解答

1. 写出下列随机试验的样本空间:

(1)连续投掷一颗骰子直至 6 个结果中有一个结果出现两次,记录投掷的次数;

(2)连续投掷一颗骰子直至 6 个结果中有一个结果连续出现两次,记录投掷的次数;

(3)连续投掷一枚硬币直到出现正面,观察正面反面出现的情况;

(4)抛一枚硬币,若出现正面 H 则再抛一次;若出现反面 T,则再抛一颗骰子,观察出现的各种结果.

解 (1)$S=\{2,3,4,5,6,7\}$;

(2)$S=\{2,3,4,\cdots\}$;

(3)$S=\{H,TH,TTH,TTTH,\cdots\}$;

(4)$S=\{HH,HT,T1,T2,T3,T4,T5,T6\}$.

2. 设 A,B,C 是随机试验 E 的三个事件,试用 A,B,C 表示下列事件:

(1)仅 A 发生;

(2)A,B,C 中至少有两个发生;

(3)A,B,C 中不多于两个发生;

(4)A,B,C 恰有两个发生;

(5)A,B,C 中至多有一个发生.

解 (1)$A\overline{B}\,\overline{C}$;

(2) $AB\cup AC\cup BC$ 或 $ABC\cup AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC$;

(3) $\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}$ 或 $AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC\cup A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}\bar{C}$;

(4) $AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC$;

(5) $\bar{A}\bar{B}\cup\bar{A}\bar{C}\cup\bar{B}\bar{C}$或$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\cup A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$.

3. 设 A,B 是两个事件,已知 $P(A)=1/4,P(B)=1/2,P(AB)=1/8$,求 $P(A\cup B)$,$P(\bar{A}B)$,$P(\overline{AB})$,$P[(A\cup B)(\overline{AB})]$.

解 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.625$,

$P(\bar{A}B)=P[(S-A)B]=P(B)-P(AB)=0.375$,

$P(\overline{AB})=1-P(AB)=0.875$,

$$
\begin{aligned}
P[(A\cup B)(\overline{AB})]&=P[(A\cup B)(S-AB)]\\
&=P(A\cup B)-P[(A\cup B)(AB)]=0.625-P(AB)=0.5.
\end{aligned}
$$

4. 17 世纪的意大利赌徒认为:三颗骰子抛出的点数之和为 9 的概率与为 10 的概率是相同的,你的看法如何?

解 三颗骰子抛出的点数之和为 9 的情形有:

(126),(135),(144),(153),(162),

(216),(225),(234),(243),(252),(261),

(315),(324),(333),(342),(351),

(414),(423),(432),(441),

(513),(522),(531),

(612),(621).

共 25 种情形,又知每颗骰子都可能出现 6 点当中的任意一点,按照乘法原理共有 $C_6^1\times C_6^1\times C_6^1=216$ 种情形.

由古典概率模型可知:三颗骰子抛出的点数之和为 9 的概率为 25/216.

类似地可知:三颗骰子抛出的点数之和为 10 的概率为 27/216.

5. 在 11 张卡片上分别写上 engineering 这 11 个字母,从中任意连抽 6 张,求依次排列结果为 ginger 的概率.

解 根据题意,这 11 个字母中共有 2 个 g,2 个 i,3 个 n,3 个 e,1 个 r. 从中任意连抽 6 张,由独立性,第一次必须从这 11 张中抽出 2 个 g 中的任意一张来,概率为 2/11;第二次必须从剩余的 10 张中抽出 2 个 i 中的任意一张来,概率为 2/10;类似地,可以得到 6 次抽取的概率. 最后要求的概率为

$$\frac{2}{11}\times\frac{2}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{1}{8}\times\frac{3}{7}\times\frac{1}{6}=\frac{36}{332\,640}=\frac{1}{9\,240},$$

或者

$$\frac{C_2^1C_2^1C_3^1C_1^1C_3^1C_1^1}{P_{11}^6}=\frac{1}{9\,240}.$$

6. 袋中有 5 只白球,4 只红球,3 只黑球,在其中任取 4 只,求下列事件的概率:

(1) 4 只球中恰有两只白球,1 只红球,1 只黑球;

(2) 4 只球中至少有 2 只红球;

(3) 4 只球中没有白球.

