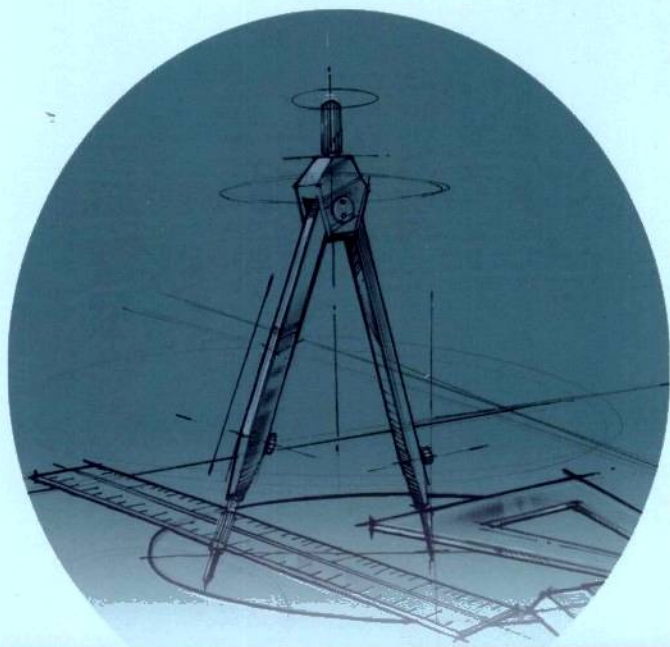


上海大学自强学院
钱伟长教育思想实践丛书



高等数学(上册)

顾传青 编著



科学出版社

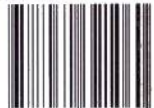
(0-4451.0101)

科学出版中心 数理分社
电 话: (010) 64033664
E-mail: math-phy@mail.sciencep.com
博 客: <http://blog.sina.com.cn/sciencemp>

销售分类建议: 高等数学

www.sciencep.com

ISBN 978-7-03-032106-0



9 787030 321060 >

定 价: 78.00元 (含上、下册)

上海大学自强学院钱伟长教育思想实践丛书

高等数学

(上册)

顾传青 编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

上海大学自强学院由钱伟长校长创办、学校直接领导,是培养优秀学生的特色学院。本书是根据作者执教上海大学自强学院“高等数学”课程13年总结写成的教材,是2008年度上海大学重点教材建设项目。其特点,一是在高等数学的基本框架下加进了数学分析的一些基本内容,为学生今后学习打下一个基础;二是注重概念和方法的小结;三是例题分析紧扣解题方法,习题编排和解答便于学生自学。

本书分为上、下两册。上册内容为函数与极限、导数与微分、微分中值定理及其应用、不定积分、定积分、定积分的应用和空间解析几何与向量代数共7章。

本书适合作工科本科生和非数学专业理科本科生的“高等数学”课程教材,也可作为准备考研人员和工程技术人员参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学:全2册/顾传青编著. —北京:科学出版社,2011

(上海大学自强学院钱伟长教育思想实践丛书)

ISBN 978-7-03-032106-0

I. ①高… II. ①顾… III. ①高等数学—高等学校—教材 IV. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第168140号

责任编辑:王丽平 房 阳/责任校对:陈玉凤

责任印制:钱玉芬/封面设计:鑫联必升

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

新 华 印 刷 厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011年8月第 一 版 开本:85(720×1000)

2011年8月第一次印刷 印张:37 1/4

印数:1—2 500 字数:721 000

定价:78.00元(含上、下册)

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

本书属于《上海大学自强学院钱伟长教育思想实践丛书》，作为上海大学自强学院“高等数学”课程的教材，是2008年度上海大学重点教材建设项目。教材分为上、下两册。上册内容为函数与极限、导数与微分、微分中值定理及其应用、不定积分、定积分、定积分的应用和空间解析几何与向量代数共7章。

钱伟长校长指出：“大学生一定要学会自学。一个人到大学毕业时，除了已经具有一定的基本理论知识外，还应该有这样的把握，即没有学过的东西，通过自学，查一查，看一看，也能弄懂，就是说能够无师自通，大学生就应该达到这个水平。”自强学院秉承“自强不息”的校训精神，由钱伟长校长创办、学校直接领导，是上海大学实践钱伟长教育思想、培养优秀学生的特色学院。这本教材将教师课堂教学和学生课外学习结合起来，致力于培养学生的自学能力。从自强学院（原为基础教学强化班）1997年成立起，编者一直担任“高等数学”的教学工作，努力使学生掌握高等数学的基础知识和基本方法，培养学生的独立思考和自学能力。本教材是编者多年教学实践的总结。第一个特点是在高等数学的基本框架下加进了数学分析的一些基本内容，为学生今后进一步自学其他课程奠定基础。第二个特点是注重概念和方法的小结，特别是解题方法的步骤化。对每一个重要的概念，都用“注”的形式加以说明；对每一个重要的解题方法，都用“方法”的形式加以小结，其目的是引导学生自学，鼓励学生对所学内容进行总结。第三个特点是例题、习题的编排上便于学生自学。教材中基本方法的介绍都配有丰富的例题，且有一定的难度；同时在习题解答中对有难度的习题和证明题都给出了简明的解答和提示。目的也是帮助学生自学，树立学习的自信心。

在撰写“高等数学”讲义和教材过程中，编者得到了自强学院学生和研究生们的许多帮助：陈亮、郑林、陶有田博士提供了“高等数学”的部分讲稿，苏英老师对书稿进行了编辑和认真的校对，同时，编者参考了同济大学《高等数学》（第五版）和华东师范大学《数学分析》（第三版）的部分内容，在此一并表示感谢！

限于编者的水平和时间，教材中不妥之处在所难免，希望各位读者批评指正。

顾传青

上海大学自强学院

2011年3月14日

目 录

前言

第 1 章	函数与极限	1
1.1	集合与实数系	1
1.1.1	集合	1
1.1.2	映射	2
1.1.3	实数系	4
	习题 1.1	5
1.2	函数	6
1.2.1	函数	6
1.2.2	函数的几种特性	8
1.2.3	反函数	9
1.2.4	复合函数	10
1.2.5	基本初等函数	11
1.2.6	初等函数	13
1.2.7	双曲函数和反双曲函数	13
	习题 1.2	13
1.3	数列的极限	14
1.3.1	数列极限的定义	14
1.3.2	收敛数列的性质	18
1.3.3	收敛数列的运算	20
	习题 1.3	21
1.4	数列极限存在的条件	21
1.4.1	夹挤收敛准则	21
1.4.2	有界收敛准则	22
1.4.3	柯西收敛准则	25
1.4.4	实数系的完备性	26
	习题 1.4	26
1.5	函数的极限	27
1.5.1	自变量趋向有限值时函数的极限	27
1.5.2	自变量趋向无穷大时函数的极限	30

1.5.3	函数极限的性质	32
1.5.4	函数极限的运算	32
	习题 1.5	34
1.6	函数极限存在的条件	35
1.6.1	函数极限收敛准则	35
1.6.2	两个重要极限	37
	习题 1.6	41
1.7	无穷小与无穷大	41
1.7.1	无穷小	41
1.7.2	无穷大	43
1.7.3	无穷小的比较	45
	习题 1.7	49
1.8	连续函数	50
1.8.1	函数的连续性	50
1.8.2	函数的间断点	51
1.8.3	连续函数的运算	54
1.8.4	初等函数的连续性	55
	习题 1.8	57
1.9	闭区间上连续函数的性质	58
1.9.1	一致连续性	58
1.9.2	有界性	61
1.9.3	介值性	62
	习题 1.9	64
第 2 章	导数与微分	66
2.1	导数的概念	66
2.1.1	导数的定义	66
2.1.2	导数的几何意义	70
2.1.3	几个基本初等函数的导数公式	70
2.1.4	导函数的介值定理	72
	习题 2.1	73
2.2	求导法则	74
2.2.1	函数四则运算的求导法则	74
2.2.2	反函数的求导法则	76
2.2.3	复合函数的求导法则	77
2.2.4	基本初等函数导数公式	81

习题 2.2	81
2.3 高阶导数	82
2.3.1 高阶导数的定义	82
2.3.2 基本初等函数的 n 阶导数公式	83
习题 2.3	85
2.4 隐函数与参数式函数的求导法则	85
2.4.1 隐函数的导数	85
2.4.2 参数方程表示的函数的导数	88
2.4.3 相关变化率	90
习题 2.4	92
2.5 微分	93
2.5.1 微分的定义	93
2.5.2 微分基本公式和运算法则	95
2.5.3 微分的近似计算	97
2.5.4 微分在近似计算中的应用	98
2.5.5 高阶微分	98
习题 2.5	99
第 3 章 微分中值定理及其应用	101
3.1 拉格朗日中值定理和函数单调性	101
3.1.1 罗尔中值定理	101
3.1.2 拉格朗日中值定理	102
3.1.3 函数单调性的判定法	105
习题 3.1	108
3.2 柯西中值定理和洛必达法则	110
3.2.1 柯西中值定理	110
3.2.2 洛必达法则	111
习题 3.2	116
3.3 泰勒公式	118
3.3.1 带有佩亚诺型余项的泰勒公式	118
3.3.2 带有拉格朗日余项的泰勒公式	121
3.3.3 泰勒公式在近似计算中的应用	123
习题 3.3	124
3.4 函数的极值与最大值最小值	125
3.4.1 极值的判别定理	125
3.4.2 最大值最小值问题	128

习题 3.4	130
3.5 函数的凸性与拐点	130
3.5.1 曲线凹凸性	130
3.5.2 曲线的拐点及其求法	132
习题 3.5	134
3.6 函数图像的描绘	134
3.6.1 渐近线的概念	134
3.6.2 函数作图	135
习题 3.6	138
3.7 曲率	138
3.7.1 弧微分	138
3.7.2 曲率的概念	140
3.7.3 曲率的计算公式	141
习题 3.7	143
3.8 方程的近似解	144
3.8.1 求方程近似解的条件	144
3.8.2 求方程近似解的方法	144
习题 3.8	146
第 4 章 不定积分	147
4.1 不定积分的概念与性质	147
4.1.1 原函数与不定积分	147
4.1.2 不定积分的性质	148
4.1.3 基本积分公式 (一)	149
习题 4.1	150
4.2 换元积分法	151
4.2.1 第一换元积分法 (凑微分法)	151
4.2.2 第二换元积分法	154
4.2.3 简单无理函数的积分	157
习题 4.2	158
4.3 分部积分法	159
4.3.1 分部积分法公式	159
4.3.2 各种类型函数的分部积分法	159
习题 4.3	161
4.4 有理函数积分法	162
4.4.1 有理函数的积分	162

4.4.2	三角函数有理式的积分	166
习题 4.4		168
4.5	积分表的使用	168
习题 4.5		169
第 5 章	定积分	171
5.1	定积分的概念与性质	171
5.1.1	定积分的定义	171
5.1.2	可积的必要条件	173
习题 5.1		175
5.2	函数可积的条件	175
5.2.1	达布和	175
5.2.2	可积的充分条件	177
5.2.3	可积函数类	178
习题 5.2		180
5.3	定积分的性质	181
5.3.1	定积分的基本性质	181
5.3.2	定积分的不等式	182
5.3.3	定积分的中值定理	184
习题 5.3		185
5.4	微积分基本定理	186
5.4.1	积分上限的函数	186
5.4.2	牛顿-莱布尼茨公式	189
5.4.3	更一般条件下的牛顿-莱布尼茨公式	190
习题 5.4		191
5.5	定积分的换元法和分部法	192
5.5.1	定积分的换元积分法	192
5.5.2	定积分的分部积分法	197
习题 5.5		199
5.6	广义积分	201
5.6.1	无穷区间上连续函数的广义积分	201
5.6.2	有限区间上无界函数的广义积分	204
习题 5.6		207
5.7	广义积分的审敛法 Γ 函数	208
5.7.1	无穷限广义积分的审敛法	208
5.7.2	无界函数的广义积分的审敛法	211

5.7.3	Γ 函数	212
	习题 5.7	214
第 6 章	定积分的应用	215
6.1	定积分的元素法	215
6.2	定积分在几何上的应用	216
6.2.1	平面图形的面积	216
6.2.2	平行截面面积已知的立体的体积	220
6.2.3	旋转体的体积	222
6.2.4	平面曲线的弧长	225
6.2.5	定积分应用部分的综合题	226
	习题 6.2	227
6.3	定积分在物理上的应用	229
6.3.1	液体的侧压力问题	229
6.3.2	变力做功的问题	230
6.3.3	其他应用问题	231
	习题 6.3	232
第 7 章	空间解析几何与向量代数	234
7.1	向量及其线性运算	234
7.1.1	空间直角坐标系	234
7.1.2	向量的线性运算	236
7.1.3	向量的坐标表示	237
	习题 7.1	240
7.2	向量的乘积	241
7.2.1	向量的数量积	241
7.2.2	向量的向量积	243
7.2.3	向量的混合积	246
	习题 7.2	247
7.3	平面及其方程	247
7.3.1	平面的点法式方程	247
7.3.2	平面的一般式方程	249
7.3.3	点到平面的距离	251
	习题 7.3	252
7.4	空间直线及其方程	252
7.4.1	直线的方程	252
7.4.2	直线和直线的位置关系	254

7.4.3 平面束方程	257
习题 7.4	258
7.5 空间曲面及其方程	259
7.5.1 球面	259
7.5.2 旋转面	259
7.5.3 柱面	261
7.5.4 二次曲面	263
习题 7.5	265
7.6 空间曲线及其方程	265
7.6.1 空间曲线的一般方程	265
7.6.2 空间曲线的参数方程	266
7.6.3 空间曲面在坐标平面上的投影区域	267
习题 7.6	270
习题参考答案	271
附录 I 几种常用的曲线	303
附录 II 积分表	306

第1章 函数与极限

本章介绍高等数学的几个基本概念:函数、极限、连续和它们的基本性质,共9节,分别为集合与实数系、函数、数列的极限、数列极限存在的条件、函数的极限、函数极限存在的条件、无穷小与无穷大、连续函数和闭区间上连续函数的性质,其中1.1节介绍了上确界、下确界的概念,1.4节介绍了实数系的完备性,1.9节介绍了一致连续性的概念和闭区间上连续函数的性质.

1.1 集合与实数系

1.1.1 集合

1. 集合的定义

定义 1.1.1 集合是具有某种特定性质的事物所组成的全体,组成这个集合的事物称为该集合的元素.集合可表示为 $A = \{x | x \text{ 所具有的某种性质}\}$.

全体实数构成一个集合,称为实数系,记为 $\mathbf{R}$.通常用大写拉丁字母 $A, B, C, \dots$ 表示集合;用小写的拉丁字母 $a, b, c, \dots$ 表示集合的元素.如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于 A ,记作 $a \in A$;如果 a 不是集合 A 的元素,就说 a 不属于 A ,记作 $a \notin A$.

一个集合,若它只含有有限个元素,称为有限集;不是有限集的集合称为无限集.例如, $A = \{1, 2\}$ 是有限集, $B = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1, x, y \in \mathbf{R}\}$ 是无限集.

2. 集合的表示

列举法 把集合的全体元素一一列举出来表示, $A = \{a_1, a_2, \dots\}$.

描述法 若集合 A 是由具有某种性质 p 的元素 x 的全体所组成的,可表示成 $A = \{x | x \text{ 具有性质 } p\}$.例如, B 是方程 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 的解集,

$$B = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}.$$

设 A, B 是两个集合,如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素,则称 A 是 B 的子集,记作 $A \subset B$.如果集合 A 与集合 B 互为子集,即 $A \subset B$ 且 $A \supset B$,则称集合 A 与集合 B 相等,记作 $A = B$.若 $A \subset B$ 且 $A \neq B$,则称 A 是 B 的真子集,记作 $A \subsetneq B$.不含任何元素的集合称为空集.如 $\emptyset = \{x | x^2 + 1 = 0, x \in \mathbf{R}\}$ 是一个空集.规定空集是任何集合的子集,但要注意区分空集 $\emptyset$ 与集合 $\{0\}$ 是两个不同的集合.

3. 集合的运算

设 A, B 是集合, 集合的和、交、差、补运算分别定义如下:

(1) 由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合, 称为 A 与 B 的并集, 记作

$$A \cup B = \{x: x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

例如, $\{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\}$.

注 1.1.1 在 $A \cup B$ 中重复的元素只算一次.

(2) 由所有属于 A 并且属于 B 的元素组成的集合, 称为 A 与 B 的交集, 记作

$$A \cap B = \{x: x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

例如, $\{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\}$.

(3) 由所有属于 A 并且不属于 B 的元素组成的集合, 称为 A 与 B 的差集,

$$A \setminus B = \{x: x \in A \text{ 且 } x \notin B\}.$$

例如, $\{1, 2\} \setminus \{2, 3\} = \{1\}$.

(4) 设研究某个问题限定在一个大的集合 U 中进行, 所研究的其他集合 A 都是 U 的子集, 称集合 U 为全集或基本集, 称 $U \setminus A$ 为 A 的余集或补集, 记作

$$A^c = \{x | x \in U \text{ 且 } x \notin A\}.$$

例如, $A = \{0 < x \leq 1\}$ 的补集 $A^c = \{x \leq 0 \text{ 或者 } x > 1\}$.

4. 集合的运算法则

设 A, B, C 为任意三个集合, 则有下列法则成立:

交换律 $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A;$

结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$

分配律 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C);$

对偶律 $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$

1.1.2 映射

1. 映射的定义

定义 1.1.2 设 X, Y 是非空集合, 如果存在一个法则 f , 使得 $\forall x \in X$, 按法则 f , 在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应, 则称 f 为从 X 到 Y 的映射

$$f: X \rightarrow Y.$$

y 称为元素 x (在映射 f 下) 的像, 记作 $y = f(x)$, 元素 x 称为元素 y (在映射 f 下) 的一个原像; 集合 X 称为映射 f 的定义域, 记作 $D_f = X$; X 中所有元素的像所组成的集合称为映射 f 的值域, 记作 $R_f = \{f(x) | x \in X\}$.

注 1.1.2 对每个 $x \in X$, 元素 x 的像 y 是唯一的; 而对每个 $y \in R_f$, 元素 y 的原像 x 不一定是唯一的; 映射 f 的值域 R_f 是 Y 的一个子集, 即 $R_f \subset Y$, 不一定 $R_f = Y$. 如 $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = x^2$, f 的定义域 $X = \mathbf{R}$, f 的值域 $R_f = \{y | y \geq 0\}$. 对 $f(X)$ 中元素 y , 除 $y = 0$ 外, 它的原像 x 不是唯一的, 如 $y = 1$ 的原像有 $x = 1, x = -1$ 两个.

2. 满射、单射与双射

设 f 为从 X 到 Y 的映射, 分别给出下列三种情形:

(1) 若 $R_f = Y$, 则称 f 为从 X 到 Y 的满射. 如 $f(x) = x + \sin x: \forall x \in \mathbf{R} \mapsto y \in \mathbf{R}$ 是一个满射, $f(x) = x^2: \forall x \in \mathbf{R} \mapsto y \in \mathbf{R}$ 不是一个满射.

(2) 若 $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$ 时, 它们的像 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称 f 为从 X 到 Y 的单射. 如 $f(x) = x + \sin x$ 是单射, 而 $f(x) = x^2$ 不是单射.

(3) 若 f 既是满射又是单射, 则称 f 为双射或一一映射. 例如, $f(x) = x + \sin x$ 是一一映射.

注 1.1.3 映射又称为算子. 在不同数学分支中有不同的术语:

在数学分析中, $f: X(\text{数集}) \rightarrow \mathbf{R}$, f 称为定义在 X 上的函数;

在线性代数中, $f: X \rightarrow Y$, f 称为 X 上的线性变换;

在泛函分析中, $f: X \rightarrow Y(\text{数集})$, f 称为 X 上的泛函.

3. 逆映射

设 f 为从 X 到 Y 的单射, 则由定义, 对每个 $y \in R_f$, 有唯一的 $x \in X$, 适合 $y = f(x)$. 于是, 可以定义一个从 R_f 到 X 的新映射 g ,

$$g: R_f \rightarrow X$$

对每个 $y \in R_f$, 规定 $g(y) = x$, 这个 x 满足 $y = f(x)$. 这个映射 g 称为 f 的逆映射, 记作 f^{-1} , 其定义域 $D_{f^{-1}} = R_f$, 值域 $R_{f^{-1}} = X$.

例如, 求 $y = x^2, x \in (-\infty, 0]$ 的逆映射: 解出逆映射为 $x = -\sqrt{y}, y \in [0, +\infty)$.

4. 复合映射

设有两个映射 $g: X \rightarrow Y_1, f: Y_2 \rightarrow Z$, 其中 $Y_1 \subset Y_2$, 则由映射 g 和 f 可以定出一个从 X 到 Z 的对应法则, 它将每个 $x \in X$ 映成 $f(g(x)) \in Z$. 显然, 这个对应法则确定了一个从 X 到 Z 的映射, 称为映射 g 和 f 构成的复合映射, 记作 $f \circ g$, 即 $(f \circ g)(x) = f(g(x)), x \in X$.

1.1.3 实数系

全体自然数的集合记为 $\mathbf{N}$, 全体整数的集合记为 $\mathbf{Z}$, 全体有理数的集合记为 $\mathbf{Q}$, 全体实数的集合 (即实数系), 记为 $\mathbf{R}$. 显然 $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

1. 数轴和实数绝对值

取定了原点、长度单位和方向的直线称为数轴.

(1) 每一个实数, 在数轴上有唯一的点与之对应; 反过来, 每一个数轴上的点, 代表了唯一的一个实数. 全体实数和数轴上的点可建立一一对应的关系. 今后, 对实数和数轴上的点不加区别.

(2) 实数 a 的绝对值定义为 $|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0, \end{cases}$ 成立 $|a| = \sqrt{a^2}$.

当 $k > 0$ 时, $|a| < k \Leftrightarrow -k < a < k$; $|a| > k \Leftrightarrow a < -k$ 或 $a > k$.

例如, $|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$, 而 $|x| > 1 \Leftrightarrow x < -1$ 或 $x > 1$.

定义 1.1.3(直积) 设 A, B 是两个集合, 在集合 A, B 中各任意取一个元素 x, y , 组成一个有序对 (x, y) , 把这样的有序对作为新的元素, 它们全体组成的集合称为集合 A 与集合 B 的直积, 记作 $A \times B = \{(x, y) | x \in A \text{ 且 } y \in B\}$.

2. 区间

设 a, b 为两个实数, $a < b$, $(a, b) = \{x | x \in \mathbf{R}, a < x < b\}$ 称为开区间;

$[a, b] = \{x | x \in \mathbf{R}, a \leq x \leq b\}$ 称为闭区间; $(a, b]$, $[a, b)$ 称为半开半闭区间;

$[a, +\infty) = \{x | x \in \mathbf{R}, a \leq x < +\infty\}$, $(a, +\infty) = \{x | x \in \mathbf{R}, a < x < +\infty\}$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, b)$ 和 $(-\infty, +\infty)$ 称为无穷区间.

3. 邻域

点 a 的邻域是指以点 a 为中心的对称开区间, 分别给出下列情形:

(1) 点 a 的 δ 邻域: 设 $a \in \mathbf{R}, \delta > 0$, 满足不等式 $|x - a| < \delta$ 的全体实数 x 的集合称为点 a 的 δ 邻域, 记作 $U(a, \delta) = \{x | |x - a| < \delta\} = (a - \delta, a + \delta)$. 例如, 点 1 的 $\frac{1}{2}$ 邻域为

$$U\left(1, \frac{1}{2}\right) = \left\{x \mid |x - 1| < \frac{1}{2}\right\} = \left\{\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}\right\}.$$

(2) 点 a 的去心 δ 邻域: $\overset{\circ}{U}(a, \delta) = \{x | 0 < |x - a| < \delta\} = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$. 例如, 点 1 的去心 $\frac{1}{2}$ 邻域为 $\overset{\circ}{U}\left(1, \frac{1}{2}\right) = \left\{x \mid 0 < |x - 1| < \frac{1}{2}\right\} = \left\{\left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right)\right\}$.

(3) ∞ 邻域 $\overset{\circ}{U}(\infty) = \{x | |x| > M\}$, 其中 M 为充分大的正数.

方法 1.1.1(证有理数在实数系 $\mathbf{R}$ 中稠密)

对于任意的 $x_0 \in \mathbf{R}$ 和任意的 $\delta > 0$, 邻域 $U(x_0, \delta)$ 必含一个有理数, 因而含有无数个有理数. 已知, 有理数的和、差、积、商仍为有理数. 做法如下:

第 1 步: 取 $p, q \in \mathbf{Q}$ 使 $U(x_0, \delta) \subset [p, q]$;

第 2 步: 将闭区间 $[p, q]$ 分成 n 等份, 每个分点均为有理点;

第 3 步: 当等分的长度 $\frac{q-p}{n} < \delta$ 时, 必有一个等分点落在 $U(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 中. 可证无理数也在实数系 $\mathbf{R}$ 中稠密.

4. 上确界和下确界

定义 1.1.4 对于数集 A , 若有常数 M , 使得对任意的 $x \in A$ 有 $x \leq M$, 则称 M 是数集 A 的一个上界; A 的最小上界称为 A 的上确界, 记为 $\sup A = \mu \leq M$.

若有常数 m , 使得对任意的 $x \in A$ 有 $x \geq m$, 则称 m 是数集 A 的一个下界; A 的最大下界称为 A 的下确界, 记为 $\inf A = \nu \geq m$.

(1) 既有上界又有下界的数集称为有界数集, 否则称为无界数集.

例如, $\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N}, n \geq 1\right\}$ 是有界数集, 而 $\{n \mid n \in \mathbf{N}\}$ 是无界数集.

(2) 若 A 的上(下)确界属于 A , 则称数集 A 为上(下)确界可达.

注 1.1.4 上(下)确界不一定属于 A . 例如, $A = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N}, n \geq 1\right\}$, $\sup A = 1 \in A$, 但 $\inf A = 0 \notin A$.

方法 1.1.2($\sup A = \mu$ 的等价条件) 同时成立:

(1) 对于每个 $x \in A$, 有 $x \leq \sup A = \mu$;

(2) 对于任意小的正数 ε , 必存在 $x_0 \in A$, 使 $x_0 > \mu - \varepsilon$.

公理 1.1.1(上确界、下确界的存在性) 任何非空有上界的实数集 A 必存在上确界 $\sup A$, 任何非空有下界的实数集 A 必存在下确界 $\inf A$.

习 题 1.1

1. 设 $A = (-\infty, -5) \cup (5, +\infty)$, $B = [-10, 3]$, 写出 $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, A \setminus (A \setminus B)$ 的表达式.

2. 设映射 $f: X \rightarrow Y, A \subset X, B \subset X$. 证明:

(1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$; (2) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

3. 设映射 $f: X \rightarrow Y, A \subset X$, 记映射 $f(A)$ 的原像为 $f^{-1}(f(A))$. 证明:

(1) $f^{-1}(f(A)) \supset A$; (2) 当 f 是单映射时, 有 $f^{-1}(f(A)) = A$.

4. 用区间表示下列不等式的解: