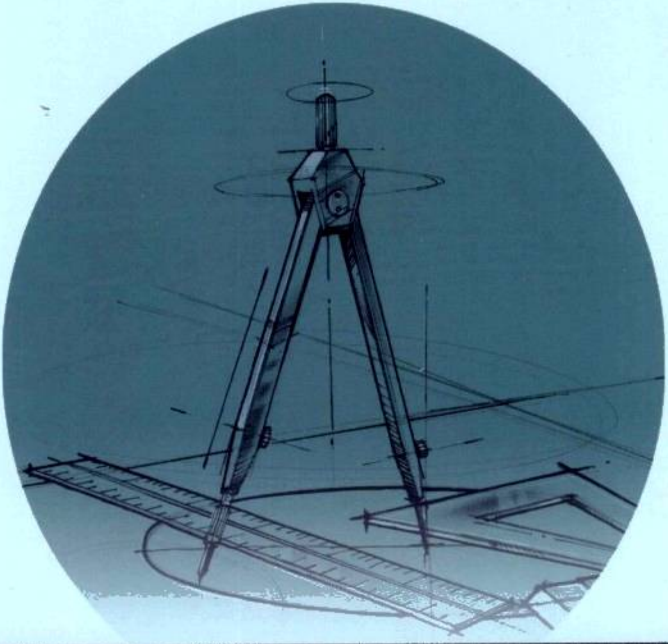
上海大学自强学院

钱伟长教育思想实践丛书



高等数学（上册）

顾传青 编著

科学出版社

(O-4451.0101)

www.sciencep.com

ISBN 978-7-03-032106-0

科学出版中心 数理分社
电　话：（010）64033664
E-mail：math-phy@mail.sciencep.com
博　客：http://blog.sina.com.cn/sciencemp

销售分类建议：高等数学

定　价：78.00元（含上、下册）

上海大学自强学院钱伟长教育思想实践丛书

高等数学

(上册)

顾传青　编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

上海大学自强学院由钱伟长校长创办、学校直接领导，是培养优秀学生的特色学院. 本书是根据作者执教上海大学自强学院“高等数学”课程 13 年总结写成的教材，是2008年度上海大学重点教材建设项目. 其特点，一是在高等数学的基本框架下加进了数学分析的一些基本内容，为学生今后学习打下一个基础；二是注重概念和方法的小结；三是例题分析紧扣解题方法，习题编排和解答便于学生自学.

本书分为上、下两册. 上册内容为函数与极限、导数与微分、微分中值定理及其应用、不定积分、定积分、定积分的应用和空间解析几何与向量代数共7章.

本书适合作工科本科生和非数学专业理科本科生的“高等数学”课程教材，也可作为准备考研人员和工程技术人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学：全 2 册/顾传青编著. —北京：科学出版社，2011
（上海大学自强学院钱伟长教育思想实践丛书）
ISBN 978-7-03-032106-0

Ⅰ.①高… Ⅱ.①顾… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011) 第 168140 号

责任编辑：王丽平 房 阳 / 责任校对：陈玉凤
责任印制：钱玉芬 / 封面设计：鑫联必升

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 8 月第 一 版 开本：B5(720 × 1000)
2011 年 8 月第一次印刷 印张：37 1/4
印数：1—2 500 字数：721 000

定价：78.00 元(含上、下册)

前　　言

本书属于《上海大学自强学院钱伟长教育思想实践丛书》, 作为上海大学自强学院“高等数学”课程的教材, 是 2008 年度上海大学重点教材建设项目. 教材分为上、下两册. 上册内容为函数与极限、导数与微分、微分中值定理及其应用、不定积分、定积分、定积分的应用和空间解析几何与向量代数共 7 章.

