重力測量與地球形狀學

（第二部）

管澤霖編

武漢測量制圖學院

1958

頁	行	錯誤	改正
136	11	$dv=Fd_s\,d_s$	$dv=F_s\,d_s$
136	14	沿着一个	沿着冈一个
137	倒4	几何的反力学	几何的及力学
138	3	球壳图(3·1)	球壳(图3·1)
141	9	$V=4\pi f\delta$	将δ改为D
141	倒1	$(3R^2-r^2-2\frac{R^2}{r})$	$(3R^2-r^2-2\frac{R_1^2}{r})$
142	倒4	$-\frac{4}{3}\pi fD\frac{R^3}{r^3}$	$-\frac{4}{3}\pi fD\frac{R^3}{r^2}$
145	8	$g=F+P$	$\vec{g}=\vec{F}+\vec{P}$
145	倒1	$dw=(\overline{gdl})$ $=g\cos(\overline{gdl})dl$	$dw=g\cos(\overline{gdl})dl$ $=\vec{g}\cdot\vec{dl}$
146	倒3	我們不着	我們不做
148	2	而必定	故必
148	8	最大差数dh	最大差数dh。
148	11	因此可将ρ看成是地球的半徑。	因此可以近似地認为
148	12	由(7·1)(7·2)	由(7·1)及(7·2)
148	倒6	設大地	設大陸
149	7	1·9公厘	1·9公尺
149	倒2	此时比較······提高。	刪去此31字加上"所以有大陸时，此$W_m=C$的水准面便为$W_c=C$的水准面所代替而降低"。

頁	行	錯誤	改正
150	倒3	不清楚	$\frac{1}{u}$
151	倒2	$\gamma > e$	$r > e$
	倒1	$\gamma = e$	$r = e$
152	倒7	公式中	（8·5）式中
152	倒2—4	不清楚	$J_a=\int(c^2+b^2)dm$ $J_b=\int(a^2+c^2)dm$ $J_c=\int(a^2+b^2)dm$
153	6	不清楚	$\cdots\cdot+(a^2+c^2)]\}dm$
153	倒4	必須使	則必
154	6	$\frac{-C+(A-B)}{2}$	$\frac{-C+(A+B)}{2}$
155	1	$(\frac{1}{2r^3}-\frac{3Z^2}{2r^4})$	$(\frac{1}{2r^2}-\frac{3Z^2}{2r^4})$
155	倒8	$\cos^2\lambda$	$\cos 2\lambda$
155	倒3	$\cos\psi$	$\cos^2\psi$
156	倒6	式中	上式右边
156	倒3,1	$\frac{2}{3}\mu$	$\frac{1}{3}\mu$
157	2	$\frac{2}{3}\mu$	$\frac{1}{3}\mu$
157	4	凡$\frac{2}{3}\mu$均改为$\frac{1}{3}\mu$	
157	6	凡$\frac{2}{3}\mu$均改为$\frac{1}{3}\mu$	
157	倒1	$r^2-2\alpha r^2\sin^2\psi$	$r^2+2\alpha r^2\sin^2\psi$
158	1	$(1-2\alpha\sin^2\psi)^{-\frac{1}{2}}$	$(1+2\alpha\sin^2\psi)^{-\frac{1}{2}}$

頁	行	錯誤	改正
158	3	$(1+\alpha\sin^2\psi)$	$(1-\alpha\sin^2\psi)$
158	倒4	不清楚	$g=-\dfrac{\partial U}{\partial h}$
158	倒1	当作是一个	当作是冈一个
159	倒5	$g=\dfrac{fM}{a^2}\dfrac{[1+\mu(1-3\sin^2\psi)-q\cos^2\psi]}{[1-(\mu+\frac{3}{2}q)\sin^2\psi]^2}$	
159	倒3		将(10.4)式右边第二因子化簡並略去二級及二級以上的微小量。
160	2	确立地球橢球体	确定地球橢球体
167	倒4	γ_m''为OA'	γ_m''为O'A
		因为OA'	因为O'A
	倒2	引用正常高	引进正常高
169	14	上$u=u_0$上截面高程異常ζ_A	$u=u_0$截取高程異常ζ_A
170	倒4	不清楚	$W_A=u_A+T_A$
	倒1	$tg\,\xi=$	$-tg\,\xi=$
173	4	ζ_R''	$-\zeta_R''$
	5	η_R''	$-\eta_R''$
174	9	用水准测量求的	用水准測量求得
175	倒2	講的高差異常	講的高度異常
176	倒8与倒4	$Q_{A\Gamma}$	$\theta_{A\Gamma}$
179	8与9	$\gamma_o^B H_B^\gamma$	$\gamma_o^B H_B$
	4	$+\dfrac{1}{\gamma_m^B}\int_{(OB)}(\gamma-\gamma_o^B)dh$	$+\dfrac{1}{\gamma_m^B}\int_{(OB)}(\gamma_o-\gamma_o^B)dh$
180	2	$\dfrac{(g-\gamma)_A+(g-\gamma)_B}{2r_m}\int_{(AB)}dh$	$\dfrac{(g-\gamma)_A+(g-\gamma)_B}{2\gamma_m}\int_{(AB)}dh$
190	倒7	$\phi_m=\dfrac{\phi_1-\phi_2}{2}$	$\phi_m=\dfrac{\phi_1+\phi_2}{2}$
190	5	$\dfrac{1}{m}\int_{(AB)}(g-\ )dh$	$\dfrac{1}{\gamma_m}\int_{(AB)}(g-\gamma)\,dh$
200	倒4	0".005cos或0.005sin	0".005cosα或0".005sinα

第二部 地球形狀

第一章 緒 論

第二章 引力位的理論基础

第三章 重力位

第四章 地球形狀的研究

第五章 区域性地球形狀的研究

第六章 区域性重力測量的計划

第二部 地球形状

第一章 緒 論

研究地球形状第一个重要的任務是决定地球的形状。在大地測量中已叙述了应用弧度測量的方法来求定地球的形状，这种方法又稱为几何的方法。由于地球的表面上72%是海洋，而陸地只佔28%，因此就是在整个的大陸上都布滿了弧度測量，所求出的地球形状也不能表示眞正的地球形状，因为在海洋上是不能布設弧度測量的。

除了上述的几何方法以外还有用重力測量来求的地球形状的物理的方法。由于重力測量是不論在海洋上或大陸上都可以进行，因此这种方法有極其重要的意义。

從牛頓那时代起，两个半世紀以来，研究地球形状的物理方法得到了很大的发展，例如在1743年克拉魯定理曾表明了地球扁率与重力測量的关係此后約一百年，即在1849年，英国的物理学家斯托克斯証明了，如果知道整个地球表面上的重力場，那末就可以确定大地水准面的形状，他还导出了这个公式。

雖然斯托克斯在理論上已經解决了这个問題，可是在全世界的重力測量还沒有完成以前，这个公式就沒有实用的可能。近年来M.C.莫洛琴斯基制定了确定地球表面眞正形状的新方法，这一方法对以前的方法作了原則性的重大修改，运用了天文大地及重力的資料来求地球形状。由于他在这方面工作出色的成就，在1946年榮獲了斯大林獎金。

除了研究整个的地球形状外，在大地測量中常々要确定地球表面点对于参攷橢圓体的位置（B.L.H），通常是这样来进行的，在参攷橢圓体表面上用某种方法确定了两个投影点之間大地綫的長度、大地綫的方位角和地面点对于橢圓面的高差后，就可以求得地球表面两点

的三个坐标差（ΔB ΔL ΔH）如果第一点的坐标（$B_1L_1H_1$）已知的話，就可以求第二点的坐标（$B_2L_2H_2$）。要知道大地綫長度，大方地方位角、地面点对于橢圓面的高差，就要进行基綫、三角及水准测量。但这些实際的测量工作不可能在橢圓体上进行，必須在地球的表面上，而在测量的过程中，测量仪器的軸是以水准器来安置的，也就是以垂綫方向，当然与橢圓体上相应点的法綫是不重合的，因而测得的結果在某种程度上与它們在橢圓体上相应的数値有差異。这种差異稱之为垂綫偏差。因此如何求出这个偏差的数値，而使观测的結果归化到橢圓体上，是研究地球形状的第二个重要的任務。

对于一个工程测量工作者来説，在工作中是常々需要很好的来解决第二个問題。例如，在現代大規模的联合企业建築中，要求放样的精度很高，在水准测量中甚至要求0.1毫米的精度，如果要放样的平面々积比較大，就要研究是否要攷慮平面与水准面之間的差数。在水庫建築的工程中，对水准测量的精度要求也很高，因为水庫的范圍与水准测量的高度有着直接的关係，因此就要研究采用那一种高程系統在隧道的建築中，如果不顧及垂綫偏差，可能使方向偏斜，因而從两边同时开鑿的隧道在中間有可能不銜接。因此不注意这一方面的問題就不能保証工程的質量造成嚴重的浪費、返工的現象、從而影响国家建設任務的完成。

在本課程的第二部分內，着重討論研究地球形状的第二个任務。

第二章 引力位的理論基础

§1 引力位

設有一質量为 m 的質点 A 和質量为 m_1 的質点 B，宅們的直角坐标分別为（abc）及（xyz），A 点为吸引点 B 点为被吸引点，相距为 r，根据牛頓定律：两質点之間的作用力 F 与两点的質量乘积成正比，而与宅們之間的距离平方成反比。作用力的方向在两点的联縩上，

$$F=-f\frac{m_1 m}{r^2} \qquad (1\cdot1)$$

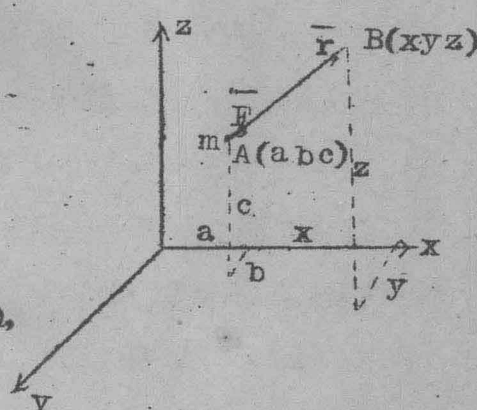


图 1·1

負号是表示互相吸引。式中

$$r^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 \quad (1\cdot2)$$

矢量 A B 与相应坐标之間的夾角餘弦 $\cos(\bar{r}x)\cos(\bar{r}y)\cos(\bar{r}z)$，其数值等分 $\frac{x-a}{r}$ $\frac{y-b}{r}$ $\frac{z-c}{r}$，即

$$\left.\begin{aligned}
\cos(\bar{F}x)&=-\frac{x-a}{r}=-\cos(\bar{r}x)\\
\cos(\bar{F}y)&=-\frac{y-b}{r}=-\cos(\bar{r}y)\\
\cos(\bar{F}z)&=-\frac{z-c}{r}=-\cos(\bar{r}z)
\end{aligned}\right\} \qquad (1\cdot3)$$

引力在各个坐标軸上的投影就等於 F 的絕对值与 $\cos(\bar{F}x)\operatorname{cox}(\bar{F}y)\cos(\bar{F}z)$ 的乘积方向由 $\cos(\bar{F}x)\cos(\bar{F}y)\cos(\bar{F}z)$ 決定：

$$\left.\begin{aligned}
F_x&=F\cos(\bar{F}x)\\
F_y&=F\cos(\bar{F}y)\\
F_z&=F\cos(\bar{F}z)
\end{aligned}\right\} \qquad (1\cdot4)$$

將（1·1）（1·3）式代入上式則得：

$$\left.\begin{aligned} F_x &= -f\frac{m_1 m}{r^2}\frac{x-a}{r} \\ F_y &= -f\frac{m_1 m}{r^2}\frac{y-b}{r} \\ F_z &= -f\frac{m_1 m}{r^2}\frac{z-c}{r} \end{aligned}\right\} \qquad (1\cdot5)$$

設B点的質量 $m_2=1$ 則

$$\left.\begin{aligned} F_x &= -f\frac{m}{r^3}(x-a) \\ F_y &= -f\frac{m}{r^3}(y-b) \\ F_z &= -f\frac{m}{r^3}(z-c) \end{aligned}\right\} \qquad (1\cdot6)$$

現在我們取一个函数

$$V = f\frac{m}{r} \qquad (1\cdot7)$$

取V对x的偏导数：

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{fm}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}$$

为了求 $\frac{\partial r}{\partial x}$，将（1·2）式向x取偏导数，卽得：

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x-a}{r}$$

代入前式：

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{fm}{r^3}(x-a) = F_x$$

同样V对yz取偏导数：

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{fm}{r^3}(y-b) = F_y$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{fm}{r^3}(z-c) = F_z$$

因此，函数V具有这样的性質：卽它向被吸引点的各个坐标的偏导数，

分别等于引力在相应坐标軸上的分力。

象这样的函数 V 稱之为位函数，或稱引力位。

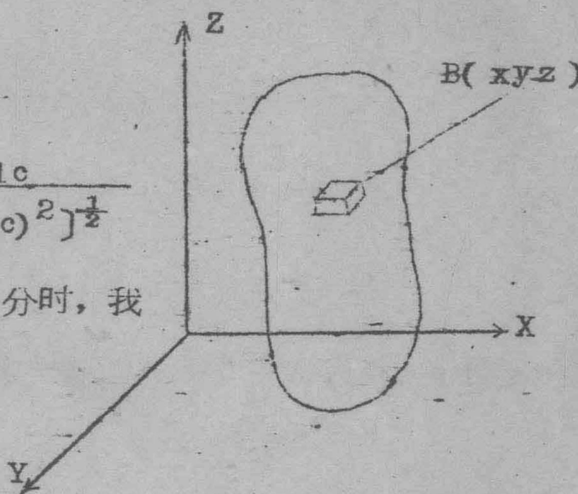
上面所叙述的是質点的位，若吸引的物質不是質点而是一个物体，它的密度 δ 是坐标 a 、b 、c 的函数，那么它的单元体积 $d\tau = da\,db\,dc$，則单元質量 $dm = \delta\,d\tau$。而它对 B (xyz) 点所构成的单元位則为：

$$dV^{\tau} = f\frac{dm}{r}$$

即

$$dV^{\tau} = \frac{f\delta(abc)\,da\,db\,dc}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

如果将上式对物体的体积々分时，我們就得到整个物体所形成的位



$$V^{\tau}_{(xyz)} = $$

$$= f\iiint_{\tau}\frac{\delta(abc)\,da\,db\,dc}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{1}{2}}} \qquad (1\cdot 8)$$

图 1·2

积分極限則依物体的形状而定。

由于上式是按 a 、b 、c 而进行积分的，数值 x 、y 、z 也就只起了参数的作用，因此我們可以在积分符号內对 xyz 进行微分：

$$\frac{\partial V^{\tau}}{\partial x} = f\iiint_{\tau}\delta\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\,da\,db\,dc \qquad (1\cdot 9)$$

式中

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} \qquad (1\cdot 10)$$

而

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{(x-a)}{r}$$

顧及 (1·3) 式，即得：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial x}&=\frac{x-a}{r}=\cos(\overline{r}x)\\ \frac{\partial r}{\partial y}&=\frac{(x-b)}{r}=\cos(\overline{r}y)\\ \frac{\partial r}{\partial z}&=\frac{(x-c)}{r}=\cos(\overline{r}z)\end{aligned}\right\}\qquad(1\cdot11)$$

将(1·10)(1·11)代入(1·9)式中：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial V^\tau}{\partial x}&=-f\iiint_\tau\frac{\delta\cos(\overline{r}x)}{r^2}d\tau\\ \text{或}\quad\frac{\partial V^\tau}{\partial x}&=-f\iiint_\tau\frac{\delta(x-a)}{r^3}d\tau\end{aligned}\right\}\qquad(1\cdot12)$$

同样的，这个引力$\overline{F}$的分量（$F_x=\frac{\partial V}{\partial x}$）公式也可以直接求得。

設单元体积$d\tau$在点（x、y、z）上所形成的单元引力为：

$$dF=-f\frac{dm}{r^2}$$

它在x軸上的分力为：

$$dF_x=-f\frac{dm}{r^2}\frac{x-a}{r}$$

或

$$dF_x=-f\frac{\delta(x-a)}{r^3}d\tau=-f\frac{\delta\cos(r\cdot x)}{r^2}d\tau$$

按物体々积々分后，即得（1·12）式。

§2　引力位的性質

我們将被吸引点B移动到无限接近的B'点上，它在各坐标軸上的坐标增量各为dx, dy, dz；並以ds表示BB'的单元距离，则：

$$\left.\begin{aligned}dx&=ds\cos(sx)\\ dy&=ds\cos(sy)\\ dz&=ds\cos(sz)\\ ds&=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}\end{aligned}\right\}\qquad(2\cdot1)$$

式中 $\cos(sx)$ 表示单元距离 ds 与 x 軸之間夾角的余弦。在点 B' 上，位函数得到增量 dV，它等于：

$$dV=\frac{\partial V}{\partial x}dx+\frac{\partial V}{\partial y}dy+\frac{\partial V}{\partial z}dz$$

将（1·4）及（2·1）代入上式：

$$dV=Fds[\cos(Fx)\cos(sx)+\cos(Fy)\cos(sy)+$$
$$+\cos(Fz)\cos(sz)]$$

在高等数学中，我們知道方括弧內，就是矢量 F 与 ds 之間所組成的夾角余弦，因此：

$$dV=Fds\cos(Fs) \qquad (2\cdot2)$$

$F\cos(Fs)$ 为作用力 F 沿 ds 方向的分力，以 F_s 表示，則：

$$dV=\cancel{Fd_s d_s}=F_s \cdot ds$$

力与距离的乘积就等于功，所以位的增量 dV 也就是功，这个功是由一个单位質量從一个水准面移到另一个水准面上时的作用力所完成的。当沿着一个水准面移动时，$dV=0$，所以就没有作功。

上式亦可寫成

$$\frac{dV}{ds}=F_s$$

即位函数 V 对任一方向 ds 的方向导数等于作用力在这个方向的分力。因此位函数的基本性質，也可以推廣到任意方向上去。

現在我們回到（2·2）式中，来研究两种特殊的情况。

設 $\cos(Fs)=0$ 則 $dV=0$

积分后

$$V=常数 \qquad (2\cdot3)$$

这是某一曲面的方程，这个曲面有这样的性質：在曲面上所有点的力的方向与曲面的法綫方向相反，这是因为在曲面的切綫元素 ds 上力

F_s等于零；

$$-\frac{dV}{ds}=F_s=0$$

也就是說力是朝着法綫方向的$(F \cdot s)=\frac{\pi}{2}$，象这样的曲面稱作为引力位的水准面或稱为等位面。

在这里我們要注意在$V=$常数的水准面上，各处的引力並不一定是一个常数，但是引力的方向是朝着法綫的方向。

現在我們来看第二种特殊情况，$(F \cdot s)=\pi$也就是說要使位移的方向是沿着作用力的反方向，則（2·2）式变为：

$$dV=-Fds$$

$$ds=-\frac{dV}{F} \qquad (2 \cdot 4)$$

如果有两个水准面

$$V=C_1 \qquad V=C_2$$

在$C_2-C_1=dV$时，由于水准面上各处的F不同，因此水准面之間的距离ds也就不是一个常数，它是与力的数値成反比例地变化。

正如大家所知道的，在两極的引力要比赤道上的引力要稍大些，因而水准面愈趨于两極，水准面之間的距离愈小。

在（2·4）式中还可以看出，当F是有限値时（在自然界中F为无窮大的情况，我們不去討論它），ds和dV是同級微小量，若dV不为零則ds亦不等于零，由此可知，水准面不会相交，也不会相切。

根据上面的討論可以看出，研究位函数的数学性質，就可以了解它的几何的及力学的性質，從而避免研究复杂的分力。

我們在这里所研究的一些結論，不只是对于牛頓的引力是正确的，对于以后我們所要講到的重力，也都是正确的。

§3 質量均匀的单球层的引力位

我們分两种情况来討論它，首先討論被吸引点B在吸引的物体以外，然后再討論吸收点B'在吸引的物体以內。

設有一質量均匀的无限薄的球壳图（3·1）在球外有一点B，它被单球层吸引。为了便于解算問題起見，我們采用球面坐标，将坐标原点安置在球心O上，使極軸OP通过被吸引点B，則球面上任一点A的坐标为R（半徑）、ψ（極距）、λ（經度）。則单球层对B点的引力位：

$$V_e=f\iint_\sigma \frac{dm}{\rho} \qquad (3\cdot1)$$

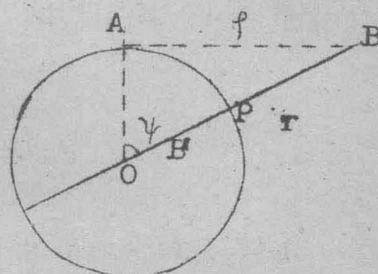


图 3·1

式中ρ为球面上流动点A到B点的距离。假設单元面积为$d\sigma$，面密度为δ則：

$$dm=\delta d\sigma \qquad (3\cdot2)$$

或

$$dm=\delta R^2 \sin\psi d\psi d\lambda \qquad (3\cdot3)$$

根据余弦定理則得：

$$\rho^2=R^2+r^2-2Rr\cos\psi \qquad (3\cdot4)$$

将（3·3）（3·4）代入（3·1）式中，並按球面進行积分：

$$V_e=f\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\delta\frac{R^2}{\rho}\sin\psi d\psi d\lambda$$

由于单球层的質量是均匀的，因此δ可以移至积分以外

$$V_e=2\pi f\delta\int_0^{\pi}\frac{R^2}{\rho}\sin\psi d\psi \qquad (3\cdot5)$$

在（3·4）式可以看出ρ是ψ的函数，因此在（3·5）式的积分中，首先要将ρ变换成ψ的关係式。为了方便起見，我們将ψ改化成ρ的关係式，当然积分的上下限也要改变。

微分(3·4)式得:

$$\rho d\rho = Rr\sin\psi d\psi$$

則:

$$R^2\sin\psi d\psi = \frac{R\rho}{r} d\rho$$

代入(3·5)式中得:

$$V_e = 2\pi f\delta\int_{r-R}^{r+R}\frac{R}{r}d\rho$$

$$= 2\pi f\delta\frac{R}{r}\int_{r-R}^{r+R}d\rho = 4\pi f\delta\frac{R^2}{r} \qquad (3\cdot6)$$

因为整个单球层的質量 m等于 $4\pi R^2\delta$，所以上式可寫成

$$V_e = f\frac{m}{r} \qquad (3\cdot7)$$

这說明了单球层对外部点的引力位，它和将单球层的質量完全集中在球心上，而对外部点的引力位完全一样。

至于单球层对 B点的引力，因为球是均匀对稱的，因此，引力的方向也就是 r的方向，所以

$$F_e = \frac{\partial V}{\partial r} = -f\frac{m}{r^2} \qquad (3\cdot8)$$

冈样的也可以知道，单球层对外部点的引力，也和将它的質量集中在球心而对外部点的引力相冈。

現在我們要研究第二种情况，假若被吸引点 B'在吸引的单球层内部，在討論这个問題的时候，上述的步驟完全可以利用，所不冈的只是积分的上下限而已，因此:

$$V_i = 2\pi f\delta\int_{R-r}^{R+r}\frac{R}{r}\partial\rho$$

$$= 4\pi f\delta R = f\frac{m}{R} \qquad (3\cdot9)$$

上式中 fmR 为常数，就是說不論 B' 点在球內的位置如何，单球层对宅的引力位总是相冈的，等于一个常数。而引力：

$$F_i = \frac{\partial V}{\partial r} = 0$$

我們也得到单球层对內部点引力的結論：均匀的单球层对內部点沒有引力。

§4 均匀球的引力位

首先我們来研究有一定厚度的球层的引力，然后再来研究球体的引力。

对于一个有厚度的球层来說，可以看成无数个冈心的单球层的总和，我們先将上述的面密度 δ 化为体积密度 D 的关係。根据定义，面密度和体积密度分别为单元面积和单元体积的質量，即

$$\delta = \frac{dm}{d\sigma}$$

$$D = \frac{dm}{d\tau} = \frac{dm}{d\sigma \cdot dR}$$

式中 $d\tau$ 为单元体积，宅等于单元面积 $d\sigma$ 与球层单元厚度 dR 的乘积，因此：

$$dm = \delta\, d\sigma = D\, d\sigma \cdot dR$$

即

$$\delta = D\, dR \tag{4·1}$$

将上式代入（3·6）式中，并以 R_1（球层的內半徑）及 R_2（球层的外半徑）分别作为球层厚度 dR 的积分上下限：

$$V_e = 4\pi f D \cdot \frac{1}{r}\int_{R_1}^{R_2} R^2\, dR = \frac{4}{3}\pi f D \frac{1}{r}(R_2^3 - R_1^3)$$

設球层的質量为 M，則：