解 (1)所求概率为

$$\frac{C_5^2C_4^1C_3^1}{C_{12}^4}=\frac{8}{33};$$

(2)所求概率为

$$\frac{C_4^2C_8^2+C_4^3C_8^1+C_4^4}{C_{12}^4}=\frac{201}{495}=\frac{67}{165};$$

(3)所求概率为

$$\frac{C_7^4}{C_{12}^4}=\frac{35}{495}=\frac{7}{99}.$$

7. 设A,B是两个事件,已知$P(A)=0.6,P(B)=0.7$.

(1)在什么条件下$P(AB)$取到最大值,最大值是多少?

(2)在什么条件下$P(A\cup B)$取到最小值,最小值是多少?

解 (1)由

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$$

可知,$P(A\cup B)$最小时,$P(AB)$取到最大值,即当$A\subset B$时,

$$P(A\cup B)=P(B)=0.7,$$

$P(AB)$取到的最大值为0.6;

(2)由

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

可知,$P(AB)$最大时,$P(A\cup B)$取到最小值,即当$A\subset B$时,

$$P(AB)=P(A)=0.6,$$

$P(A\cup B)$取到的最小值为0.7.

8. 设$P(A)=0.5,P(B)=0.3,P(AB)=0.1$,求$P(A|B),P(B|A),P(A|A\cup B)$,$P(AB|A\cup B),P(A|AB)$.

解 由题意可得

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.7,$$

所以

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0.1}{0.3}=\frac{1}{3},\quad P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.1}{0.5}=\frac{1}{5},$$

$$P(A|A\cup B)=\frac{P[A(A\cup B)]}{P(A\cup B)}=\frac{P(A)}{P(A\cup B)}=\frac{5}{7},$$

$$P(AB|A\cup B)=\frac{P[AB(A\cup B)]}{P(A\cup B)}=\frac{P(AB)}{P(A\cup B)}=\frac{1}{7},$$

$$P(A|AB)=\frac{P[A(AB)]}{P(AB)}=\frac{P(AB)}{P(AB)}=1.$$

9. 袋中有6只白球,5只红球,每次在袋中任取一只球.若取到白球,放回,并放入一只白球;若取到红球,不放回也不再放入另外的球,连续取球四次,求第一、二次取到白球且第三、四次取到红球的概率.

解 设$A_i(i=1,2,3,4)$表示"第i次取到白球"这一事件,而取到红球可以用它的对立事件来表示.那么第一、二次取到白球且第三、四次取到红球可以表示为$A_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4$,它的概

率为(根据乘法公式)

$$P(A_1A_2\bar{A}_3\bar{A}_4)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(\bar{A}_3|A_1A_2)P(\bar{A}_4|A_1A_2\bar{A}_3)$$
$$=\frac{6}{11}\times\frac{7}{12}\times\frac{5}{13}\times\frac{4}{12}=\frac{840}{20\ 592}=0.040\ 8.$$

10. 一只盒子装有2只红球,2只白球,在盒中取球两次,每次任取一只,作不放回抽样.已知得到的两只球中至少有一只是红球,求另一只也是红球的概率.

解 设"得到的两只球中至少有一只是红球"记为事件 A,"另一只也是红球"记为事件 B. 则事件 A 的概率为

$$P(A)=2\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{6}\quad(\text{先红后白,先白后红,先红后红}),$$

所求概率为

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}}{\frac{5}{6}}=\frac{1}{5}.$$

11. 一位医生根据以往的资料得到下面的信息,他的病人中有5%的人以为自己患癌症,且确实患癌症;有45%的人以为自己患癌症,但实际上未患癌症;有10%的人以为自己未患癌症,但确实患有癌症;最后有40%的人以为自己未患癌症,且确实未患癌症. 以 A 表示事件"一位病人以为自己患癌症",以 B 表示事件"病人确实患有癌症",求下列概率.

(1)$P(A)$,$P(B)$;(2)$P(B|A)$;(3);$P(B|\bar{A})$;

(4)$P(A|\bar{B})$;(5)$P(A|B)$.

解 (1)根据题意可得

$$P(A)=P(AB)+P(A\bar{B})=5\%+45\%=0.5,$$
$$P(B)=P(BA)+P(B\bar{A})=5\%+10\%=0.15;$$

(2)根据条件概率公式得

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{5\%}{50\%}=0.1;$$

(3)$P(B|\bar{A})=\dfrac{P(B\bar{A})}{P(\bar{A})}=\dfrac{10\%}{1-50\%}=0.2$;

(4)$P(A|\bar{B})=\dfrac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}=\dfrac{45\%}{1-15\%}=\dfrac{9}{17}$;

(5)$P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{5\%}{15\%}=\dfrac{1}{3}$.

12. 据统计,对于某一种疾病的两种症状:症状 A、症状 B,有20%的人只有症状 A,有30%的人只有症状 B,有10%的人两种症状都有,其他的人两种症状都没有. 在患这种疾病的人群中随机地选一人,求:

(1)该人这两种症状都没有的概率;

(2)该人至少有一种症状的概率;

(3)已知该人有症状 B,求该人有两种症状的概率.

解 (1)根据题意,该人两种症状都没有的概率为 $1-20\%-30\%-10\%=0.4$;

(2)该人至少有一种症状的概率为 $1-40\%=0.6$;

(3)已知该人有症状 B,表明该人属于只有症状 B 的 30% 人群或者两种症状都有的 10% 人群,总的概率为 $30\%+10\%=40\%$,所以在已知该人有症状 B 的条件下,该人有两种症状的概率为$\frac{10\%}{30\%+10\%}=\frac{1}{4}$.

13. 某工厂向三家出租车公司(A,B 和 C)租用汽车,20% 的汽车来自 A 公司,20% 的汽车来自 B 公司,60% 的汽车来自 C 公司,而这三家出租车公司在运输中发生故障的概率依次为 0.10,0.12 和 0.04.

(1)该工厂租用汽车中发生故障的概率是多少?

(2)若该工厂租用的汽车发生故障,问该汽车来自 C 公司的概率是多少?

解 设"工厂租用汽车中发生故障"记为事件 M,"工厂向三家出租车公司(A,B 和 C)租用汽车"分别记为事件 N_1,N_2,N_3.

(1)由全概率公式,有

$$P(M)=\sum_{i=1}^{3}P(N_i)P(M\mid N_i)=0.2\times0.1+0.2\times0.12+0.6\times0.04=0.068;$$

(2)根据贝叶斯公式,若该工厂租用的汽车发生故障,则该汽车来自 C 公司的概率是

$$P(N_3\mid M)=\frac{P(N_3)P(M\mid N_3)}{P(M)}=\frac{0.6\times0.04}{0.068}=\frac{6}{17}.$$

14. 一种用来检验 50 岁以上的人是否患有关节炎的检验法,对于确实患有关节炎的病人有 85% 给出了正确的结果;而对于已知没有患关节炎的人有 4% 会认为他患关节炎. 已知人群中有 10% 的人患有关节炎. 问:一名检验者经检验认为他没有患关节炎,而他却患有关节炎的概率.

解 设"一名被检验者经检验认为患有关节炎"记为事件 A,"一名被检验者确实患有关节炎"记为事件 B. 根据全概率公式有

$$P(A)=P(B)P(A\mid B)+P(\overline{B})P(A\mid\overline{B})=10\%\times85\%+90\%\times4\%=12.1\%,$$

所以,根据条件概率得到所要求的概率为

$$P(B\mid\overline{A})=\frac{P(B\overline{A})}{P(\overline{A})}=\frac{P(B)P(\overline{A}\mid B)}{1-P(A)}=\frac{10\%(1-85\%)}{1-12.1\%}=1.706\%,$$

即一名被检验者经检验认为没有关节炎而实际却有关节炎的概率为 1.706%.

15. 计算机中心有三台打字机 A,B,C,程序交与各台打字机打字的概率依次为 0.6,0.3 和 0.1,打字机发生故障的概率依次为 0.01,0.05,0.04. 一个程序因打字机故障而发生破坏,求该程序是在 A,B,C 上打字的概率分别是多少?

解 设"程序因打字机发生故障而被破坏"记为事件 M,"程序在 A,B,C 三台打字机上打字"分别记为事件 N_1,N_2,N_3. 则根据全概率公式有

$$P(M)=\sum_{i=1}^{3}P(N_i)P(M\mid N_i)=0.6\times0.01+0.3\times0.05+0.1\times0.04=0.025,$$

根据贝叶斯公式,该程序是在 A,B,C 上打字的概率分别为

$$P(N_1\mid M)=\frac{P(N_1)P(M\mid N_1)}{P(M)}=\frac{0.6\times0.01}{0.025}=0.24,$$

$$P(N_2\mid M)=\frac{P(N_2)P(M\mid N_2)}{P(M)}=\frac{0.3\times0.05}{0.025}=0.60,$$