钱伟长校长指出:“大学生一定要学会自学. 一个人到大学毕业时, 除了已经具有一定的基本理论知识外, 还应该有这样的把握, 即没有学过的东西, 通过自学, 查一查, 看一看, 也能弄懂, 就是说能够无师自通, 大学生就应该达到这个水平.”自强学院秉承“自强不息”的校训精神, 由钱伟长校长创办、学校直接领导, 是上海大学实践钱伟长教育思想、培养优秀学生的特色学院. 这本教材将教师课堂教学和学生课外学习结合起来, 致力于培养学生的自学能力. 从自强学院 (原为基础教学强化班) 1997 年成立起, 编者一直担任“高等数学”的教学工作, 努力使学生掌握高等数学的基础知识和基本方法, 培养学生的独立思考和自学能力. 本教材是编者多年教学实践的总结. 第一个特点是在高等数学的基本框架下加进了数学分析的一些基本内容, 为学生今后进一步自学其他课程奠定基础. 第二个特点是注重概念和方法的小结, 特别是解题方法的步骤化. 对每一个重要的概念, 都用“注”的形式加以说明; 对每一个重要的解题方法, 都用“方法”的形式加以小结, 其目的是引导学生自学, 鼓励学生对所学内容进行总结. 第三个特点是例题、习题的编排上便于学生自学. 教材中基本方法的介绍都配有丰富的例题, 且有一定的难度; 同时在习题解答中对有难度的习题和证明题都给出了简明的解答和提示. 目的也是帮助学生自学, 树立学习的自信心.

在撰写“高等数学”讲义和教材过程中, 编者得到了自强学院学生和研究生的许多帮助: 陈亮、郑林、陶有田博士提供了“高等数学”的部分讲稿, 苏英老师对书稿进行了编辑和认真的校对, 同时, 编者参考了同济大学《高等数学》(第五版) 和华东师范大学《数学分析》(第三版) 的部分内容, 在此一并表示感谢!

限于编者的水平和时间, 教材中不妥之处在所难免, 希望各位读者批评指正.

顾传青
上海大学自强学院
2011 年 3 月 14 日

目 录

第 1 章 函数与极限

本章介绍高等数学的几个基本概念：函数、极限、连续和它们的基本性质，共 9 节，分别为集合与实数系、函数、数列的极限、数列极限存在的条件、函数的极限、函数极限存在的条件、无穷小与无穷大. 连续函数和闭区间上连续函数的性质，其中 1.1 节介绍了上确界、下确界的概念，1.4 节介绍了实数系的完备性，1.9 节介绍了一致连续性的概念和闭区间上连续函数的性质.

1.1 集合与实数系

1.1.1 集合

1. 集合的定义

定义 1.1.1 集合是具有某种特定性质的事物所组成的全体，组成这个集合的事物称为该集合的元素. 集合可表示为 $A=\left\{x\left|x\right.\text{所具有的某种性质}\right\}$.

全体实数构成一个集合，称为实数系，记为 $\mathbf{R}$. 通常用大写拉丁字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合；用小写的拉丁字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素. 如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记作 $a\in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A，记作 $a\notin A$.

一个集合，若它只含有有限个元素，称为有限集；不是有限集的集合称为无限集. 例如，$A=\{1,2\}$ 是有限集，$B=\left\{(x,y)\left|x^2+y^2=1,x,y\in\mathbf{R}\right.\right\}$ 是无限集.

2. 集合的表示

列举法 把集合的全体元素一一列举出来表示，$A=\{a_1,a_2,\cdots\}$.

描述法 若集合 A 是由具有某种性质 p 的元素 x 的全体所组成的，可表示成 $A=\left\{x|x\text{ 具有性质 }p\right\}$. 例如，$B$ 是方程 $x^2-3x+2=0$ 的解集，

$$B=\left\{x\left|x^2-3x+2=0\right.\right\}.$$

设 A,B 是两个集合，如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，记作 $A\subset B$. 如果集合 A 与集合 B 互为子集，即 $A\subset B$ 且 $A\supset B$，则称集合 A 与集合 B 相等，记作 $A=B$. 若 $A\subset B$ 且 $A\neq B$，则称 A 是 B 的真子集，记作 $A\underset{\neq}{\subset}B$. 不含任何元素的集合称为空集. 如 $\varnothing=\left\{x\left|x^2+1=0,x\in\mathbf{R}\right.\right\}$ 是一个空集. 规定空集是任何集合的子集，但要注意区分空集 $\varnothing$ 与集合 $\{0\}$ 是两个不同的集合.

3. 集合的运算

设 A, B 是集合, 集合的和、交、差、补运算分别定义如下:

(1) 由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合, 称为 A 与 B 的并集, 记作

$$A \cup B = \left\{x : x \in A \text{ 或 } x \in B\right\}.$$

例如, $\{1,2\} \cup \{2,3\} = \{1,2,3\}$.

注 1.1.1　在 $A \cup B$ 中重复的元素只算一次.

(2) 由所有属于 A 并且属于 B 的元素组成的集合, 称为 A 与 B 的交集, 记作

$$A \cap B = \left\{x : x \in A \text{ 且 } x \in B\right\}.$$

例如, $\{1,2\} \cap \{2,3\} = \{2\}$.

(3) 由所有属于 A 并且不属于 B 的元素组成的集合, 称为 A 与 B 的差集,

$$A \backslash B = \left\{x : x \in A \text{ 且 } x \notin B\right\}.$$

例如, $\{1,2\} \setminus \{2,3\} = \{1\}$.

(4) 设研究某个问题限定在一个大的集合 U 中进行, 所研究的其他集合 A 都是 U 的子集, 称集合 U 为全集或基本集, 称 $U \backslash A$ 为 A 的余集或补集, 记作

$$A^{c} = \left\{x \,\middle|\, x \in \cup \text{ 且 } x \notin A\right\}.$$

例如, $A = \{0 < x \leqslant 1\}$ 的补集 $A^{c} = \left\{x \leqslant 0 \text{ 或者 } x > 1\right\}$.

4. 集合的运算法则

设 A, B, C 为任意三个集合, 则有下列法则成立:

交换律　$A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;

结合律　$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

分配律　$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;

对偶律　$(A \cup B)^{c} = A^{c} \cap B^{c}$, $(A \cap B)^{c} = A^{c} \cup B^{c}$.

1.1.2　映射

1. 映射的定义

定义 1.1.2　设 X, Y 是非空集合, 如果存在一个法则 f, 使得 $\forall x \in X$, 按法则 f, 在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应, 则称 f 为从 X 到 Y 的映射

$$f : X \to Y.$$

y 称为元素 x(在映射 f 下) 的像, 记作 $y=f(x)$, 元素 x 称为元素 y (在映射 f 下) 的一个原像; 集合 X 称为映射 f 的定义域, 记作 $D_f=X$; X 中所有元素的像所组成的集合称为映射 f 的值域, 记作 $R_f=\{f(x)\,|x\in X\}$.

注 1.1.2 对每个 $x\in X$, 元素 x 的像 y 是唯一的; 而对每个 $y\in R_f$, 元素 y 的原像 x 不一定是唯一的; 映射 f 的值域 R_f 是 Y 的一个子集, 即 $R_f\subset Y$, 不一定 $R_f=Y$. 如 $\forall x\in\mathbf{R}$, $f(x)=x^2$, f 的定义域 $X=\mathbf{R}$, f 的值域 $R_f=\{y\,|y\geqslant 0\}$. 对 $f(X)$ 中元素 y, 除 $y=0$ 外, 它的原像 x 不是唯一的, 如 $y=1$ 的原像有 $x=1,x=-1$ 两个.

2. 满射、单射与双射

设 f 为从 X 到 Y 的映射, 分别给出下列三种情形:

(1) 若 $R_f=Y$, 则称 f 为从 X 到 Y 的满射. 如 $f(x)=x+\sin x$: $\forall x\in\mathbf{R}\mapsto y\in\mathbf{R}$ 是一个满射, $f(x)=x^2$: $\forall x\in\mathbf{R}\mapsto y\in\mathbf{R}$ 不是一个满射.

(2) 若 $\forall x_1,x_2\in X, x_1\neq x_2$ 时, 它们的像 $f(x_1)\neq f(x_2)$, 则称 f 为从 X 到 Y 的单射. 如 $f(x)=x+\sin x$ 是单射, 而 $f(x)=x^2$ 不是单射.

(3) 若 f 既是满射又是单射, 则称 f 为双射或一一映射. 例如, $f(x)=x+\sin x$ 是一一映射.

注 1.1.3 映射又称为算子. 在不同数学分支中有不同的术语:

在数学分析中, $f:X$(数集) $\to\mathbf{R}$, f 称为定义在 X 上的函数;

在线性代数中, $f:X\to Y$, f 称为 X 上的线性变换;

在泛函分析中, $f:X\to Y$(数集), f 称为 X 上的泛函.

3. 逆映射

设 f 为从 X 到 Y 的单射, 则由定义, 对每个 $y\in R_f$, 有唯一的 $x\in X$, 适合 $y=f(x)$. 于是, 可以定义一个从 R_f 到 X 的新映射 g,

$$g:R_f\to X$$

对每个 $y\in R_f$, 规定 $g(y)=x$, 这个 x 满足 $y=f(x)$. 这个映射 g 称为 f 的逆映射, 记作 f^{-1}, 其定义域 $D_{f^{-1}}=R_f$, 值域 $R_{f^{-1}}=X$.

例如, 求 $y=x^2, x\in(-\infty,0]$ 的逆映射: 解出逆映射为 $x=-\sqrt{y}, y\in[0,+\infty)$.

4. 复合映射

设有两个映射 $g:X\to Y_1$, $f:Y_2\to Z$, 其中 $Y_1\subset Y_2$, 则由映射 g 和 f 可以定出一个从 X 到 Z 的对应法则, 它将每个 $x\in X$ 映成 $f(g(x))\in Z$. 显然, 这个对应法则确定了一个从 X 到 Z 的映射, 称为映射 g 和 f 构成的复合映射, 记作 $f\circ g$, 即 $(f\circ g)(x)=f(g(x)), x\in X$.

1.1.3　实数系

全体自然数的集合记为 $\mathbf{N}$, 全体整数的集合记为 $\mathbf{Z}$, 全体有理数的集合记为 $\mathbf{Q}$, 全体实数的集合 (即实数系), 记为 $\mathbf{R}$. 显然 $\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$.

1. **数轴和实数绝对值**

取定了原点、长度单位和方向的直线称为数轴.

(1) 每一个实数, 在数轴上有唯一的点与之对应; 反过来, 每一个数轴上的点, 代表了唯一的一个实数. 全体实数和数轴上的点可建立一一对应的关系. 今后, 对实数和数轴上的点不加区别.

(2) 实数 a 的绝对值定义为 $|a|=\begin{cases} a, & a\geqslant 0,\\ -a, & a<0,\end{cases}$ 成立 $|a|=\sqrt{a^2}$.

当 $k>0$ 时, $|a|<k\Leftrightarrow -k<a<k$; $|a|>k\Leftrightarrow a<-k$ 或 $a>k$.

例如, $|x|<1\Leftrightarrow -1<x<1$, 而 $|x|>1\Leftrightarrow x<-1$ 或 $x>1$.

定义 1.1.3(直积)　设 A,B 是两个集合, 在集合 A,B 中各任意取一个元素 x,y, 组成一个有序对 (x,y), 把这样的有序对作为新的元素, 它们全体组成的集合称为集合 A 与集合 B 的直积, 记作 $A\times B=\{(x,y)|\,x\in A$ 且 $y\in B\}$.

2. **区间**

设 a,b 为两个实数, $a<b$, $(a,b)=\{x\,|x\in\mathbf{R},a<x<b\}$ 称为开区间;

$[a,b]=\{x\,|x\in\mathbf{R},a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为闭区间; $(a,b]$, $[a,b)$ 称为半开半闭区间;

$[a,+\infty)=\{x\,|x\in\mathbf{R},a\leqslant x<+\infty\}$, $(a,+\infty)=\{x\,|x\in\mathbf{R},a<x<+\infty\}$, $(-\infty,b)$, $(-\infty,b]$ 和 $(-\infty,+\infty)$ 称为无穷区间.

3. **邻域**

点 a 的邻域是指以点 a 为中心的对称开区间, 分别给出下列情形:

(1) 点 a 的 δ 邻域: 设 $a\in\mathbf{R},\delta>0$, 满足不等式 $|x-a|<8$ 的全体实数 x 的集合称为点 a 的 δ 邻域, 记作 $U(a,\delta)=\{x|\,|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta)$. 例如, 点 1 的 $\dfrac{1}{2}$ 邻域为

$$U\left(1,\frac{1}{2}\right)=\left\{x\,\middle|\,|x-1|<\frac{1}{2}\right\}=\left\{\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}\right\}.$$

(2) 点 a 的去心 δ 邻域: $\mathring{U}(a,\delta)=\{x\,|0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$. 例如, 点 1 的去心 $\dfrac{1}{2}$ 邻域为 $\mathring{U}\left(1,\dfrac{1}{2}\right)=\left\{x\,\middle|\,0<|x-1|<\dfrac{1}{2}\right\}=\left\{\left(\dfrac{1}{2},1\right)\cup\left(1,\dfrac{3}{2}\right)\right\}$.

(3) ∞ 邻域 $\mathring{U}(\infty)=\{x|\,|x|>M\}$, 其中 M 为充分大的正数.

方法 1.1.1(证有理数在实数系 $\mathbf{R}$ 中稠密)

对于任意的 $x_0 \in \mathbf{R}$ 和任意的 $\delta > 0$, 邻域 $U(x_0, \delta)$ 必含一个有理数, 因而含有无数个有理数. 已知, 有理数的和、差、积、商仍为有理数. 做法如下:

第 1 步: 取 $p, q \in Q$ 使 $U(x_0, \delta) \subset [p, q]$;

第 2 步: 将闭区间 $[p, q]$ 分成 n 等份, 每个分点均为有理点;

第 3 步: 当等分的长度 $\dfrac{q-p}{n} < \delta$ 时, 必有一个等分点落在 $U(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 中. 可证无理数也在实数系 $\mathbf{R}$ 中稠密.

4. 上确界和下确界

定义 1.1.4 对于数集 A, 若有常数 M, 使得对任意的 $x \in A$ 有 $x \leqslant M$, 则称 M 是数集 A 的一个上界; A 的最小上界称为 A 的上确界, 记为 $\sup A = \mu \leqslant M$.

若有常数 m, 使得对任意的 $x \in A$ 有 $x \geqslant m$, 则称 m 是数集 A 的一个下界; A 的最大下界称为 A 的下确界, 记为 $\inf A = \nu \geqslant m$.

(1) 既有上界又有下界的数集称为有界数集, 否则称为无界数集.

例如, $\left\{\dfrac{1}{n} \middle| n \in \mathbf{N}, n \geqslant 1\right\}$ 是有界数集, 而 $\{n | n \in \mathbf{N}\}$ 是无界数集.

(2) 若 A 的上 (下) 确界属于 A, 则称数集 A 为上 (下) 确界可达.

注 1.1.4 上 (下) 确界不一定属于 A. 例如, $A = \left\{\dfrac{1}{n} \middle| n \in \mathbf{N}, n \geqslant 1\right\}$, $\sup A = 1 \in A$, 但 $\inf A = 0 \notin A$.

方法 1.1.2($\sup A = \mu$ 的等价条件) 同时成立:

(1) 对于每个 $x \in A$, 有 $x \leqslant \sup A = \mu$;

(2) 对于任意小的正数 ε, 必存在 $x_0 \in A$, 使 $x_0 > \mu - \varepsilon$.

公理 1.1.1(上确界、下确界的存在性) 任何非空有上界的实数集 A 必存在上确界 $\sup A$, 任何非空有下界的实数集 A 必存在下确界 $\inf A$.

习 题 1.1

1. 设 $A = (-\infty, -5) \cup (5, +\infty)$, $B = [-10, 3)$, 写出 $A \cup B, A \cap B, A \backslash B, A \backslash (A \backslash B)$ 的表达式.

2. 设映射 $f: X \to Y, A \subset X, B \subset X$. 证明:

(1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$; (2) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

3. 设映射 $f: X \to Y, A \subset X$, 记映射 $f(A)$ 的原像为 $f^{-1}(f(A))$. 证明:

(1) $f^{-1}(f(A)) \supset A$; (2) 当 f 是单映射时, 有 $f^{-1}(f(A)) = A$.

4. 用区间表示下列不等式的解: